# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

---

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. BIEBERBACH L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

32. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

5856-42

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

---

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. BIEBERBACH L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

32. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

66 F3057

QA1
M88
v.32

# Inhaltsverzeichnis

Seite

Bergmann, St., Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigen . . . . . 386

Bonder, J., und S. Neumark, Einige Bemerkungen zu der Abhandlung „Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit" von M. Lagally . . . . . 600

Ciorănescu, N., La résolution du problème de Cauchy pour un système d'équations du second ordre par la méthode de Riemann . . . . . 481

Cimmino, G., Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore . . . . . 4

Doetsch, G., Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome . . . . . 587

Dörge, K., Zu der von R. von Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erste Mitteilung: Theorie des Glücksspiels . . . . . 232

Fejér, L., Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen . . . . . 426

Fekete, M., Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. Erste Mitteilung . . . . . 108

Fekete, M., Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. Zweite Mitteilung . . . . . 215

Furch, R. Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik . . . . . 512

Gambier, B., Déformation d'une surface avec un réseau conjugué formé de lignes coniques ou cylindriques et remarques sur un article de M. Liebmann . . 291

Gołąb, St., und J. A. Schouten, Über projektive Übertragungen und Ableitungen 192

Hanke, G., Außerwesentliche Singularitäten linearer Differentialgleichungen . . . 751

Hasse, H., Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche $\zeta$-Reihe . . . . . 458

Häusler, L., Über das asymptotische Verhalten der Taylorkoeffizienten einer gewissen Funktionenklasse . . . . . 115

Heffter, L., Über den Cauchyschen Integralsatz . . . . . 476

Hille, E., Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Müntz . . . . . 422

Hopf, H., Über die Verteilung quadratischer Reste . . . . . 222

Jarník, V., und A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden 152

Johansson, I., Ein Beitrag zur ebenen Geometrie von Laguerre . . . . . 259

Kamke, E., Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen . . . . . 101

Karamata, J., Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes . . . . . 319

Köthe, G., Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist . . . . . 161

Lagally, M., Bemerkungen zu vorstehender Note der Herren Bonder und Neumark 605

Landau, E., Zum Waringschen Problem. Dritte Abhandlung . . . . . 699

Seite

Levi, F., Über die Untergruppen freier Gruppen . . . . . 315
Lewin, S., Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen . . . . . 491
Lichtenstein, L., Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Vierte Abhandlung. Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden . . . . . 608
Lösch, Fr., Über nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken . . . . . 415
Lyche, R. T., Bemerkung zu den Formeln von I. J. Schwatt für die Eulerschen Zahlen . . . . . 586
Mahler, K., Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen . . . . . 545
Neumark, S., und J. Bonder, Einige Bemerkungen zu der Abhandlung „Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit“ von M. Lagally . . . . . 600
Odqvist, F. K. G., Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten . . . . . 329
Perron, O., Über eine Matrixtransformation . . . . . 465
Perron, O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen . . . . . 703
Podehl, E., Über berührende Kegelschnitte . . . . . 59
Pollaczek, F., Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. I. (Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt) . . . . . 64
Pollaczek, F., Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. II. (Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt) . . . . . 729
Radó, T., The problem of the least area and the problem of Plateau . . . . . 763
Ritt, J. F., Representation of analytic functions as infinite products . . . . . 1
Rogosinski, W., Zwei Sätze über Fourierkoeffizienten . . . . . 147
Sachs, L., Untersuchung der dynamischen Stabilität der Bewegung im Falle $U=r^6$ 376
Schoenberg, I., Über variationsvermindernde lineare Transformationen . . . . 321
Scholz, A., Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen . 187
Schouten, J. A., und Gołąb, St., Über projektive Übertragungen und Ableitungen 192
Suetuna, Z., Über die Nullstellen der Dedekindschen Zetafunktionen . . . . . 190
Vakselj, A., Ein Existenztheorem der Flächen konstanter Krümmung . . . . . 407
Walfisz, A., und V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden 152
van der Waerden, B. L., Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion . . . . . 474
Wintner, A., Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems . . . . . 641
Wintner, A., Über die v. Haerdtlsche Bahn . . . . . 668
Wintner, A., Zur effektiven Stabilität des Mondes . . . . . 675
Druckfehlerverzeichnis zu der Arbeit von F. Pollaczek „Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie I.“ (Math. Zeitschrift **32** (1930) S. 64—100) . 796

# Representation of analytic functions as infinite products[1].

By

J. F. Ritt in New York.

1. Theorem. *Let $f(z)$ be analytic, and equal to unity, for $z=0$. Then $f(z)$ admits, within some circle with center at the origin, a representation as an absolutely convergent infinite product*

$$(1) \qquad (1+a_1 z)(1+a_2 z^2)\dots(1+a_n z^n)\dots.$$

*The representation is unique.*

It is easy to see that a product (1) with $a$'s arbitrarily assigned converges absolutely within the circle of convergence of

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

and diverges outside that circle. We shall indicate a lower bound for the radius of the circle within which (1) converges to $f(z)$. Suppose that, for the neighborhood of the origin,

$$(2) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = c_1 + c_2 z + \dots + c_n z^{n-1} + \dots.$$

Let $r$ be the least upper bound of the sequence

$$(3) \qquad |c_1|, \sqrt{|c_2|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots.$$

*Then the radius of the circle within which* (1) *converges is not less than* $1/(6r)$.

2. Assuming $f(z)$ given, let us suppose that some product (1) converges to $f(z)$ for a neighborhood of the origin. Then, for $z$ small,

$$(4) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{1+a_1 z} + \frac{2a_2 z}{1+a_2 z^2} + \dots + \frac{n a_n z^{n-1}}{1+a_n z^n} + \dots.$$

[1] When I secured the result of this note, I considered it almost a foregone conclusion that the result was old. However, the only papers which I have been able to locate dealing with products (1) with $a$'s not special, are those of Hardy, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 7 (1909), p. 40, and Littlewood, ibid. (2) 8 (1910), p. 195. Neither of these papers considers the question treated here.

We see that $a_1$ equals $c_1$ in (2). Let $n$ be any integer greater than unity. Let the divisors of $n$, in order of decreasing magnitude, be

$$n, d_1, d_2, \ldots, d_t = 1.$$

Of course, $t$ depends on $n$. We have, expanding the second member in powers of $z$ and comparing with (2),

$$(5) \qquad n a_n \pm d_1 a_{d_1}^{n/d_1} \pm d_2 a_{d_2}^{n/d_2} \pm \ldots \pm a_1^n = c_n,$$

a relation which determines $a_n$ uniquely for every $n$.

Taking now any $f(z)$, and the product (1) which (5) formally yields for it, we shall study the convergence of the product.

We shall prove that, for every $m$,

$$(6) \qquad \sqrt[m]{|a_m|} \leqq \alpha_m r,$$

where $\alpha_1 = 1$, and, for $m > 1$,

$$(7) \qquad \log \alpha_m = \log 2 \sum_{p=1}^{\frac{\log m}{\log 2}} \left(p + \frac{1}{2}\right) 2^{-p}.$$

The summation in (7) is made from unity to the greatest integer in $(\log m)/(\log 2)$, inclusively.

As $a_1 = c_1$ and $|c_1| \leqq r$, (6) holds for $m = 1$. It will thus suffice to show that (6) holds for $m = n$ if it is true for every $m < n$.

Consider any $n > 1$. From among the quantities $a_{d_i}^{n/d_i}$, in (5), we pick one whose modulus is a maximum. Let $n'$ be a value of $d_i$ for which such a maximum is had. Then

$$|a_n| \leqq \frac{|c_n|}{n} + |a_{n'}|^{n/n'} \left(\frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \ldots + \frac{d_t}{n}\right).$$

Since $t < n$ and $n \geqq 2 d_i$ for every $i$, we have[2])

$$(8) \qquad |a_n| \leqq \frac{|c_n|}{n} + \frac{n}{2} |a_{n'}|^{n/n'}.$$

Suppose that

$$(9) \qquad \frac{n}{2} |a_{n'}|^{n/n'} \leqq \frac{|c_n|}{n}.$$

Then, since $n > 1$,

$$|a_n| \leqq |c_n| \leqq r^n,$$

and, as $\alpha_n > 1$, we have (6) with $m = n$.

If (9) does not hold, we have

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{n} \sqrt[n']{|a_{n'}|}.$$

---

[2]) One could use here the inequality $\Sigma (d_i/n) < \log n$, and secure a better final result.

Thus, as (6) is true for $m = n'$, we have

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \alpha_{n'} \sqrt[n]{n}\, r. \tag{10}$$

As $n \geqq 2n'$, the sum in (7) has at least one term more when $m = n$ than when $m = n'$ [3]). Now $(p + \frac{1}{2})\, 2^{-p}$ is a decreasing function for $p \geqq 1$. Hence

$$\log \alpha_n - \log \alpha_{n'} \geqq \log 2 \left(\frac{\log n}{\log 2} + \frac{1}{2}\right) n^{-1} > \frac{\log n}{n}.$$

Thus

$$\alpha_n > \alpha_{n'} \sqrt[n]{n},$$

and, using this result in (10), we find (6) to hold for $m = n$.

As $\alpha_m$ increases toward a limit less than 6, we see that (1) converges to $f(z)$ within a circle of radius not less than $1/(6r)$.

---

[3]) For the case of $n' = 1$, we bear in mind that $\log \alpha_1 = 0$.

(Eingegangen am 2. Januar 1929.)

# Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore.

Von

Gianfranco Cimmino in Neapel.

Nel presente lavoro mi sono proposto di estendere alle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte, di ordine (pari) superiore al secondo, i classici teoremi di Sturm sulle equazioni differenziali lineari del second'ordine[1]) e i noti teoremi sugli autovalori e sulle autosoluzioni.

Nel capitolo primo, comincio con la dimostrazione di un'identità fondamentale, che è l'analoga di quella stabilita da Picone, nel caso dell'equazione di second'ordine[2]), ed è, come quella, una relazione integrale.

Da tale relazione, che, sull'esempio di Bôcher[3]), ho chiamata identità di Picone, discende immediatamente il teorema di confronto per le equazioni di ordine superiore, come per quelle di second'ordine. Da essa si deducono pure molto facilmente il teorema di oscillazione per le equazioni dipendenti da un parametro variabile, come provo al § 2, e il teorema di separazione per gli zeri degl'integrali linearmente indipendenti, come mostro al § 3.

Nel § 4, ponendomi da un punto di vista diverso, dò un'altra interpretazione dei risultati precedenti, la quale non mi sembra del tutto priva d'interesse, anche perchè credo che le conclusioni da essa fornite possano dare adito a nuove ricerche.

Nei primi quattro paragrafi, per non complicare troppo l'esposizione, mi son limitato a considerare equazioni del quart'ordine. Nel quinto paragrafo, invece, prendendo in esame equazioni di ordine (pari) qualsiasi, dò un rapido cenno sulla possibile estensione a tali equazioni dei risultati innanzi conseguiti, estensione che si presenta del tutto immediata, dopo i precedenti sviluppi.

---

[1]) C. Sturm, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journal de Liouville, 1 (1836), p. 106.

[2]) M. Picone, Sui valori eccezionali di un parametro etc., Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 11 (1909), p. 20, f. (7).

[3]) M. Bôcher, Lecons sur les méthodes de Sturm etc., Paris 1917, p. 55.

Riguardo a questo primo capitolo, devo ricordare che, nel tentativo di estendere i teoremi di Sturm alle equazioni di ordine superiore, sono stato preceduto da Birkhoff[4]), pel teorema di separazione, e da Davidoglou[5]), pei teoremi di confronto e di oscillazione. Le conclusioni a cui pervengono questi due autori e i metodi da essi usati sono però di tipo affatto diverso da quelli del presente studio: e io mi lusingo di credere che le considerazioni da me qui svolte forniscano un'estensione più naturale e più rettilinea di quella data dagli autori citati, mettendo in luce una più stretta analogia fra le proprietà delle equazioni di second'ordine e quelle delle equazioni di ordine superiore.

Nel capitolo secondo, mi sono occupato di stabilire l'esistenza degli autovalori e delle corrispondenti autosoluzioni e di provare alcune notevoli proprietà, di cui essi son dotati.

L'esistenza degli autovalori, per le equazioni di ordine superiore, è stata già dimostrata, con l'ausilio della teoria delle equazioni integrali, prima da Picone, nella sua Tesi di abilitazione[6]), e poi, in ipotesi molto più generali, da Mammana[7]).

Ma i metodi di cui io qui mi servo sono del tutto differenti ed estendono all'equazione di quart'ordine quelli dati da Picone, esclusivamente per l'equazione di second'ordine, nella Tesi citata.

Si trovano ivi due dimostrazioni di tipo affatto diverso fra loro, del teorema fondamentale di esistenza degli autovalori, nelle quali non vien fatto alcun uso delle equazioni integrali. Ebbene, io ho mostrato che entrambe codeste dimostrazioni possono estendersi, con perfetta analogia, al caso dell'equazione di quart'ordine. Esse però, contrariamente a quello che avviene per le equazioni di second'ordine, conducono a due teoremi distinti: si hanno cioè, per l'equazione di cui mi sono occupato, due diverse successioni di autovalori (per le quali ho stabilito i relativi teoremi di esistenza nel § 7 e nel § 8), ciascuna delle quali può considerarsi come una estensione al caso delle equazioni di ordine superiore della nota successione di autovalori, relativi all'equazione di second'ordine.

---

[4]) G. D. Birkhoff, On solutions of the ordinary linear homogeneous differential equations of the third order, Annals of Mathematics 12 (1911), p. 103.

[5]) A. Davidoglou, Étude de l'équation différentielle $\frac{d^2}{dx^2}\left(\theta\frac{d^2y}{dx^2}\right)=k\varphi(x)y$, Annales de l'École Normale Supérieure de Paris 22 (1905), p. 539. — Mentre il presente lavoro era in corso di stampa, ho preso conoscenza anche dei recenti risultati di S. A. Janczewski, comunicati nei Comptes rendus de l'Académie des Sciences 188 (1929), p. 435. Tali risultati presentano dei punti di contatto coi miei.

[6]) M. Picone, loc. cit. in [2]), pp. 134 e segg.

[7]) G. Mammana, Autovalori e autosoluzioni etc., Pisa 1926.

Nel capitolo terzo, ho poi data (al § 9) l'estensione all'equazione di quart'ordine della proprietà di minimo dimostrata da Picone nella sua Tesi d'abilitazione[8]), e infine (nel § 10) ho esteso anche il teorema di Picone sugli zeri delle autosoluzioni[9]) e il teorema hilbertiano di minimo.

Le ipotesi fatte, in tutta questa memoria, sulla natura dei coefficienti dell'equazione sono molto generali; non così le ipotesi fatte sulle condizioni terminali, che determinano le autosoluzioni: riguardo a tali condizioni, mi sono limitato, per non complicare troppo l'esposizione, a considerare soltanto il caso tipico delle sbarre incastrate, il caso, cioè, in cui s'impone all'integrale di annullarsi, insieme con la prima derivata, nei due estremi dell'intervallo di definizione.

Non sarebbe difficile, del resto, ottenere una maggiore generalità anche da questo punto di vista.

Così pure, ritengo che, dopo quanto è detto nel § 5 del capitolo primo, non sia difficile il formulare gli enunciati dei teoremi analoghi, nel caso delle equazioni di ordine $2n$, a quelli dimostrati negli altri due capitoli, per le equazioni di quart'ordine.

Meno agevole, invece, appare l'estensione dei risultati qui ottenuti alle equazioni lineari autoaggiunte alle derivate parziali di ordine superiore al secondo, estensione di cui mi occuperò prossimamente.

Mi propongo pure, in un ulteriore studio, di dedurre dai teoremi di minimo qui stabiliti le formole di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni differenziali lineari di ordine superiore, onde poter applicare i metodi di calcolo numerico approssimato, di Ritz e delle minime potenze, agl'integrali medesimi.

## Capitolo primo.

## Estensione dei teoremi di Sturm alle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore.

### § 1.

### Teorema di confronto.

**1.** Siano assegnate, nell'intervallo $(a, b)$ dell'asse $x$, tre funzioni reali $\theta_0(x), \theta_1(x), \theta_2(x)$, sottoposte alle seguenti condizioni:

la $\theta_0(x)$ sia continua in $(a, b)$; la $\theta_1(x)$ sia continua in $(a, b)$, insieme con la prima derivata $\theta_1'(x)$; la $\theta_2(x)$ sia continua in $(a, b)$, insieme con le prime due derivate $\theta_2'(x), \theta_2''(x)$, e inoltre assuma soltanto valori positivi.

---

[8]) M. Picone, loc. cit. in [2]), p. 65.

[9]) M. Picone, Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione etc., Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 519.

Si definiscano poi, nel medesimo intervallo, tre altre funzioni reali $\bar{\theta}_0(x), \bar{\theta}_1(x), \bar{\theta}_2(x)$, le quali verifichino ordinatamente le stesse ipotesi ora enunciate per le $\theta_0(x), \theta_1(x), \theta_2(x)$ e di più rendano soddisfatte le disuguaglianze

$$(1) \qquad \theta_2(x) \geqq \bar{\theta}_2(x) > 0, \quad \theta_1(x) \geqq \bar{\theta}_1(x), \quad \theta_0(x) \geqq \bar{\theta}_0(x),$$

in ogni punto di $(a, b)$.

In tali condizioni, ha interesse il confronto delle due equazioni differenziali lineari omogenee autoaggiunte del quart'ordine

$$(I) \qquad \bar{D}y = \frac{d^2}{dx^2}\left(\bar{\theta}_2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\bar{\theta}_1 \frac{dy}{dx}\right) + \bar{\theta}_0 y = 0,$$

$$(II) \qquad Dy = \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta_2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) + \theta_0 y = 0,$$

per ciascuna delle quali, in virtù di teoremi noti, si può affermare che l'integrale generale $y(x)$ è funzione di $x$, continua insieme con le derivate dei primi quattro ordini, ed è funzione lineare omogenea di quattro costanti arbitrarie.

**2.** Generalmente, data una coppia di punti distinti $x_1, x_2$ in $(a, b)$, non esiste nessun integrale di un'equazione come la (I) o la (II), che si annulli insieme con la prima derivata in $x_1$ e $x_2$, senza essere identicamente nullo in tutto l'intervallo $(a, b)$. Può darsi peraltro, come risulta da facili esempi (confronta, in sèguito, il n.° 10), che un tale integrale esista, in particolare, per certe coppie di valori $x_1, x_2$.

Sia ora $y(x)$ un integrale della (II) e $x_1, x_2$ una coppia di punti distinti in $(a, b)$, nei quali la $y(x)$ abbia due zeri doppi[10]):

$$(2) \qquad y(x_1) = y'(x_1) = 0, \qquad y(x_2) = y'(x_2) = 0.$$

Si moltiplichi, in quest'ipotesi, l'equazione (II) per $y(x)dx$ e si integri, poi, sull'intervallo $(x_1, x_2)$. In tal modo, poichè, con successive integrazioni per parti, si deduce che

$$\int_{x_1}^{x_2} y \frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) dx = \left[\theta_1 y \frac{dy}{dx}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \theta_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta_2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx = \left[y \frac{d}{dx}\left(\theta_2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \theta_2 \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \theta_2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

---

[10]) Qui e in sèguito, per esprimere il fatto che $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, si dirà che la $y(x)$ è dotata di uno zero doppio nel punto $x_1$; a scanso di equivoci, però, si noti che, con questa locuzione, non s'intenderà che la derivata seconda di $y(x)$ nel punto $x_1$ debba esistere ed essere diversa da zero.

si otterrà, tenendo conto delle condizioni (2), la relazione seguente

$$(3)\qquad \int_{x_1}^{x_2} y\,D\,y\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \theta_2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta_0\, y^2\, dx = 0,$$

la quale sarebbe senz'altro ovvia, nel caso che $y(x)$ fosse identicamente nulla nell'intervallo $(x_1, x_2)$, e quindi anche, di conseguenza, identicamente nulla in tutto l'intervallo $(a, b)$.

**3.** D'altra parte, si prendano in considerazione due integrali $u(x)$, $v(x)$ dell'equazione (I), pei quali, se è possibile, risultino verificate le seguenti due condizioni:

1ª) il wronskiano $W[u(x), v(x)] = uv' - u'v$ non si annulli mai, nell'interno dell'intervallo $(x_1, x_2)$;

2ª) sussista la relazione

$$(4)\qquad \begin{aligned}\bar\theta_2(uv''' - u'''v) + \bar\theta_2'(uv'' - u''v) - \bar\theta_2(u'v'' - u''v') \\ - \bar\theta_1(uv' - u'v) = 0.\end{aligned}$$

È bene osservare esplicitamente che questa relazione, contrariamente a quanto forse potrebbe apparire a prima vista, non costituisce che una assai lieve restrizione per la coppia d'integrali $u(x)$, $v(x)$.

Basterà, per convincersene, derivare il primo membro della (4): si riconosce sùbito che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\bar\theta_2(uv''' - u'''v) + \bar\theta_2'(uv'' - u''v) - \bar\theta_2(u'v'' - u''v') - \bar\theta_1(uv' - u'v)] \\ = u\bar D v - v\bar D u.\end{aligned}$$

Quindi il primo membro della (4) ha la derivata identicamente nulla in $(a, b)$, poichè, come si è supposto, $u(x)$ e $v(x)$ verificano la (I), cioè risulta

$$(5)\qquad \bar D u = 0, \qquad \bar D v = 0.$$

Sicchè, comunque si prendano i due integrali $u(x)$ e $v(x)$ della (I), il primo membro della (4) avrà, in ogni caso, un valore costante in $(a, b)$; e pertanto, basterà assicurarsi che la (4) valga in un punto solo, perchè si possa affermare senz'altro che essa vale in ogni punto dell'intervallo $(a, b)$.

Da ciò si deduce pure che esisteranno sempre infinite coppie $u(x)$, $v(x)$ d'integrali della (I), linearmente indipendenti in $(a, b)$, verificanti la condizione (4). Si può, infatti, scegliere dapprima arbitrariamente l'integrale $u(x)$, e poi determinare l'altro $v(x)$ in maniera che, in un dato punto di $(a, b)$, sussista la (4), ciò che costituisce per $v(x)$ una sola condizione lineare in quel punto, e quindi lascia ancora la possibilità di scegliere $v(x)$ in infiniti modi, fra gli integrali della (I), che non differiscono da $u(x)$ solo per un fattore costante.

**4.** Ora si faccia soltanto l'ipotesi che $y(x)$ sia una funzione continua in $(a, b)$, insieme con le prime due derivate $y'(x)$, $y''(x)$, sottoposta alle condizioni (2), ma non obbligata, come al n.° 2, a verificare anche l'equazione (II), e che $u(x)$, $v(x)$ sia una coppia di funzioni, entrambe integrali della (I), ma non obbligate, come al n.° precedente, a verificare anche le condizioni 1ª) e 2ª); ciò basta perchè sia lècito asserire che, almeno in tutti i punti di $(a, b)$ in cui non è $uv' - u'v = 0$ (e certamente esistono di tali punti, purchè $u(x)$ e $v(x)$ non coincidano a meno di un fattore costante), sussiste la seguente identità:

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & \bar\theta_2 y''^2 + \bar\theta_1 y'^2 + \bar\theta_0 y^2 - \bar\theta_2 \Big(y'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}y\Big)^2 \\
&= \frac{d}{dx}\Big[\Big(\bar\theta_2'\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} + \bar\theta_2\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}\Big)y^2 - 2\bar\theta_2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}yy' \\
&\quad + \bar\theta_2\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y'^2\Big] + \Big[\frac{u'v''-u''v'}{(uv'-u'v)^2}y^2 - \frac{1}{uv'-u'v}y'^2\Big] \\
&\quad \times [\bar\theta_2(uv'''-u'''v) + \bar\theta_2'(uv''-u''v) - \bar\theta_2(u'v''-u''v') \\
&\qquad - \bar\theta_1(uv'-u'v)].
\end{aligned}
$$

Infatti, calcolando la derivata che figura al secondo membro della (6), si trova:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big[\Big(\bar\theta_2'\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} + \bar\theta_2\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}\Big)y^2 - 2\bar\theta_2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}yy' + \bar\theta_2\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y'^2\Big] \\
&= \Big[\bar\theta_2''\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} + 2\bar\theta_2'\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v} - \bar\theta_2'\frac{(uv''-u''v)(u'v''-u''v')}{(uv'-u'v)^2} \\
&\quad + \bar\theta_2\frac{u'v^{IV}-u^{IV}v'}{uv'-u'v} + \bar\theta_2\frac{u''v'''-u'''v''}{uv'-u'v} - \bar\theta_2\frac{(u'v'''-u'''v')(uv''-u''v)}{(uv'-u'v)^2}\Big]y^2 \\
&\quad + 2\bar\theta_2\frac{(uv''-u''v)(u'v''-u''v')}{(uv'-u'v)^2}yy' \\
&\quad + \Big[-\bar\theta_2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} + \bar\theta_2'\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v} + \bar\theta_2\frac{uv'''-u'''v}{uv'-u'v} - \bar\theta_2\frac{(uv''-u''v)^2}{(uv'-u'v)^2}\Big]y'^2 \\
&\quad + 2\bar\theta_2\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y'y'' - 2\bar\theta_2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}yy'';
\end{aligned}
$$

onde, sviluppando e riducendo, il secondo membro della (6) si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
&') \qquad - \bar\theta_2\Big(y'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}y\Big)^2 + \bar\theta_2 y''^2 \\
&+ \Big(\bar\theta_2\frac{u'v^{IV}-u^{IV}v'}{uv'-u'v} + 2\bar\theta_2'\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v} + \bar\theta_2''\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} - \bar\theta_1\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}\Big)y^2 + \bar\theta_1 y'^2 \\
&+ \bar\theta_2\frac{(uv'''-u'''v)(u'v''-u''v') + (u''v'''-u'''v'')(uv'-u'v) - (u'v'''-u'''v')(uv''-u''v)}{(uv'-u'v)^2}y^2.
\end{aligned}
$$

Ora da una parte si ha ovviamente che

$$(8)\quad (uv'''-u'''v)(u'v''-u''v')+(u''v'''-u'''v'')(uv'-u'v)$$
$$-(u'v'''-u'''v')(uv''-u''v)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u & v & u & v \\ u' & v' & u' & v' \\ u'' & v'' & u'' & v'' \\ u''' & v''' & u''' & v''' \end{vmatrix}=0,$$

mentre, d'altra parte, sottraendo dalla prima delle (5) moltiplicata per $v'$ la seconda moltiplicata per $u'$, si ottiene una relazione, che, risoluta rispetto a $\bar{\theta}_0$, dà

$$(9)\quad \bar{\theta}_0=\bar{\theta}_2\frac{u'v^{IV}-u^{IV}v'}{uv'-u'v}+2\bar{\theta}_2'\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}+\bar{\theta}_2''\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}-\bar{\theta}_1\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}.$$

Ma le (8) e (9) mostrano che l'espressione (7) coincide col primo membro della (6); dunque resta provato, come volevasi, che sussiste l'identità (6).

**5.** Quando, in particolare, la coppia di funzioni $u(x)$, $v(x)$ del numero precedente verifica le condizioni 1ª) e 2ª) del n.° 3, allora risulta che ciascuno dei termini che compaiono nella (6) è funzione finita e continua di $x$, nell'intervallo $(x_1, x_2)$.

Infatti, in primo luogo, al secondo membro della (6) resta soltanto il primo termine, perchè l'altro termine è identicamente zero, in base alla (4). In secondo luogo, si ha che, nei punti interni a $(x_1, x_2)$, la funzione $uv'-u'v$, che comparisce a denominatore nella (6), è sempre diversa da zero, per la condizione 1ª), mentre negli estremi $x_1$, $x_2$, anche se la funzione $uv'-u'v$ risultasse eguale a zero (ciò che non è escluso dalla condizione 1ª)), nondimeno, è facile verificare che i rapporti

$$(10)\qquad \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v},\quad \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v},\quad \frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}$$

diverrebbero infinitamente grandi di ordine non superiore al primo, al secondo, o al terzo rispettivamente.

A tal fine, si osservi, anzitutto, che

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}(uv'-u'v)=uv''-u''v,\\ &\frac{d^2}{dx^2}(uv'-u'v)=uv'''-u'''v+u'v''-u''v',\\ &\frac{d^3}{dx^3}(uv'-u'v)=uv^{IV}-u^{IV}v+2(u'v'''-u'''v'). \end{aligned}$$

Si noti poi che, affinchè i rapporti (10) possano diventare, per $x\to x_i$, infinitamente grandi di ordine superiore al primo, bisogna, intanto, che la

derivata di $uv' - u'v$ si annulli anch'essa in $x_i$; bisogna, cioè, che si abbia

$$(12)\quad u(x_i)\,v'(x_i) - u'(x_i)\,v(x_i) = 0, \quad u(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v(x_i) = 0;$$

e, in tal caso, poichè $\bar{\theta}_2(x_i)$ non può essere nulla, si deduce dalla (4) che

$$(13)\quad [u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)] - [u(x_i)\,v'''(x_i) - u'''(x_i)\,v(x_i)] = 0,$$

onde risulta, per la seconda delle (11),

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}(uv' - u'v)\right]_{x=x_i} = 2\,[u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)].$$

6. Ciò posto, si supponga, in primo luogo, che valgano le (12), ma che sia

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}(uv' - u'v)\right]_{x=x_i} = 2\,[u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)] \neq 0.$$

Si ha, allora, che i rapporti (10) sono infiniti di ordine non superiore a due, per $x \to x_i$; ma, più precisamente, si può stabilire che $\frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}$ è infinito di prim'ordine, poichè

$$\lim_{x\to x_i}\left((x - x_i)\frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}\right) = \lim_{x\to x_i}\frac{\dfrac{uv'' - u''v}{x - x_i}}{\dfrac{uv' - u'v}{(x - x_i)^2}} = \frac{\left[\dfrac{d}{dx}(uv'' - u''v)\right]_{x=x_i}}{\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}(uv' - u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$= 2\,\frac{u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)}{u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)} = 2.$$

Si supponga, in secondo luogo, che, oltre alle (12), si abbia anche

$$(14)\quad \left[\frac{d^2}{dx^2}(uv' - u'v)\right]_{x=x_i} = 2\,[u'(x_i)\,v''(x_i) - u''(x_i)\,v'(x_i)] = 0,$$

da cui discende pure, per la (13),

$$(15)\qquad u(x_i)\,v'''(x_i) - u'''(x_i)\,v(x_i) = 0;$$

in tal caso, bisogna che $u(x_i)$ e $v(x_i)$ siano entrambi nulli, perchè altrimenti dalle (12) e (15) seguirebbe l'esistenza di una combinazione lineare $c_1\,u(x) + c_2\,v(x)$, non identicamente nulla in $(a, b)$, ma nulla in $x_i$, insieme con le derivate dei primi tre ordini, ciò che è impossibile.

Se, sussistendo la (14), si suppone, nondimeno, che sia

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}(uv' - u'v)\right] = 2\,[u'(x_i)\,v'''(x_i) - u'''(x_i)\,v'(x_i)] \neq 0,$$

si avrà che i tre rapporti in esame sono infiniti di ordine non superiore a tre per $x \to x_i$; ma, più precisamente, si riconosce che $\frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}$ è infinito

di prim'ordine e $\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}$ è infinito di second'ordine, poichè

$$\lim_{x\to x_i}\left((x-x_i)\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}\right)=\lim_{x\to x_i}\frac{\frac{uv''-u''v}{(x-x_i)^2}}{\frac{uv'-u'v}{(x-x_i)^3}}=\frac{\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(uv''-u''v)\right]_{x=x_i}}{\left[\frac{1}{6}\frac{d^3}{dx^3}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$=3\frac{u'(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v'(x_i)}{u'(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v'(x_i)}=3,$$

$$\lim_{x\to x_i}\left((x-x_i)^2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}\right)=\lim_{x\to x_i}\frac{\frac{u'v''-u''v'}{x-x_i}}{\frac{uv'-u'v}{(x-x_i)^3}}=\frac{\left[\frac{d}{dx}(u'v''-u''v')\right]_{x=x_i}}{\left[\frac{1}{6}\frac{d^3}{dx^3}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$=3\frac{u'(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v'(x_i)}{u'(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v'(x_i)}=3.$$

Si supponga, infine, che, oltre alle (12), (14), si abbia anche

$$(16)\qquad \left[\frac{d^3}{dx^3}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}=2\left[u'(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v'(x_i)=0.\right.$$

In tal caso, io dico, anzitutto, che dovrà essere

$$(17)\qquad u(x_i)=v(x_i)=u'(x_i)=v'(x_i)=0.$$

Che, invero, $u(x_i)$ e $v(x_i)$ debbano essere nulli, si è già dimostrato, mentre poi, se $u'(x_i)$ e $v'(x_i)$ non fossero anch'essi entrambi nulli, dalle (14) e (16) seguirebbe l'esistenza di una combinazione lineare $c_1u(x)+c_2v(x)$ non identicamente nulla in $(a,b)$, ma nulla in $x_i$, insieme con le derivate dei primi tre ordini, ciò che è impossibile.

Dopo di che, per questa medesima ragione, dovrà essere

$$(18)\qquad u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)\neq 0.$$

Dalle (17) segue che, nel punto $x_i$, esiste la derivata quarta di $uv'-u'v$ (la quale, in generale, può, beninteso, non esistere negli altri punti di $(a,b)$). Si ha, infatti,

$$\lim_{x\to x_i}\left(\frac{1}{x-x_i}\frac{d^3}{dx^3}(uv'-u'v)\right)$$

$$=2\left[\lim_{x\to x_i}\frac{u'(x)}{x-x_i}v'''(x)-\lim_{x\to x_i}\frac{v'(x)}{x-x_i}u'''(x)\right]+\lim_{x\to x_i}\frac{u(x)}{x-x_i}v^{IV}(x)-\lim_{x\to x_i}\frac{v(x)}{x-x_i}u^{IV}(x)$$

$$=2\left[u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''x_i)\right];$$

sicchè la (18) assicura inoltre che la derivata quarta di $uv'-u'v$ in $x_i$ è diversa da zero.

Pertanto, nell'ultima ipotesi fatta, sussistono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to x_i}\left((x-x_i)\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}\right)=\lim_{x\to x_i}\frac{\dfrac{uv''-u''v}{(x-x_i)^3}}{\dfrac{uv'-u'v}{(x-x_i)^4}}=\frac{\left[\dfrac{1}{6}\dfrac{d^3}{dx^3}(uv''-u''v)\right]_{x=x_i}}{\left[\dfrac{1}{24}\dfrac{d^4}{dx^4}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$=4\,\frac{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}=4,$$

$$\lim_{x\to x_i}\left((x-x_i)^2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}\right)=\lim_{x\to x_i}\frac{\dfrac{u'v''-u''v'}{(x-x_i)^2}}{\dfrac{uv'-u'v}{(x-x_i)^4}}=\frac{\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}(u'v''-u''v')\right]_{x=x_i}}{\left[\dfrac{1}{24}\dfrac{d^4}{dx^4}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$=6\,\frac{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}=6,$$

$$\lim_{x\to x_i}\left((x-x_i)^3\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}\right)=\lim_{x\to x_i}\frac{\dfrac{u'v'''-u'''v'}{x-x_i}}{\dfrac{uv'-u'v}{(x-x_i)^4}}=\frac{\left[\dfrac{d}{dx}(u'v'''-u'''v')\right]_{x=x_i}}{\left[\dfrac{1}{24}\dfrac{d^4}{dx^4}(uv'-u'v)\right]_{x=x_i}}$$

$$=12\,\frac{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}{u''(x_i)v'''(x_i)-u'''(x_i)v''(x_i)}=12.$$

Con ciò resta provato in ogni caso, come si voleva, che $\dfrac{uv''-u''v}{uv'-u'v}$, $\dfrac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}$, $\dfrac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}$ sono, per $x\to x_i$, al più infiniti di primo, di secondo, di terz'ordine rispettivamente.

**7.** D'altra parte, si noti che, per le ipotesi fatte in principio del numero precedente sulla funzione $y(x)$, questa risulterà infinitesima almeno di second'ordine, mentre la sua derivata prima riuscirà infinitesima almeno di prim'ordine, per $x\to x_i$.

Pertanto, anche quando $uv'-u'v$ si annulla in un estremo $x_i$ dell'intervallo $(x_1, x_2)$, le due espressioni frazionarie

$$\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y', \qquad \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}y,$$

che figurano al primo membro della (6), serbano sempre, pure in quel punto $x_i$, un valore finito, poichè ciascuna di esse, per $x\to x_i$, risulta il prodotto di un infinitamente grande per un infinitesimo dello stesso ordine. E così analogamente risulterà ancora, per quanto si è visto,

$$(19)\qquad \left[\bar\theta_2'\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}y^2+\bar\theta_2\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}y^2-2\bar\theta_2\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}yy'\right.$$

$$\left.+\bar\theta_2\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y'^2\right]_{x=x_i}=0,$$

poichè, per $x \to x_i$, ciascuno dei quattro termini che compongono quest'espressione è infinitesimo.

Ciò posto, si moltiplichi per $dx$ l'identità (6) e si integri poi fra $x_1$ e $x_2$, tenendo conto delle relazioni (4) e (19). Si otterrà in tal modo la nuova identità fondamentale

$$(20)\qquad \int_{x_1}^{x_2} (\bar\theta_2 y''^2 + \bar\theta_1 y'^2 + \bar\theta_0 y^2)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar\theta_2 \left(y'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}y\right)^2 dx = 0.$$

8. Ove poi, più particolarmente, si supponga, come al n.° 2, che la funzione $y(x)$, oltre alle condizioni (2), verifichi anche l'equazione (II), allora, oltre alla (20), varrà pure l'identità (3). Sottraendo, in tale ipotesi, la (20) dalla (3), si ottiene finalmente l'identità di Picone:

$$(21)\qquad \int_{x_1}^{x_2} (\theta_2 - \bar\theta_2)\,y''^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} (\theta_1 - \bar\theta_1)\,y'^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} (\theta_0 - \bar\theta_0)\,y^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \bar\theta_2 \left(\frac{\begin{vmatrix} y & u & v \\ y' & u' & v' \\ y'' & u'' & v'' \end{vmatrix}}{uv'-u'v}\right)^2 dx = 0.$$

Si consideri ora, in primo luogo, il caso che $\bar\theta_0(x)$, $\bar\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ non coincidano rispettivamente in $(x_1, x_2)$ con $\theta_0(x), \theta_1(x), \theta_2(x)$. Le disuguaglianze (1) mostrano allora che la (21) può sussistere solo a patto che si annullino separatamente tutti e quattro gl'integrali di cui è somma il primo membro di essa, dato che nessuno di codesti integrali può essere negativo, avendo per funzione integranda una funzione sempre positiva o nulla; bisogna dunque che la funzione $y(x)$ sia identicamente nulla in $(x_1, x_2)$, e quindi anche in $(a, b)$.

Pertanto, se è possibile che l'integrale $y(x)$ della (II) verificante le (2) non sia identicamente zero in $(x_1, x_2)$, non potrà sussistere la relazione (21), onde, in tal caso, non sarà possibile che la coppia d'integrali $u(x), v(x)$ della (I) verifichi entrambe le condizioni 1ª) e 2ª) del n.° 3, in base alle quali si è dimostrata la (6), e quindi le (20) e (21). Ciò che si può enunciare col seguente teorema

I. *Quando l'equazione* (II) *non coincide con la* (I) *ed esiste un integrale* $y(x)$ *della* (II), *dotato di due zeri doppi in due punti distinti* $x_1, x_2$ *di* $(a, b)$ *e non identicamente nullo in* $(x_1, x_2)$, *allora dalle disuguaglianze* (1) *si deduce che, detta* $u(x), v(x)$ *una coppia qualsiasi d'integrali della* (I), *se* $u(x)$ *e* $v(x)$ *verificano, in un punto fissato ad arbitrio in* $(a, b)$, *la*

*relazione* (4), *il loro wronskiano* $W[u(x), v(x)]$ *si annulla in un punto almeno, interno all'intervallo* $(x_1, x_2)$, *e se il wronskiano* $W[u(x), v(x)]$ *non ha zeri interni a* $(x_1, x_2)$, $u(x)$ *e* $v(x)$ *non possono verificare la relazione* (4), *in nessun punto di* $(a, b)$.

Questo è il teorema fondamentale di confronto, per le equazioni differenziali lineari autoaggiunte del quart'ordine.

Si consideri, in secondo luogo, il caso in cui $\bar{\theta}_0(x), \bar{\theta}_1(x), \bar{\theta}_2(x)$ coincidano rispettivamente in $(x_1, x_2)$ con $\theta_0(x), \theta_1(x), \theta_2(x)$. Quando ciò accade, mancano nella (21) i primi tre integrali, per ciascuno dei quali la funzione integranda diviene identicamente nulla nell'intervallo d'integrazione. Ed allora, poichè $\bar{\theta}_2(x)$ è sempre positiva, la stessa identità (21) mostra che deve essere identicamente nullo in $(x_1, x_2)$ il wronskiano $W[y(x), u(x), v(x)]$, cioè che la funzione $y(x)$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle $u(x), v(x)$. Pertanto, se $y(x)$ non è una tale combinazione lineare, vuol dire che non possono essere compatibili le ipotesi 1ª) e 2ª) del n.° 3, dalle quali si deduce l'identità (21); onde si conclude che

II. *Se esiste un integrale* $y(x)$ *della* (I), *dotato di due zeri doppi in due punti distinti* $x_1, x_2$ *di* $(a, b)$ *e non identicamente nullo in* $(x_1, x_2)$, *allora, detta* $u(x), v(x)$ *una coppia d'integrali della stessa equazione* (I) *linearmente indipendenti da* $y(x)$, *se* $u(x)$ *e* $v(x)$ *verificano, in un punto fissato ad arbitrio in* $(a, b)$, *la relazione* (4), *il loro wronskiano* $W[u(x), v(x)]$ *si annulla in un punto almeno, interno all'intervallo* $(x_1, x_2)$, *e se il wronskiano* $W[u(x), v(x)]$ *non ha zeri interni a* $(x_1, x_2)$, $u(x)$ *e* $v(x)$ *non possono verificare la relazione* (4), *in nessun punto di* $(a, b)$.

## § 2.

## Teorema di oscillazione.

**9.** Dal teorema I, di cui si è conseguita la dimostrazione al paragrafo precedente, si possono facilmente dedurre notevoli proprietà degl'integrali dell'equazione (I), confrontando tale equazione con un'altra a coefficienti costanti. Per dare una prova di ciò, converrà porsi nelle seguenti condizioni.

Sia data un'equazione differenziale lineare autoaggiunta del quart'ordine, i cui coefficienti $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ contengano, oltre alla $x$, anche un parametro reale variabile $\lambda$ e, per ogni valore di $\lambda$, verifichino le stesse ipotesi indicate al n.° 1 pei coefficienti della (I). Sia

$$(\mathrm{I}_\lambda) \qquad D_\lambda y = \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta_2(x,\lambda)\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\theta_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) + \theta_0(x,\lambda)\,y = 0$$

una tale equazione; si supponga inoltre che, per ogni valore di $x$ nell'intervallo $(a, b)$, le funzioni $\theta_0(x, \lambda), \theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)$ rendano soddis-

fatte le disuguaglianze

$$(22)\qquad \begin{gathered} P_0(\lambda) \geqq -\theta_0(x,\lambda) \geqq p_0(\lambda), \qquad P_1(\lambda) \geqq -\theta_1(x,\lambda) \geqq p_1(\lambda), \\ P_2(\lambda) \geqq \theta_2(x,\lambda) \geqq p_2(\lambda) > 0, \end{gathered}$$

e che, al divergere di $\lambda$, sussistano le relazioni di limite

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty} p_0(\lambda) = +\infty, \qquad &&\lim_{\lambda\to\infty}' p_1(\lambda) > -\infty, \\ &\lim_{\lambda\to\infty}' P_2(\lambda) > 0, \qquad &&\lim_{\lambda\to\infty}'' P_2(\lambda) < +\infty, \text{ [11]} \end{aligned}$$

oppure le altre

$$(23')\qquad \begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty}' p_0(\lambda) > -\infty, \qquad &&\lim_{\lambda\to\infty} p_1(\lambda) = +\infty, \\ &\lim_{\lambda\to\infty}' P_2(\lambda) > 0, \qquad &&\lim_{\lambda\to\infty}'' P_2(\lambda) < +\infty. \end{aligned}$$

In tali ipotesi, si confronterà l'equazione $(I_\lambda)$ con la seguente

$$(II_\lambda)\qquad P_2(\lambda)\,y^{IV} + p_1(\lambda)\,y'' - p_0(\lambda)\,y = 0,$$

allo stesso modo come si è fatto nel paragrafo prec.. per le due equazioni (I) e (II).

Prima, però, di procedere al confronto, che avrà luogo nel n.° 11, sarà bene premettere alcune osservazioni sulla $(II_\lambda)$ e sul comportamento dei suoi integrali, al divergere del parametro $\lambda$.

**10.** La $(II_\lambda)$ è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, e pertanto si può sùbito integrare.

Basterà porre, indicando con $\alpha_1, \alpha_2$, per valori di $\lambda$ sufficientemente grandi, due funzioni reali positive di $\lambda$,

$$\alpha_1^2 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4\,p_0 P_2}}{2P_2} > 0, \qquad -\alpha_2^2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4\,p_0 P_2}}{2P_2} < 0;$$

e l'integrale generale della $(II_\lambda)$ si scriverà

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{-\alpha_1 x} + c_3 \cos\alpha_2 x + c_4 \operatorname{sen}\alpha_2 x.$$

Si noti che, tanto dalle (23) quanto dalle (23'), discende la relazione di limite

$$(24)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} \alpha_2(\lambda) = +\infty.$$

Bisogna ora indagare se può esistere un integrale $y(x)$ della $(II_\lambda)$ e una coppia di punti distinti $x_1, x_2$ dell'intervallo $(a, b)$, tali che $y(x)$ abbia due zeri doppi nei punti $x_1, x_2$, senza essere identicamente nulla in $(x_1, x_2)$, ciò che si era ammesso, nell'ipotesi del teorema I, relativamente all'equazione (II) del n.° 1.

---

[11]) Secondo le notazioni adottate da Picone nelle sue Lezioni di Analisi infinitesimale (Catania, 1923), adopero i simboli lim', lim'', per indicare il minimo limite e il massimo limite, rispettivamente.

Siano dunque, se è possibile, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ quattro quantità non tutte nulle e tali che l'integrale

$$\gamma_1 e^{\alpha_1(x-x_1)} + \gamma_2 e^{-\alpha_1(x-x_1)} + \gamma_3 \cos\alpha_2(x-x_1) + \gamma_4 \operatorname{sen}\alpha_2(x-x_1)$$

si annulli insieme con la derivata prima nel punto $x = x_1$ e nel punto $x = x_2$. Ciò si esprime scrivendo che

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0,$$

$$\alpha_1\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_4 = 0,$$

$$\gamma_1 e^{\alpha_1(x_2-x_1)} + \gamma_2 e^{-\alpha_1(x_2-x_1)} + \gamma_3 \cos\alpha_2(x_2-x_1) + \gamma_4 \operatorname{sen}\alpha_2(x_2-x_1) = 0,$$

$$\alpha_1\gamma_1 e^{\alpha_1(x_2-x_1)} - \alpha_1\gamma_2 e^{-\alpha_1(x_2-x_1)} - \alpha_2\gamma_3 \operatorname{sen}\alpha_2(x_2-x_1) + \alpha_2\gamma_4 \cos\alpha_2(x_2-x_1) = 0.$$

Ma questo è un sistema di quattro equazioni lineari omogenee in $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Pertanto queste costanti riusciranno non tutte nulle, quando, e solo quando, risulti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ e^{\alpha_1(x_2-x_1)} & e^{-\alpha_1(x_2-x_1)} & \cos\alpha_2(x_2-x_1) & \operatorname{sen}\alpha_2(x_2-x_1) \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(x_2-x_1)} & -\alpha_1 e^{-\alpha_1(x_2-x_1)} & -\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_2(x_2-x_1) & \alpha_2\cos\alpha_2(x_2-x_1) \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quando, e solo quando, $x_2$ sia una radice dell'equazione

$$(25)\quad (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)(e^{\alpha_1(x-x_1)} - e^{-\alpha_1(x-x_1)}) \operatorname{sen}\alpha_2(x-x_1) + 2\alpha_1\alpha_2 (e^{\alpha_1(x-x_1)} + e^{-\alpha_1(x-x_1)}) \cos\alpha_2(x-x_1) - 4\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

che si ottiene dalla precedente, sviluppando e riducendo.

Ora, ponendo nel primo membro della (25) una volta $x = x_1 + \frac{\pi}{\alpha_2}$ e un'altra volta $x = x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_2}$, si ottiene rispettivamente

$$-2\alpha_1\alpha_2\left(e^{\pi\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + e^{-\pi\frac{\alpha_1}{\alpha^2}}\right) - 4\alpha_1\alpha_2 < 0,$$

$$2\alpha_1\alpha_2\left(e^{2\pi\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + e^{-2\pi\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) - 4\alpha_1\alpha_2 > 0.$$

Quindi certamente esisterà una radice $x_2$, diversa da $x_1$, della (25), nell'interno dell'intervallo $\left(x_1 + \frac{\pi}{\alpha_2}, x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$. E pertanto, poichè $x_1$ era un punto arbitrario dell'asse $x$, si può affermare che, comunque si prenda un intervallo di ampiezza non inferiore a $\frac{2\pi}{\alpha_2}$, esiste sempre una coppia $x_1, x_2$ di punti distinti, interni a tale intervallo, nei quali si annulla, insieme con la prima derivata, un integrale della $(II_1)$, non identicamente nullo.

**11.** Ciò posto, comunque si assegni un numero intero positivo $\nu$, si può sempre, in virtù della (24), determinare un valore $\lambda_\nu$ di $\lambda$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda_\nu$, si abbia

$$\alpha_2 \geqq \frac{2\pi\nu}{b-a},$$

cosicchè, per quanto si è concluso nel numero precedente, dividendo l'intervallo $(a, b)$ in $\nu$ intervalli parziali, ciascuno di ampiezza $\frac{b-a}{\nu}$, si può essere sicuri che, in ognuno di codesti intervalli parziali, cadrà almeno una coppia di punti distinti $x_1, x_2$, tali che esista un integrale non identicamente nullo della $(\mathrm{II}_\lambda)$, dotato in essi di due zeri doppi.

Ma allora, si applichi il teorema I alle due equazioni $(\mathrm{I}_\lambda)$ e $(\mathrm{II}_\lambda)$ del n.° 9, invece che alle (I) e (II) del n.° 1, ciò che può farsi, poichè le (22) mostrano che fra i coefficienti della $(\mathrm{I}_\lambda)$ e quelli della $(\mathrm{II}_\lambda)$ corrono le stesse relazioni di disuguaglianza, che sono espresse dalle (1), pei coefficienti della (I) e della (II).

In base al teorema I, si può affermare che ogni coppia $u(x), v(x)$ d'integrali della $(\mathrm{I}_\lambda)$ che renda soddisfatta la (4) ha per wronskiano una funzione che si annulla almeno una volta, in ciascuno dei $\nu$ intervalli parziali in cui è stato decomposto l'intervallo $(a, b)$; sicchè resta provato che codesto wronskiano si annulla in tutto almeno $\nu$ volte, nell'intervallo $(a, b)$.

Analogamente, comunque si assegni un intervallo non nullo $(a_1, b_1)$ contenuto in $(a, b)$, si può sempre, in virtù della (24), determinare un valore $\lambda_{a_1 b_1}$ di $\lambda$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda_{a_1 b_1}$, si abbia

$$\alpha_2 \geqq \frac{2\pi}{b_1 - a_1},$$

onde, in base ai risultati del numero precedente, si può affermare che, nell'intervallo $(a_1, b_1)$, è contenuta almeno una coppia di punti distinti $x_1, x_2$, tali che esista un integrale non identicamente nullo della $(\mathrm{II}_\lambda)$, nullo in entrambi insieme con la sua derivata prima.

Ma allora, applicando anche qui il teorema I, si deduce che vi è almeno un punto nell'interno dell'intervallo $(a_1, b_1)$, in cui si annulla il wronskiano di ogni coppia $u(x), v(x)$ d'integrali della $(\mathrm{I}_\lambda)$, che verifichino la (4).

I risultati ottenuti in questo numero si riassumono nel seguente teorema:

III. *Data l'equazione differenziale lineare* $(\mathrm{I}_\lambda)$, *se i coefficienti* $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ *sono funzioni di* $x$ *sottoposte alle stesse ipotesi indicate al n.° 1 pei coefficienti della* (I) *e sono funzioni di* $\lambda$ *sottoposte alle condizioni indicate dalle* (22) *e* (23), *oppure dalle* (22) *e* (23′), *allora, comunque si assegni*

*un numero intero e positivo $\nu$, esisterà un valore $\lambda_\nu$ di $\lambda$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda_\nu$, il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ di ogni coppia d'integrali $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$ della $(I_\lambda)$, verificanti, in un punto fissato ad arbitrio in $(a, b)$, la relazione (4), si annulli almeno $\nu$ volte in $(a, b)$. Inoltre, comunque si assegni un intervallo non nullo $(a_1, b_1)$ contenuto in $(a, b)$, esisterà un valore $\lambda_{a_1 b_1}$ di $\lambda$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda_{a_1 b_1}$, il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ si annulli almeno una volta nell'interno di $(a_1, b_1)$.*

Questo teorema è l'analogo, per l'equazione autoaggiunta del quart'ordine, del famoso teorema di oscillazione di Sturm, per le equazioni di second'ordine.

**12.** Si noti ancora che, se $u(x), v(x)$ sono due integrali della $(I_\lambda)$, dotati entrambi di uno zero doppio in un punto $x_1$ dell'intervallo $(a, b)$, essi verificano certamente la relazione (4) nel punto $x_1$, in cui sono tutte nulle allo stesso tempo le $u, v, u', v'$. Ora, se, in un altro punto $x_2$ dell'intervallo $(a, b)$, è nullo il wronskiano $W[u(x), v(x)]$, cioè se si ha

$$u(x_2)\, v'(x_2) - u'(x_2)\, v(x_2) = 0,$$

esisterà un integrale $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ della $(I_\lambda)$, combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$, nullo insieme con la prima derivata in entrambi i punti $x_1$ e $x_2$.

Pertanto dalla seconda parte del teorema III si deduce il seguente corollario:

IV. *Nelle stesse ipotesi del teorema* III, *comunque si assegni un intervallo non nullo $(a_1, b_1)$ contenuto in $(a, b)$, esisterà un valore $\lambda_{a_1 b_1}$ di $\lambda$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda_{a_1 b_1}$, si possa determinare un integrale particolare $w(x, \lambda)$ della $(I_\lambda)$, dotato di due zeri doppi in $(a_1, b_1)$.*

La validità di questa proposizione è stata già verificata al n.° 10, nel caso particolare dell'equazione a coefficienti costanti.

## § 3.

## Teorema di separazione.

**13.** Le proposizioni dedotte nel paragrafo prec. sono conseguenza del primo dei due teoremi fondamentali dimostrati al n.° 8. In questo paragrafo, invece, riprendendo in esame l'equazione (I), in cui i coefficienti non contengono $\lambda$, si trarranno alcune notevoli conseguenze dall'altro teorema fondamentale del n.° 8. Sebbene si tratti di cosa ovvia, sarà utile rilevare esplicitamente che:

V. *Tre integrali $u(x), v(x), w(x)$ della* (I), *dotati tutti e tre di uno zero doppio in un punto qualsiasi $\xi$ di $(a, b)$, non possono essere linearmente indipendenti in $(a, b)$.*

Infatti, se $u(x), v(x), w(x)$ fossero linearmente indipendenti in $(a, b)$, dette $c_1, c_2, c_3$ tre costanti non tutte nulle, soluzioni del sistema

$$c_1 u''(\xi) + c_2 v''(\xi) + c_3 w''(\xi) = 0,$$
$$c_1 u'''(\xi) + c_2 v'''(\xi) + c_3 w'''(\xi) = 0,$$

allora l'integrale $c_1 u(x) + c_2 v(x) + c_3 w(x)$ della (I), non identicamente nullo in $(a, b)$ (chè altrimenti $u(x), v(x), w(x)$ sarebbero linearmente dipendenti contro all'ipotesi), sarebbe nullo, insieme con le derivate dei primi tre ordini, nel punto $x = \xi$; e ciò è impossibile.

**14.** Si può ora immediatamente dimostrare il lemma seguente:

VI. *Non possono esservi, nell'intervallo finito* $(a, b)$, *infiniti punti* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *tali che, comunque si prenda uno* $x_i$ *di essi, diverso da* $x_1$, *esista un integrale non identicamente nullo* $y_i(x)$ *della* (I), *dotato di due zeri doppi nei punti* $x_1$ *e* $x_i$.

Infatti, se esiste un integrale $y_i(x)$ della (I), il quale verifichi le condizioni

$$(26) \qquad y_i(x_1) = y_i'(x_1) = 0, \quad y_i(x_i) = y_i'(x_i) = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

detta $u(x), v(x)$ una coppia d'integrali, che siano non coincidenti a meno di un fattore costante e siano dotati entrambi di uno zero doppio nel punto $x_1$, si ha anzitutto, per la proposizione del numero precedente, che la $y_i(x)$ dovrà essere una combinazione lineare a coefficienti costanti di $u(x)$ e $v(x)$.

Dopo di che, se risulta, per ogni valore di $i = 2, 3, \ldots$, indicando con $c_{i1}, c_{i2}$ due costanti non entrambi nulle,

$$y_i(x) = c_{i1} u(x) + c_{i2} v(x),$$

sarà ancora, in base alle (26),

$$c_{i1} u(x_i) + c_{i2} v(x_i) = 0, \quad c_{i1} u'(x_i) + c_{i2} v'(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

e pertanto, poichè $c_{i1}$ e $c_{i2}$ non sono entrambi nulle, dovrà, in conclusione, risultare

$$\begin{vmatrix} u(x_i) & v(x_i) \\ u'(x_i) & v'(x_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ma ciò prova appunto, come si voleva, che i punti $x_i$ non possono essere in numero infinito, poichè, com'è noto[13]), il wronskiano di $k$ integrali linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea di ordine $n \geqq k$ non può avere un numero infinito di zeri in un intervallo finito.

---

[13]) M. Bôcher, On wronskians of functions of a real variable, Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1901), p. 53.

**15.** Si può infine dimostrare per l'equazione (I) un teorema analogo al teorema di Sturm sulla separazione degli zeri consecutivi degl'integrali di un'equazione lineare omogenea del second'ordine.

Però, nel caso dell'equazione di quart'ordine, che ora si considera, invece che zeri semplici dell'integrale, si prenderanno in esame *zeri doppi*.

*Due zeri doppi* $x_1, x_2$ (*con* $x_1 < x_2$) *di un integrale* $y(x)$ *della* (I) *si chiameranno semplicemente consecutivi, quando non soltanto codesto integrale* $y(x)$ *non possiede nessun altro zero doppio nell'intervallo* $(x_1, x_2)$, *ma non esiste neppure nessun altro integrale della* (I), *non identicamente nullo in* $(a, b)$, *dotato di uno zero doppio in* $x_1$ *e di un altro zero doppio in un punto interno a* $(x_1, x_2)$.

Siano ora $x_1, x_2, \ldots$ punti di $(a, b)$, tali che ogni coppia $x_i, x_{i+1}$ (per $i = 1, 2, \ldots$) sia una coppia di zeri doppi consecutivi per un integrale $y_i(x)$ della (I) (non necessariamente lo stesso integrale per ogni coppia).

Quanto si è detto nel numero precedente assicura che i punti $x_1, x_2, \ldots$ sono al più in numero finito. Infatti, si fissi un punto $\xi$ ad arbitrio in $(a, b)$, non interno a nessuno degli intervalli $(x_i, x_{i+1})$, e si scelgano due integrali $u(x), v(x)$, linearmente indipendenti in $(a, b)$, nulli insieme con la prima derivata nel punto $x = \xi$. Allora, se $u(x), v(x), y_i(x)$ sono linearmente indipendenti in $(a, b)$, poichè, d'altra parte, $u(x)$ e $v(x)$ verificano la (4) nel punto $\xi$ e $y_i(x)$ ha due zeri doppi in $x_i, x_{i+1}$, si potrà applicare il teorema II, dal quale risulta che il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ si annulla, oltre che in $\xi$, in un punto almeno, interno a $(x_i, x_{i+1})$; se invece $y_i(x)$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti in $(a, b)$ di $u(x)$ e $v(x)$, dal fatto che $y_i(x)$ ha due zeri doppi in $x_i, x_{i+1}$ si dedurrà che il medesimo wronskiano $W[u(x), v(x)]$ deve annullarsi in entrambi i punti $x_i, x_{i+1}$.

Insomma, in ogni intervallo $(x_i, x_{i+1})$, o nell'interno o negli estremi, si annulla il wronskiano $W[u(x), v(x)]$. E ciò prova, pel numero precedente, che i punti $x_i$ possono essere, come si è detto, al più in numero finito $n$. Risulterà inoltre

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b.$$

Di più, si supponga che non vi sia nessun punto $x_{n+1}$ diverso da $x_n$ in $(x_n, b)$, tale che esista un integrale della (I) avente una coppia di zeri doppi in $x_n, x_{n+1}$, e analogamente che non vi sia nessun punto $x_0$ diverso da $x_1$ in $(a, x_1)$, tale che esista un integrale della (I) avente una coppia di zeri doppi in $x_0, x_1$.

D'altra parte, siano $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ altri punti di $(a, b)$, che verifichino anch'essi tutte le ipotesi ora fatte sugli $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si noti che, quando si faccia soltanto l'ipotesi $\xi_1 \neq x_1$, segue che sarà pure $\xi_2 \neq x_2$, $\xi_3 \neq x_3$, ..., mentre invece, se fosse $\xi_1 = x_1$ sarebbe pure, di conseguenza, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$, .... Infatti, se, per un certo indice $i$, risultasse $\xi_i = x_i$ e $\xi_{i+1} \neq x_{i+1}$, p. es. $\xi_{i+1} < x_{i+1}$, allora, esistendo un integrale dotato di due zeri doppi uno in $\xi_i = x_i$ e l'altro in $\xi_{i+1}$, che è interno a $(x_i, x_{i+1})$, si dedurrebbe che $x_i, x_{i+1}$ non sono zeri doppi consecutivi, nel senso attribuito più sopra a quest'espressione, ciò che è contrario alla ipotesi fatta.

**16.** Premesso questo e supposto che $m$ ed $n$ siano ciascuno almeno eguale a 2, si può facilmente dimostrare che *ogni intervallo* $(x_i, x_{i+1})$ *contiene, nell'interno, uno ed un solo punto* $\xi_j$ *e viceversa ogni intervallo* $(\xi_j, \xi_{j+1})$ *contiene, nell'interno, uno ed uno solo dei punti* $x_i$.

Infatti, si supponga, per fissare le idee, che sia $x_1 < \xi_1$. Si può allora provare anzitutto che non può essere anche $x_2 < \xi_2$. E invero, se fosse $x_1 < x_2 < \xi_1$, detti $u(x), v(x)$ due integrali linearmente indipendenti della (I), dotati entrambi di uno zero doppio in $\xi_1$, o $y_1(x)$ risulterebbe una combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$ in $(a, b)$, e in tal caso, poichè essa ha due zeri doppi in $x_1$ e $x_2$, il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ dovrebb'essere nullo in $x_1$ e $x_2$; oppure $y_1(x), u(x), v(x)$ risulterebbero linearmente indipendenti in $(a, b)$, e in tal caso, poichè $u(x)$ e $v(x)$ verificano, per $x = \xi_1$, la (4), si potrebbe applicare il teorema II, dal quale si dedurrebbe che il medesimo wronskiano $W[u(x), v(x)]$ dev'essere nullo in un punto almeno, interno a $(x_1, x_2)$. Insomma, se $x_1 < x_2 < \xi_1$, bisogna, ad ogni modo, che il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ sia nullo in un punto almeno $\xi_0$, diverso da $\xi_1$ e contenuto in $(a, \xi_1)$, ciò che porta di conseguenza l'esistenza di un integrale, combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$, dotato di due zeri doppi in $\xi_0$ e $\xi_1$. Ma l'esistenza di un tale integrale è esclusa dalle ipotesi fatte al numero precedente sui punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; dunque resta provato che dev'essere intanto $x_1 < \xi_1 < x_2$.

Per completare la dimostrazione del teorema, si ragionerà per induzione: cioè si ammetterà che, per un dato valore dell'indice $i$, sia $\xi_{i-1}$ interno all'intervallo $(x_{i-1}, x_i)$ e si proverà che anche $\xi_i$ dev'essere interno all'intervallo $(x_i, x_{i+1})$.

Ora, se $\xi_i$ non è interno a $(x_i, x_{i+1})$, poichè, come si è osservato, è $\xi_i \neq x_i$, o risulterà $\xi_i < x_i$, oppure $\xi_i \geqq x_{i+1}$. Quindi bisogna mostrare che, in base alle ipotesi fatte al numero precedente, nè l'una nè l'altra di queste due alternative può effettivamente presentarsi, ciò che riesce molto agevolmente, ripetendo sempre il sòlito ragionamento.

Se risulta $\xi_{i-1} < x_i < x_{i+1} \leqq \xi_i$, detti $u(x), v(x)$ due integrali della (I), linearmente indipendenti in $(a, b)$, dotati entrambi di uno zero doppio

in $\xi_{i-1}$, o $y_i(x)$ sarà una combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$ in $(a, b)$, e allora il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ si annullerà in $x_i$ e $x_{i+1}$, poichè in tali punti $y_i(x)$ è nulla insieme con la prima derivata, oppure $y_i(x), u(x), v(x)$ saranno linearmente indipendenti in $(a, b)$, e allora, poichè $u$ e $v$ verificano la (4) nel punto $\xi_{i-1}$, potrà applicarsi il teorema II, dal quale si dedurrà che il medesimo wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$ deve annullarsi in un punto almeno, interno all'intervallo $(x_i, x_{i+1})$. Insomma, in ogni caso, il wronskiano $W[u(x), v(x)]$ si annullerà almeno in un punto $\xi$, contenuto in $(x_i, x_{i+1})$, diverso da $x_{i+1}$, e quindi interno a $(\xi_{i-1}, \xi_i)$; pertanto esisterà un integrale, combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$, dotato di due zeri doppi, uno in $\xi_{i-1}$, dove hanno uno zero doppio anche $u(x)$ e $v(x)$, l'altro nel punto $\xi$, interno a $(\xi_{i-1}, \xi_i)$, in cui è nullo il wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$.

Ma l'esistenza di un tale integrale è esclusa dall'ipotesi fatta che $\xi_{i-1}, \xi_i$ siano zeri doppi consecutivi di un integrale della (I); dunque resta provato che non può essere $x_{i+1} \leqq \xi_i$, cioè, come si voleva dimostrare, dev'essere necessariamente

$$\xi_i < x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

La stessa dimostrazione, ove si scambino soltanto $\xi_{i-1}, \xi_i, x_i, x_{i+1}$ con $x_{i-1}, x_i, \xi_{i-1}, \xi_i$ rispettivamente, prova che non può essere $x_{i-1} < \xi_{i-1} < \xi_i \leqq x_i$, ma dev'essere necessariamente

$$x_i < \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sicchè si conclude, come si era affermato, che il punto $\xi_i$ è interno a $(x_i, x_{i+1})$.

Inoltre, sempre la medesima dimostrazione, ove si scambino soltanto $\xi_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ con $x_n, \xi_n, \xi_{n+1}$ rispettivamente, prova che non può essere $x_n < \xi_n < \xi_{n+1} \leqq b$, perchè, in tal caso, esisterebbe un integrale della (I), dotato di due zeri doppi uno in $x_n$ e l'altro in un punto $x$ contenuto in $(\xi_n, \xi_{n+1})$ e quindi contenuto anche nell'intervallo $(x_n, b)$ aperto a sinistra, ciò che pure contraddice le ipotesi fatte al numero precedente sui punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pertanto risulterà o $m = n$, o $m = n - 1$ e corrispondentemente si avrà che nell'intervallo $(x_n, b)$ o cade uno solo $\xi_n$ dei punti $\xi_j$, o nessuno.

Si ha dunque, in definitiva,

$$a \leqq x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < x_{n-1} < \xi_n \leqq b,$$

dove il punto $\xi_n$ può anche eventualmente mancare.

Si noti ancora che l'ipotesi fatta sui punti $\xi_j$, che essi non coincidano coi punti $x_i$, equivale all'altra che l'integrale $z_j(x)$, per un qualsiasi valore dell'indice $j$, sia linearmente indipendente in $(a, b)$ dall'integrale

$y_i(x)$, per un qualsiasi valore di $i$; perchè, se $y_i(x)$ e $z_j(x)$ fossero linearmente dipendenti in $(a, b)$, essi dovrebbero avere gli stessi zeri, con le stesse molteplicità.

Perciò il teorema dimostrato in questo numero può anche enunciarsi al modo seguente:

VI. *Gli zeri doppi consecutivi* (*nel senso specificato al n.°* 15) *degl' integrali linearmente indipendenti in* $(a, b)$ *dell' equazione differenziale lineare omogenea del quart' ordine* (I) *si separano mutuamente.*

Quest' enunciato, sebbene un poco impreciso, ha però il vantaggio di presentare una perfetta analogia con l' enunciato del teorema di separazione di Sturm, per l' equazione del second' ordine [13]).

## § 4.

## Considerazioni complementari.

**17.** Sarà utile aggiungere ancora alcune osservazioni, le quali contribuiranno a chiarire meglio il significato e la portata dei risultati ottenuti.

Si consideri, per un momento, il caso di un' equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine nell' intervallo $(a, b)$.

Detti $u_1(x)$, $u_2(x)$ due integrali di essa, linearmente indipendenti in $(a, b)$, indicando con $\xi$ un punto scelto arbitrariamente in $(a, b)$ e con $c$ una costante reale qualsiasi, si avrà che tutti e soli gl' integrali della stessa equazione, nulli ciascuno almeno una volta in $(a, b)$, saranno dati dalla espressione

$$(26_1) \qquad c\,w_1(x, \xi) = c \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix},$$

al variare di $c$ e $\xi$.

L' integrale $c\,w_1(x, \xi)$ è nullo nel punto $x = \xi$; esso è identicamente nullo se, e solo se, risulta $c = 0$.

Due integrali $c\,w_1(x, \xi_1)$, $c'w_1(x, \xi_2)$ sono linearmente indipendenti in $(a, b)$, quando, e solo quando, risulta allo stesso tempo

$$c\,w_1(\xi_1, \xi_2) \neq 0, \qquad c'w_1(\xi_1, \xi_2) \neq 0.$$

Nel caso dell' equazione del quart' ordine, di cui ora si tratta, si consideri l' espressione

$$(26_2) \qquad c\,w_2(x, \xi) = c \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) & u_3(\xi) & u_4(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) & u_3'(\xi) & u_4'(\xi) \\ u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x) & u_4'(x) \end{vmatrix},$$

[13]) M. Bôcher, loc. cit. in [8]) p. 46.

ove $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$ indichino quattro integrali linearmente indipendenti in $(a, b)$, mentre $\xi$ sia, come prima, un punto scelto arbitrariamente in $(a, b)$ e $c$ una costante reale qualsiasi.

La $(26_2)$ generalizza, come si vede, in maniera molto semplice e naturale, la $(26_1)$. Ebbene, i risultati conseguiti nei precedenti paragrafi mostrano, come ora si proverà, che la $c\,w_2(x, \xi)$ si comporta in maniera perfettamente analoga alla $c\,w_1(x, \xi)$.

18. È immediato anzitutto che la $c\,w_2(x, \xi)$ si annulla nel punto $x = \xi$ e che essa è identicamente nulla se $c = 0$. È da notare poi che, se è $c \neq 0$ e $x \neq \xi$, allora l'annullarsi di $c\,w_2(x, \xi)$ è la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, di $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$, o, in altri termini, affinchè esista un integrale non identicamente nullo dell'equazione considerata, dotato di due zeri doppi in $\xi$ ed $x$.

Onde segue, per il teorema VI, che, nell'ipotesi fatta $c \neq 0$, non possono esservi infiniti zeri $x_1, x_2, \ldots$ di $c\,w_2(x, \xi)$ in $(a, b)$; e pertanto, anche la $c\,w_2(x, \xi)$ è identicamente nulla in $(a, b)$, quando, e solo quando, risulta $c = 0$.

Per analogia col caso dell'equazione di second'ordine, due funzioni $c\,w_2(x, \xi_1)$, $c'w_2(x, \xi_2)$ si diranno brevemente *indipendenti* [14]), quando, e solo quando, risulti allo stesso tempo

$$c\,w_2(\xi_1, \xi_2) \neq 0, \qquad c'w_2(\xi_1, \xi_2) \neq 0.$$

Si prendano ora nuovamente in esame le due equazioni (I) e (II) del n.° 1, indicando con $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$, $\bar{u}_3(x)$, $\bar{u}_4(x)$ quattro integrali linearmente indipendenti della (I) e con $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$ quattro integrali linearmente indipendenti della (II).

Si faccia l'ipotesi che esista un integrale non identicamente nullo $y(x)$ della (II), dotato di due zeri doppi in $x_1, x_2$. Ciò equivale ad ammettere, come ora si è detto, che sia

$$c\,w_2(x_1, x_2) = 0, \qquad c \neq 0. \tag{27}$$

Il teorema I assicura allora che, detto $\xi_1$ un punto arbitrario di $(a, b)$, il wronskiano di due integrali della (I), dotati entrambi di uno zero doppio in $\xi_1$, si annulla almeno una volta nell'interno di $(x_1, x_2)$: sicchè, o $\xi_1$ è interno a $(x_1, x_2)$, oppure si può essere certi che esiste un punto $\xi_2$ in-

[14]) Si noti, a scanso di equivoci, che *l'indipendenza* di $c\,w_2(x, \xi_1)$, $c'w_2(x, \xi_2)$, nel senso qui specificato, è una nozione distinta da quella dell'*indipendenza lineare* di due funzioni.

terno a $(x_1, x_2)$ e quindi diverso da $\xi_1$, tale che vi sia un integrale della (I), dotato di due zeri doppi in $\xi_1, \xi_2$, tale cioè che risulti

$$\bar{c}\,\bar{w}_2(\xi_1, \xi_2) = 0, \qquad \bar{c} \neq 0,$$

ove si rappresenti con $\bar{c}\,\bar{w}_2(x, \xi)$ l'espressione formata con gl'integrali $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$, allo stesso modo, come la $c w_2(x, \xi)$ è formata cogli $u_1, u_2, u_3, u_4$.

Il teorema I fornisce quindi la seguente proposizione

I'. *Se la funzione* $c w_2(x, x_1)$, *nulla in* $x_1$ *e non identicamente zero, relativa all'equazione* (II), *si annulla in un altro punto* $x_2$ *di* $(a, b)$, *allora, ogni funzione* $\bar{c}\,\bar{w}_2(x, \xi)$, *relativa all'equazione* (I), *si annulla almeno una volta nell'interno di* $(x_1, x_2)$.

Come si vede, questa proposizione (ove si considerino, invece delle (I) e (II), due equazioni autoaggiunte del second'ordine, i cui coefficienti siano legati da opportune disuguaglianze analoghe alle (1)), si può enunciare con le stesse parole, sostituendo l'espressione $(26_1)$ alla $(26_2)$.

**19.** Si supponga ancora che valga la (27), cioè che esista un integrale non identicamente nullo $y(x)$ della (II), dotato di due zeri doppi in $x_1$ e $x_2$.

Si considerino poi due altri integrali $u(x)$, $v(x)$ della stessa equazione, linearmente indipendenti in $(a, b)$, dotati di uno zero doppio in un punto $\xi_1$ di $(a, b)$, diverso da $x_1$. Se $y(x)$ fosse una combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$, anche $y(x)$ dovrebbe avere uno zero doppio in $\xi_1$. Quindi, se si suppone che non esista un integrale dotato di due zeri doppi in $\xi_1, x_1$, se si suppone cioè che sia

$$c w_2(\xi_1, x_1) \neq 0, \tag{28}$$

si potrà poi essere certi che $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$ sono linearmente indipendenti in $(a, b)$.

In tal caso, il teorema II afferma che il wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$ si annulla in un punto almeno $\xi_2$, interno a $(x_1, x_2)$, onde esisterà un integrale non identicamente nullo, combinazione lineare di $u$ e $v$, dotato di due zeri doppi in $\xi_1, \xi_2$, cioè risulterà

$$c' w_2(\xi_1, \xi_2) = 0, \qquad c' \neq 0.$$

Ora, essendo $c' \neq 0$, la (28) mostra che $c w_2(x, x_1)$ e $c' w_2(x, \xi_1)$ sono indipendenti, nel senso definito al n.° 18.

Pertanto il teorema II fornisce la seguente proposizione

II'. *Se la funzione* $c w_2(x, x_1)$, *nulla in* $x_1$ *e non identicamente zero, relativa all'equazione* (I), *si annulla in un altro punto* $x_2$ *di* $(a, b)$, *allora ogni altra funzione* $c' w_2(x, \xi)$, *relativa alla stessa equazione e*

*indipendente dalla* $c\,w_2(x, x_1)$, *si annullerà in un punto almeno, interno a* $(x_1, x_2)$.

Anche qui, sostituendo all'equazione di quart'ordine quella di second'ordine e alla $(26_2)$ la $(26_1)$, la proposizione enunciata sussiste ancora inalterata.

Si osservi infine, prendendo in esame l'equazione $(I_\lambda)$ del § 2, che, nelle ipotesi ivi specificate,

III′. *La funzione* $c\,w_2(x, \xi)$, *relativa alla* $(I_\lambda)$, *oscilla sempre più rapidamente in* $(a, b)$ *al diverger di* $\lambda$, *cioè, per valori di* $\lambda$ *sufficientemente grandi, essa assume, in ogni intervallo contenuto in* $(a, b)$, *un numero di zeri maggiore di un numero arbitrariamente prefissato.*

Ciò si deduce immediatamente, applicando il teorema III, con delle considerazioni perfettamente analoghe a quelle ora svolte per ricavare i teorr. I′ e II′.

**20.** Il fatto che l'epressione $(26_2)$, formata con gl'integrali di un'equazione del quart'ordine, abbia, come si è visto, un comportamento così strettamente simile a quello dell'espressione $(26_1)$, che è un integrale di un'equazione lineare omogenea del second'ordine, dotato di almeno uno zero in $(a, b)$, può far nascere il sospetto che esista un'equazione lineare omogenea del second'ordine, di cui la $(26_2)$ rappresenti gl'integrali che si annullano almeno una volta in $(a, b)$.

Ma è facile riconoscere che ciò non è vero, almeno in generale. Basterà, per convincersene, notare due differenze essenziali, che presentano, nel loro comportamento, le espressioni $c\,w_2(x, \xi)$ e gl'integrali $c\,w_1(x, \xi)$ delle equazioni lineari omogenee del second'ordine.

La prima è che due espressioni $c\,w_2(x, \xi_1)$, $c'w_2(x, \xi_2)$, con $c \neq 0$, $c' \neq 0$, le quali non siano indipendenti nel senso sopra indicato, per le quali cioè risulti $w_2(\xi_1, \xi_2) = 0$, non sono necessariamente coincidenti in $(a, b)$, a meno di un fattore costante.

L'altra differenza essenziale consiste in questo, che un'espressione $c\,w_2(x, \xi)$ può, per un dato valore di $\xi$, annullarsi in un punto insieme con la derivata rispetto ad $x$, senza essere identicamente nulla, come prova l'esempio dell'equazione

$$u^{IV} + (n^2 + 1)\alpha^2 u'' + n^2\alpha^4 u = 0,$$

considerata nell'intervallo $\left(0, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$, ove si indichi con $\alpha$ una quantità reale non nulla e con $n$ un numero intero positivo.

Quattro integrali indipendenti di codesta equazione sono dati da

$$u_1 = \operatorname{sen}\alpha x, \quad u_2 = \cos\alpha x, \quad u_3 = \operatorname{sen} n\alpha x, \quad u_4 = \cos n\alpha x;$$

formando con essi l'espressione $c\,w_2(x,\xi)$, con $c \neq 0$, si riconosce sùbito che risulta

$$[c\,w_2(x,0)]_{x=\frac{2\pi}{\alpha}} = 0, \qquad \left[c\frac{d}{dx}w_2(x,0)\right]_{x=\frac{2\pi}{\alpha}} = 0,$$

pur non essendo identicamente nulla la $w_2(x,0)$, in $\left(0, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$.

## § 5.

## Cenno su una possibile estensione dei precedenti risultati.

**21.** L'identità (21), dimostrata al § 1, nel caso di due equazioni del quart'ordine, è suscettibile di essere estesa al caso di due equazioni lineari ordinarie autoaggiunte di ordine $2n$ qualsiasi

$$(\mathrm{I}^{(n)}) \qquad \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \frac{d^h}{dx^h}\left[\bar{\theta}_h(x)\frac{d^h y}{dx^h}\right] = 0,$$

$$(\mathrm{II}^{(n)}) \qquad \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \frac{d^h}{dx^h}\left[\theta_h(x)\frac{d^h y}{dx^h}\right] = 0,$$

ove, per $h = 0, 1, 2, \ldots, n$, si abbia che $\theta_h(x), \bar{\theta}_h(x)$ siano continue in $(a,b)$, insieme con le derivate dei primi $h$ ordini, e di più $\theta_n$ e $\bar{\theta}_n$ siano sempre diverse da zero in $(a,b)$.[15])

Si supponga che, per una certa coppia $x_1, x_2$ di punti di $(a,b)$, esista un integrale $y(x)$ della $(\mathrm{II}^{(n)})$ verificante le $2n$ condizioni

$$y(x_1) = y'(x_1) = \ldots = y^{(n-1)}(x_1) = 0, \quad y(x_2) = y'(x_2) = \ldots = y^{(n-1)}(x_2) = 0,$$

e che, fissato ad arbitrio un punto $\xi$ in $(a,b)$, non interno a $(x_1, x_2)$, vi sia una certa $n$-pla $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ di integrali della $(\mathrm{I}^{(n)})$, verificanti le condizioni

$$u_h(\xi) = u_h'(\xi) = \ldots = u_h^{(n-1)}(\xi) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

e tali che il wronskiano $W[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)]$ non si annulli in nessun punto interno a $(x_1, x_2)$.

In tali ipotesi, si può scrivere l'identità di Picone

$$(29) \qquad \sum_{h=0}^{n} \int_{x_1}^{x_2} (\theta_h - \bar{\theta}_h)\left(\frac{d^h y}{dx^h}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \bar{\theta}_n \left(\frac{W[y(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)]}{W[u_1(x), \ldots, u_n(x)]}\right)^2 dx = 0,$$

la quale per $n = 2$ si riduce alla (21) del § 1 e per $n = 1$ si riduce alla relazione stabilita da Picone[2]).

---

[15]) G. Cimmino, Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare autoaggiunta, Rendic. della R. Acc. dei Lincei 9 (1929), p. 524.

**22.** Ciò posto, poichè i risultati sin qui conseguiti discendevano tutti, in sostanza, dalla relazione (21), è prevedibile che, partendo dalla (29) invece che dalla (21), ragionamenti analoghi a quelli svolti nei precedenti paragrafi per le equazioni del quart'ordine debbano condurre a conclusioni del tutto simili, relativamente alle equazioni di ordine $2n$.

Per enunciare, nella maniera più semplice e più comprensiva, le proposizioni che ne risultano per codeste equazioni, converrà ricollegarsi alle considerazioni del paragrafo precedente, introducendo l'espressione

$$(26_n) \qquad c\,w_n(x,\xi) = c \begin{vmatrix} u_1(\xi), & u_2(\xi), & \dots & u_{2n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(\xi), & u_2^{(n-1)}(\xi), & \dots & u_{2n}^{(n-1)}(\xi) \\ u_1(x), & u_2(x), & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(x), & u_2^{(n-1)}(x), & \dots & u_{2n}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

ove $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ indichino $2n$ integrali linearmente indipendenti dell'equazione in esame, $c$ sia una costante reale arbitraria e $\xi$ un punto qualsiasi dell'intervallo in cui è definita l'equazione.

Per $n = 2$ e $n = 1$, la $(26_n)$ si riduce alle $(26_2)$ e $(26_1)$ rispettivamente, definite nel paragrafo precedente.

Ebbene, dopo quanto si è detto, si può concludere, in base alla relazione (29), che dovrà sussistere la proposizione seguente:

VIII. *Gli enunciati* I′, II′, III′ *del paragrafo precedente sussistono inalterati, quando si sostituisca l'espressione* $(26_n)$, *con n qualsiasi, alla* $(26_2)$.

In quest'unico enunciato, si compendia, così, l'estensione all'equazione $(I^{(n)})$ dei tre teoremi fondamentali dimostrati da Sturm, di confronto, di separazione, di oscillazione.

## Capitolo secondo.

## Esistenza degli autovalori e delle autosoluzioni.

### § 6.

### Considerazioni preliminari.

**23.** Per lo studio degli autovalori del parametro $\lambda$, che figura nell'equazione differenziale considerata, sarà opportuno restringere alquanto la generalità lasciata ai coefficienti $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ nell'equazione $(I_\lambda)$ del precedente capitolo, supponendo che essi verifichino ancora le condizioni di continuità e di derivabilità ivi indicate al n.° 1, ma che, di più, $\theta_2$ non dipenda da $\lambda$, mentre $\theta_1$ e $\theta_0$ ne dipendano linearmente.

Precisamente si porrà

$$\theta_2(x,\lambda)=\theta(x),\quad \theta_1(x,\lambda)=\lambda A_1(x)+B_1(x),\quad \theta_0(x,\lambda)=\lambda A_0(x)+B_0(x),$$

e si prenderà quindi in esame l'equazione

$$(\mathrm{I}_\lambda)\quad \frac{d^2}{dx^2}\Big[\theta(x)\frac{d^2y}{dx^2}\Big]-\frac{d}{dx}\Big[\{\lambda A_1(x)+B_1(x)\}\frac{dy}{dx}\Big]+\{\lambda A_0(x)+B_0(x)\}y=0.$$

Si farà poi l'ipotesi che in ogni punto di $(a,b)$ si abbia

$$(30)\qquad \theta(x)>0,\quad B_1(x)\geqq 0,\quad B_0(x)\geqq 0$$

e che esista in $(a,b)$ un intervallo non nullo $(a_1,b_1)$, in ogni punto del quale una delle due funzioni $A_0(x), A_1(x)$ sia sempre diversa da zero e di segno costante, mentre l'altra non assuma valori di segno opposto a quelli della prima.

Non è quindi escluso che una delle due funzioni $A_0(x), A_1(x)$ possa essere anche identicamente nulla in tutto $(a,b)$.[16])

**24.** Ciò posto, gli autovalori del parametro $\lambda$, che si prenderanno in esame, sono quei valori di $\lambda$, per ciascuno dei quali avviene che la $(\mathrm{I}_\lambda)$ ammette un integrale dotato di due zeri doppi nei due punti $a$ e $b$. Un siffatto integrale si chiamerà un'autosoluzione della $(\mathrm{I}_\lambda)$, corrispondente a quell'autovalore di $\lambda$.

È bene osservare esplicitamente che, al contrario di quanto accade per le equazioni del second'ordine, può darsi qui il caso che non vi sia una sola autosoluzione (determinata a meno di un fattore costante), corrispondente a un dato autovalore, come prova l'esempio fornito dall'equazione differenziale del n.° 20. Tale equazione, considerata nell'intervallo $\left(0,\frac{2\pi}{\alpha}\right)$, possiede infatti le due autosoluzioni linearmente indipendenti

$$\cos n\alpha x-\cos\alpha x,\qquad \operatorname{sen} n\alpha x-n\operatorname{sen}\alpha x.$$

Le ipotesi fatte al numero precedente non escludono, d'altra parte, che, per un particolare valore di $\lambda$, la $(\mathrm{I}_\lambda)$ possa ridursi all'equazione differenziale ora citata.

Si ha però, in virtù del teorema V, che al più due autosoluzioni linearmente indipendenti possono corrispondere a un medesimo autovalore.

Ora, detti $u(x,\lambda), v(x,\lambda)$ due integrali della $(\mathrm{I}_\lambda)$ linearmente indipendenti in $(a,b)$, dotati entrambi di uno zero doppio in $a$, si consideri la funzione

$$F(x,\lambda)=u(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial x}v(x,\lambda)-v(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial x}u(x,\lambda).$$

---

[16]) Si noti che le ipotesi fatte non escludono che $A_0$ e $B_0$ possano identicamente annullarsi in $(a,b)$; in tal caso, dai risultati conseguiti nel presente lavoro per le equazioni di quart'ordine si deducono agevolmente i noti risultati analoghi, relativi alle equazioni di second'ordine.

Una combinazione lineare a coefficienti non nulli di $u$ e $v$, nulla insieme con la prima derivata per $x = b$, esisterà evidentemente, quando, e solo quando, risulti

$$F(b, \lambda) = 0. \tag{31}$$

Quindi, tenendo presente la proposizione V ora citata, si può affermare che tutti e soli gl'indicati autovalori del parametro $\lambda$ sono dati dagli zeri della trascendente intiera $F(b, \lambda)$.

**25.** Dalle ipotesi del n.° 23, discende senza difficoltà che gli zeri di $F(b, \lambda)$ debbono essere tutti reali. Siano infatti $\lambda_h, \lambda_k$ due autovalori distinti del parametro $\lambda$ e $y_h, y_k$ due autosoluzioni corrispondenti rispettivamente ad essi. Si moltiplichi per $y_k\,dx$ la relazione

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\theta\frac{d^2y_h}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left\{(\lambda A_1 + B_1)\frac{dy_h}{dx}\right\} + (\lambda A_0 + B_0)\,y_h = 0 \tag{32}$$

e si integri poi fra $a$ e $b$, tenendo conto del fatto che

$$y_k(a) = y_k'(a) = y_k(b) = y_k'(b) = 0. \tag{33}$$

Si otterrà così, mediante facili integrazioni per parti, l'altra relazione

$$\int_a^b \theta\frac{d^2y_k}{dx^2}\frac{d^2y_h}{dx^2}\,dx + \int_a^b (\lambda_h A_1 + B_1)\frac{dy_k}{dx}\frac{dy_h}{dx}\,dx + \int_a^b (\lambda_h A_0 + B_0)\,y_k y_h\,dx = 0; \tag{34}$$

e d'altra parte, scambiando $h$ e $k$,

$$\int_a^b \theta\frac{d^2y_h}{dx^2}\frac{d^2y_k}{dx^2}\,dx + \int_a^b (\lambda_k A_1 + B_1)\frac{dy_h}{dx}\frac{dy_k}{dx}\,dx + \int_a^b (\lambda_k A_0 + B_0)\,y_h y_k\,dx = 0. \tag{34'}$$

Sottraendo la (34') dalla (34) e dividendo poi per $\lambda_h - \lambda_k$ (che per ipotesi è diverso da zero), si trae ancora

$$\int_a^b A_1\frac{dy_h}{dx}\frac{dy_k}{dx}\,dx + \int_a^b A_0\,y_h y_k\,dx = 0; \tag{35}$$

e infine, da quest'ultima e dalla (34), si deduce che

$$\int_a^b \theta\frac{d^2y_h}{dx^2}\frac{d^2y_k}{dx^2}\,dx + \int_a^b B_1\frac{dy_h}{dx}\frac{dy_k}{dx}\,dx + \int_a^b B_0\,y_h y_k\,dx = 0. \tag{36}$$

Ciò posto, sia, se è possibile, la trascendente intiera $F(b, \lambda)$ dotata di uno zero non reale $\bar{\lambda} + i\bar{\bar{\lambda}}$.

Allora, la quantità complessa coniugata $\bar{\lambda} - i\bar{\bar{\lambda}}$ sarà anch'essa uno zero di $F(b, \lambda)$, diverso del precedente.

Sia, per es., $\lambda_h = \bar{\lambda} + i\bar{\bar{\lambda}}$, $\lambda_k = \bar{\lambda} - i\bar{\bar{\lambda}}$; e siano $y_h(x) = y(x) + i\bar{\bar{y}}(x)$, $y_k(x) = \bar{y}(x) - i\bar{\bar{y}}(x)$ le corrispondenti autosoluzioni. Poichè, per ipotesi, è $\lambda_h \neq \lambda_k$, si può applicare la (36), che in questo caso dà

$$\int_a^b \theta\left\{\left(\frac{d^2\bar{y}}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\bar{\bar{y}}}{dx^2}\right)^2\right\} dx + \int_a^b B_1\left\{\left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{\bar{y}}}{dx}\right)^2\right\} dx + \int_a^b B_0(\bar{y}^2 + \bar{\bar{y}}^2)\, dx = 0.$$

Ma di qui, per le (30), si deduce che dev'essere $\bar{y} \equiv 0$, $\bar{\bar{y}} \equiv 0$, e quindi $y_h(x)$, $y_k(x)$ devon essere identicamente nulle in $(a, b)$, onde esse non sono autosoluzioni, contrariamente all'ipotesi.

Pertanto, come volevasi, risulta che la $F(b, \lambda)$ è priva di zeri complessi.

Si noti ancora un'altra conseguenza delle relazioni (34) e (34′) dedotte più sopra: codeste relazioni sussistono anche quando $\lambda_h = \lambda_k$, $y_h = y_k$; in tal caso, esse si riducono all'unica seguente

$$(37)\qquad \int_a^b \theta\left(\frac{d^2 y_h}{dx^2}\right)^2 dx + \int_a^b (\lambda_h A_1 + B_1)\left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b (\lambda_h A_0 + B_0)\, y_h^2\, dx = 0,$$

dalla quale, sempre per le (30), sie trae la disuguaglianza

$$(38)\qquad \lambda_h\left[\int_a^b A_1\left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b A_0\, y_h^2\, dx\right] < 0.$$

Di qui risulta immediatamente che gli autovalori $\lambda_h$ sono tutti diversi da zero.

**26.** Se $\lambda_h$ è un autovalore, sussiste, per gl'integrali dell'equazione $(I_{\lambda_h})$ dotati di due zeri doppi in $a, b$, una disuguaglianza fondamentale, che ora converrà dimostrare.

Sia $y_h(x)$ un'autosoluzione corrispondente all'autovalore $\lambda_h$: cioè si supponga che sussistano per $y_h(x)$ le (32) e (33). Sia poi $y(x, \lambda)$ un integrale della $(I_\lambda)$, con $\lambda \neq \lambda_h$, sottoposto alle condizioni

$$(39)\qquad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0.$$

Moltiplicando la (32) per $y(x)\,dx$ e integrando poi fra $a$ e $b$, si trae, con le sòlite integrazioni per parti, tenendo conto delle (39),

$$\left[y\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2 y_h}{dx^2}\right) - \theta\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y_h}{dx^2}\right]_{x=b} + \int_a^b \theta\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{d^2 y_h}{dx^2}\,dx + \int_a^b (\lambda_h A_1 + B_1)\frac{dy}{dx}\frac{dy_h}{dx}\,dx$$
$$+ \int_a^b (\lambda_h A_0 + B_0)\, y\, y_h\, dx = 0.$$

Analogamente, moltiplicando la $(I_\lambda)$ per $y_h\,dx$ e integrando poi fra $a$ e $b$, si trae

$$\int_a^b \theta \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2y_h}{dx^2}\,dx + \int_a^b (\lambda A_1 + B_1)\frac{dy}{dx}\frac{dy_h}{dx}\,dx + \int_a^b (\lambda A_0 + B_0)\,y\,y_h\,dx = 0.$$

Sottraendo questa relazione dalla precedente e dividendo per $\lambda - \lambda_h$, si deduce

$$(40)\qquad \left[\frac{1}{\lambda-\lambda_h}\,y\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2y_h}{dx^2}\right) - \frac{1}{\lambda-\lambda_h}\,\theta\frac{dy}{dx}\frac{d^2y_h}{dx^2}\right]_{x=b} - \int_a^b A_1\frac{dy}{dx}\frac{dy_h}{dx}\,dx$$
$$- \int_a^b A_0\,y\,y_h\,dx = 0.$$

Ora si passi al limite per $\lambda \to \lambda_h$. Tenendo presente che $y_h(b) = y_h'(b) = 0$, si riconosce anzitutto che

$$\lim_{\lambda\to\lambda_h}\frac{1}{\lambda-\lambda_h}\,y(b,\lambda) = \left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]_{\substack{x=b\\ \lambda=\lambda_h}}, \qquad \lim_{\lambda\to\lambda_h}\frac{1}{\lambda-\lambda_h}\frac{\partial}{\partial x}y(b,\lambda) = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=b\\ \lambda=\lambda_h}};$$

e pertanto, dalla (40), col passaggio al limite indicato, si trae infine

$$(41)\qquad \left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \theta\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=b\\ \lambda=\lambda_h}} - \int_a^b A_1\left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b A_0\,y_h^2\,dx = 0.$$

Moltiplicando la (41) per $\lambda_h$ e ricordando la disuguaglianza (38), si ottiene la nuova disuguaglianza

$$(42)\qquad \lambda_h\left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \theta\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=b\\ \lambda=\lambda_h}} < 0,$$

che si voleva provare: essa sarà molto utile per quanto segue.

27. Una prima proposizione, che immediatamente si deduce dalla (42), è la seguente:

IX. *Se, per una certa coppia di valori $\xi, l$ di $x$ e $\lambda$, risulta*

$$(43)\qquad F(\xi,l) = 0, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 F}{\partial^3 x}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0,$$

*cioè, per quanto è detto al n.° 6 del precedente capitolo,*

$$(43')\qquad u(\xi,l) = 0, \quad v(\xi,l) = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0,$$

*allora si avrà pure di conseguenza*

$$(44)\qquad \left[\frac{\partial F}{\partial\lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} \neq 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} \neq 0,$$

Riesce invero, in primo luogo,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \lambda}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \lambda} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \lambda},$$

ciò che, per le (43′), prova intanto la prima delle (44).

Si ha poi, tenendo conto delle (43′),

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}}, \qquad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 2\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \lambda} - \frac{\partial v}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}}.$$

Pertanto, se fosse $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0$, si dedurrebbe l'esistenza di una combinazione lineare $y(x, \lambda)$, a coefficienti non nulli, di $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$, verificante le condizioni

$$(45) \qquad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0.$$

E analogamente, se fosse $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0$, si dedurrebbe l'esistenza di una combinazione lineare $z(x, \lambda)$, a coefficienti non nulli, di $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$, verificante le condizioni

$$(45') \qquad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0.$$

Ma $y(x, l)$ e $z(x, l)$, essendo, come $u(x, l)$ e $v(x, l)$, dotate di uno zero doppio in $a$ e di un altro zero doppio in $\xi$, dovranno verificare la (42), ove si ponga $\xi$ ed $l$ in luogo di $b$ e $\lambda_h$ rispettivamente, e ciò è impossibile, se valgono le (45) o le (45′).

Pertanto le (44) risultano completamente dimostrate.

28. Dalla (42) discende ancora che

X. *Se, per una certa coppia di valori $\xi, l$ di $x$ e $\lambda$, risulta*

$$(46) \qquad F(\xi, l) = 0, \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0,$$

*allora si avrà pure di conseguenza che sussisteranno le* (43), *o, ciò che è lo stesso, le* (43′).

Siano, infatti, verificate le (46) e si supponga, se è possibile, che risulti

$$(47) \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} \neq 0;$$

in tal caso, detto $J$ un certo intorno del punto $\lambda = l$, esisterà una funzione ben determinata $x(\lambda)$, definita in $J$, ivi continua e derivabile, verificante

identicamente l'equazione

$$F\{x(\lambda), \lambda\} = 0$$

e soddisfacente alle condizioni

$$x(l) = \xi, \quad x'(l) = 0. \tag{48}$$

Sicchè, ponendo, per ogni valore di $\lambda$ in $J$,

$$y(x, \lambda) = v\{x(\lambda), \lambda\}\, u(x, \lambda) - u\{x(\lambda), \lambda\}\, v(x, \lambda), \tag{49}$$

si avrà che $y(x, \lambda)$ è un integrale della $(I_\lambda)$, pel quale risulta identicamente in $J$

$$y\{x(\lambda), \lambda\} = 0, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x(\lambda)} = 0. \tag{50}$$

Derivando poi queste relazioni rispetto a $\lambda$, si deduce ancora che

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x(\lambda)} x'(\lambda) + \left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{x=x(\lambda)} = 0, \\ &\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{x=x(\lambda)} x'(\lambda) + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \lambda}\right]_{x=x(\lambda)} = 0, \end{aligned} \tag{51}$$

da cui, ponendo $\lambda = l$ e tenendo conto delle (48), si trae

$$\left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0;$$

ma ciò è impossibile, poichè $y(x, \lambda)$ deve verificare la (42), ove si ponga $\xi$ ed $l$ in luogo di $b$ e $\lambda_h$.

Dunque resta provato, intanto, che, oltre alla prima, deve sussistere anche la seconda delle relazioni (43), e cioè che deve risultare

$$[uv' - u'v]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \quad [uv'' - u''v]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0. \tag{52}$$

Ciò posto, si tenga presente che, per ogni valore di $\lambda$, gl'integrali $u(x, \lambda)$, $v(x, \lambda)$, essendo dotati entrambi di uno zero doppio in $a$, verificano in questo punto la relazione

$$\begin{aligned} &\theta(uv''' - u'''v) + \theta'(uv'' - u''v) - \theta(u'v'' - u''v') \\ &\quad - (\lambda A_1 + B_1)(uv' - u'v) = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

analoga alla (4) del prec. capitolo, e quindi, per quanto ivi si è detto al n.° 3, la (53) vale anche in ogni altro punto di $(a, b)$.

Ora dalla (53) e dalle (52) segue che

$$u(\xi, l) = 0, \quad v(\xi, l) = 0, \tag{54}$$

perchè, se così non fosse, dalle (52) si dedurrebbe

$$[u'v'' - u''v']_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \tag{54'}$$

e quindi dalla (53), per $x = \xi, \lambda = l$, si trarrebbe

$$[uv''' - u'''v]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0,$$

onde $v(\xi, l)\, u(x, l) - u(\xi, l)\, v(x, l)$ sarebbe un integrale della $(I_l)$, nullo insieme con le prime tre derivate, per $x = \xi$, e non identicamente nullo, ciò che è impossibile.

Resta pertanto provato ancora che valgono le (54), dalle quali, per la (53), si deduce la (54′) e di conseguenza anche la terza delle (43).

Infine si osservi che la seconda delle (46), in base alle (54), si riduce a

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \lambda}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0;$$

e da questa relazione discende che anche le $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ devono entrambe annullarsi per $x = \xi$, $\lambda = l$, perchè altrimenti la funzione

$$y(x, l) = \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} u(x, l) - \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} v(x, l)$$

sarebbe un integrale della $(I_l)$, non identicamente nullo, dotato di due zeri doppi in $a, \xi$, e verificante le condizioni

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0,$$

ciò che, per la (42), non è possibile.

Pertanto il teorema X risulta completamente dimostrato.

**29.** Un'ultima conseguenza della (42) occorre rilevare. Se, per una coppia di valori $\xi, l$ di $x$ e $\lambda$, risulta

$$F(\xi, l) = 0, \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} \neq 0,$$

allora, in un certo intorno $J$ del punto $\xi$, risulta definita una ben determinata funzione $\lambda(x)$, continua e derivabile, che verifica identicamente in $J$ la relazione

$$F\{x, \lambda(x)\} = 0,$$

e che soddisfa alla condizione $\lambda(\xi) = l$. Ebbene, dalla (42) si deduce facilmente che:

XI. *La funzione $\lambda(x)$ ora definita è non crescente o non decrescente nel punto $\xi$, secondochè $l > 0$ o $l < 0$.*

Sia infatti, per fissare le idee, $l > 0$ e si suppunga in primo luogo che riesca $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} \neq 0$. In tal caso, la funzione $\lambda(x)$ è invertibile, in un conveniente intorno $J'$ di $\xi$.

Detta $x(\lambda)$ la funzione inversa di $\lambda(x)$ e fatta la posizione (49), la funzione $y(x, \lambda)$ verificherà le (50), (51), da cui si deduce in particolare, per $\lambda = l$,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} x'(l) + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0;$$

e la (42), unita a queste relazioni, prova che $x'(l) < 0$; onde segue pure

$$\lambda'(\xi) = \frac{1}{x'(l)} < 0.$$

Se, invece, riesce $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} = 0$, e soltanto in tale ipotesi, si avrà che $\lambda'(\xi) = 0$.

Come risulta da quel che si è detto nel numero precedente, questo caso può presentarsi soltanto quando $u(\xi, l)$, $v(\xi, l)$ siano entrambe nulle, mentre non siano, allo stesso tempo, entrambe nulle anche le

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}}, \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}}.$$

## § 7.

## Esistenza degli autovalori.

**30.** Dopo quanto si è detto nel paragrafo precedente, seguitando a considerare i due integrali $u(x, \lambda)$, $v(x, \lambda)$ e la funzione $F(x, \lambda)$ introdotti al n.° 24, si può dimostrare il seguente lemma:

XII. *Sia $\xi$ un punto di $(a, b)$ diverso da $a$ ed $l$ una radice dell'equazione*

$$F(\xi, l) = 0,$$

*necessariamente reale e non nulla. Se non sono verificate le (43′) e se è $l > 0$ $[l < 0]$, allora la*

(55) $$F(x, \lambda) = 0$$

*definisce una ben determinata funzione $x(\lambda)$ di $\lambda$, finita, continua, a derivata unica (finita o infinita) in ogni punto, costantemente decrescente [costantemente crescente] in un intervallo $(k, \infty)$ [in un intervallo $(-\infty, k)$], che verifica identicamente la (55) e che si riduce a $\xi$ per $\lambda = l$; di più, valgono, per codesta funzione, le relazioni*

$$\left.\begin{matrix} 0 < k \leqq l \\ [0 > k \geqq l] \end{matrix}\right\}, \qquad x(k) = b, \qquad a < x(\lambda) \leqq b.$$

*Se, invece, sono verificate le (43′), allora l'equazione (55) definisce due ben determinate funzioni di $\lambda$, che si riducono a $\xi$ per $\lambda = l$ e che sono dotate delle medesime proprietà ora indicate.*

Sia p. es. $l > 0$, $a < \xi < b$ e si supponga dapprima che valgano le (43′). In tal caso, il teorema IX del paragrafo prec. assicura che sussisteranno anche le (44). E da queste si deduce che esistono, in un certo intorno di $\xi$, due funzioni ben determinate $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, continue e derivabili in $\xi$, verificanti le condizioni

$$\lambda_1(\xi) = l, \quad \lambda_1'(\xi) = 0; \quad \lambda_2(\xi) = l, \quad \lambda_2'(\xi) = -2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} : \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} + 0.$$

Quest'intorno di $\xi$ si può supporre scelto in modo che, in ogni punto $x$ di esso, risulti

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1(x)} + 0, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_2(x)} + 0;$$

infatti, se $\xi$ fosse punto di accumulazione di punti $x$ in cui

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1(x)} = 0,$$

allora si avrebbe pure

$$0 = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{x-\xi}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1(x)} - \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}}\right\} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} \lambda_i'(\xi),$$

ciò che è impossibile, poichè, tanto per $i = 1$ che per $i = 2$, questa relazione si riduce a

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=\xi\\ \lambda=l}} = 0,$$

in contraddizione con la (44).

Quindi, pel teorema XI, le $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ sono entrambe non crescenti nel loro insieme di definizione, e la definizione di $\lambda_i(x)$, con $i = 1$ o $i = 2$, si potrà estendere senza ambiguità fino a un punto $\xi'$, se esiste, per cui risulti $\lambda_i(\xi') = \infty$ oppure

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=\lambda_i(\xi')} = 0. \tag{56}$$

In tal caso, detto $l'$ il valor limite di $\lambda_i(x)$ per $x \to \xi$ (valor limite che è ben determinato, essendo $\lambda_i(x)$ una funzione monotona) si avrà $l' = \infty$, oppure pel teorema X, si avrà che sussisteranno le (43′), ove si ponga $\xi', l'$ in luogo di $\xi$ ed $l$. Supposto $l' + \infty$, ripetendo pel punto $\xi', l'$ lo stesso ragionamento ora fatto pel punto $\xi, l$, si deduce che, in un intorno di $\xi'$, risultano definite due funzioni di $x$, non crescenti, che si riducono ad $l'$ per $x = \xi'$ e che verificano identicamente la (55). Una di queste due funzioni dev'essere, pertanto, necessariamente la $\lambda_i(x)$.

Sicchè anche attraverso ai punti $\xi'$ per cui vale la (56), se vi sono di tali punti, si può estendere univocamente la definizione della $\lambda_i(x)$, sempre finita, continua, derivabile.

Proseguendo, in tal modo, la definizione della $\lambda_i(x)$, per $x \to b$, si avrà che $\lambda_i(x)$ tende a un limite determinato e finito $k$, dato che, come si è visto, $\lambda_i(x)$ è non crescente.

Inoltre $k$ non può essere negativo o nullo, chè altrimenti, per un certo valore di $x \neq a$ in $(a, b)$ e per $\lambda = 0$, si annullerebbe $F(x, \lambda)$, ciò che è impossibile, per quanto si è visto al n.° 25, in fine.

Proseguendo, invece, la definizione della $\lambda_i(x)$, per valori di $x$ decrescenti, si avrà che: o $\lambda_i(x) \to +\infty$, per $x \to a_1$, ove con $a_1$ si indichi un certo punto interno ad $(a, \xi)$, oppure, se ciò non avviene, $\lambda_i(x)$ tenderà ad un limite determinato $K$, per $x \to a$. Ed è facile dimostrare che dovrà essere $K = +\infty$.

Sia invero, se è possibile, $K$ eguale a una quantità finita. E si chiamino con $m_1, m_0$ i minimi delle funzioni $\lambda A_1 + B_1$, $\lambda A_0 + B_0$, al variare di $x$ in $(a, b)$ e di $\lambda$ in $(0, K)$. Io dico allora che l'equazione

$$m \frac{d^4u}{dx^4} - m_1 \frac{d^2u}{dx^2} + m_0 u = 0, \tag{57}$$

comunque si prenda l'intervallo $(a, a + \varepsilon)$, ammette un integrale dotato di due zeri doppi, uno in $a$ e l'altro in un punto interno ad $(a, a + \varepsilon)$.

Infatti, per valori di $x$ contenuti in $(a, a + \varepsilon)$, sarà $\lambda_i(x)$ compreso fra 0 e $K$ e di più esisterà sempre un integrale della $(I_{\lambda_i(x)})$, dotato di due zeri doppi in $a$ e in $x$; sicchè, pel teorema I, il wronskiano di due integrali indipendenti della (57), dotati di uno zero doppio in $a$, dovrà annullarsi ulteriormente almeno una volta nell'interno di $(a, x)$ e quindi nell'interno di $(a, a + \varepsilon)$, onde esisterà un integrale della (56), dotato di uno zero in doppio in $a$ e di un altro zero doppio interno ad $(a, a + \varepsilon)$, come si era affermato. Ma, data l'arbitrarietà di $\varepsilon$, ciò è impossibile, perchè contraddice il teorema VI del prec. capitolo. Dunque resta provato che dev'essere $K = +\infty$.

Io dico ora che le funzioni $\lambda_i(x)$ sono invertibili. Infatti, da quanto si è detto risulta intanto che le $\lambda_i(x)$ sono non crescenti in ogni punto di loro definizione ed hanno derivata sempre finita.

Quindi $\lambda_i(x)$ potrebbe non essere invertibile, soltanto se vi fosse un intervallo contenuto in $(a, b)$, nel quale $\lambda_i(x)$ si mantenesse sempre eguale a un valore costante.

Ma ciò è pure impossibile, pel medesimo teorema VI, adesso ricordato.

Orbene, dette $x_i(\lambda)$ le funzioni inverse delle $\lambda_i(x)$, è chiaro, dopo quanto si è detto, che le $x_i(\lambda)$ soddisfano a tutte le condizioni indicate nel lemma enunciato.

È chiaro pure, pel teorema X, che, se $\xi$ ed $l$ non verificano le (43'), allora sarà $\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} \neq 0$, onde, invece di due funzioni $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, e quindi

anche di due funzioni $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, se ne avrà una sola ben determinata, dotata delle stesse proprietà.

Dunque il lemma XII risulta del tutto dimostrato.

È ovvio che, solo nel caso $\xi = b$, risulterà $k = l$.

**31.** Dal lemma del numero precedente si può dedurre senza difficoltà il seguente teorema:

XIII. *Esista in* $(a, b)$, *per un determinato valore reale* $l$ *di* $\lambda$, *l'*$n^{mo}$ *zero* $\xi_n$ *di* $F(x, \lambda)$ *a destra di* $a$, *ove si conti per due ogni zero diverso da* $a$ *di* $F(x, l)$, *che sia allo stesso tempo uno zero di* $u, v, u', v'$; *allora, per ogni valore reale di* $\lambda$, *del medesimo segno di* $l$, *esisterà o no in* $(a, \xi_n)$ *l'*$n^{mo}$ *zero di* $F(x, \lambda)$ *a destra di* $a$ (*con la stessa avvertenza riguardo agli zeri di* $F(x, \lambda)$ *da considerarsi doppi*), *secondochè sarà* $|\lambda| \geqq |l|$ *o* $|\lambda| < |l|$.

Si supponga che $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ siano rispettivamente il 1°, il 2°, ..., l'$n^{mo}$ zero di $F(x, \lambda)$ a destra di $a$ e che sia, p. es., $l > 0$.

Si avrà $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$, riuscendo $\xi_i = \xi_{i+1}$ oppure $\xi_{i-1} = \xi_i$, se in $\xi_i$ si annullano $u, v, u', v'$ e $\xi_{i-1} < \xi_i < \xi_{i+1}$, nel caso contrario; non riuscendo mai $\xi_{i-1} = \xi_i = \xi_{i+1}$. Si avrà inoltre

$$F(\xi_i, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si potrà quindi applicare ad ogni intervallo $(a, \xi_i)$ il lemma del numero precedente, dal quale risulta che l'equazione $F(x, \lambda) = 0$ è identicamente verificata da $n$ funzioni $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, ..., $x_n(\lambda)$, finite, continue, costantemente decrescenti in tutto l'intervallo $(l, \infty)$, che si riducono rispettivamente a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, per $\lambda = l$, e di più verificano le disuguaglianze

$$a < x_i(\lambda) \leqq \xi_i. \tag{58}$$

Per $\lambda > l$, non può essere nè $x_i(\lambda) = x_j(\lambda)$, $x_i'(\lambda) = x_j'(\lambda)$, nè $x_i(\lambda) = x_j(\lambda) = x_k(\lambda)$, $i, j, k$ indicando tre qualsiansi degl'indici $1, 2, \ldots, n$; invero, perchè ciò avvenga, è necessario che, per $x = x_i(\lambda)$ e per un certo valore di $\lambda$, si annullino, oltre alle derivate prime di $F(x, \lambda)$ e oltre alla derivata seconda rispetto ad $x$, anche le derivate seconde $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}$, il che è impossibile, pel teorema IX.

Non è impossibile, invece, che risulti, per un particolare valore di $\lambda$, $x_i(\lambda) = x_j(\lambda)$; in tal caso, saranno nulle le derivate prime di $F(x, \lambda)$, per $x = x_i(\lambda)$, e quindi, pel teorema X, saranno tutte nulle le $u, v, u', v'$.

La funzione $F(x, \lambda)$ ha dunque, per $\lambda > l$, gli $n$ zeri $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, ..., $x_n(\lambda)$ in $(a, b)$, dei quali tre qualsiansi non possono coincidere fra loro; mentre tutti e soli gli eventuali punti in cui coincidono due di codesti zeri sono quei punti in cui $u, v, u', v'$ sono tutte insieme nulle.

E ciò, tenendo conto anche delle (58), dimostra il teorema enunciato.

**32.** Dai risultati conseguiti nei numeri precedenti si deduce sùbito, intanto, l'esistenza di infiniti autovalori. Conformemente alle ipotesi del n.° 23, si supponga che esista in $(a, b)$ un intervallo $(a_1, b_1)$, nel quale una almeno delle due funzioni $A_0, A_1$ sia, per es., sempre negativa ed abbia il massimo negativo $-\alpha$, mentre l'altra sia sempre negativa o nulla.

Siano poi $\beta_0, \beta_1$ i massimi (certo positivi o nulli per le (30)) di $B_0$ e $B_1$ rispettivamente in $(a_1, b_1)$.

In tal caso, si avrà, per valori di $\lambda$ maggiori di $\frac{\beta_1}{\alpha}$ e di $\frac{\beta_0}{\alpha}$,

$$\lambda A_1 + B_1 < -\lambda\alpha + \beta_1 < 0, \quad \lambda A_0 + B_0 \leqq \beta_0 \quad (a_1 \leqq x \leqq b_1),$$

oppure

$$\lambda A_0 + B_0 < -\lambda\alpha + \beta_0 < 0, \quad \lambda A_1 + B_1 \leqq \beta_1 \quad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

Si consideri l'equazione $(I_\lambda)$ nell'intervallo $(a_1, b_1)$ e per valori di $\lambda$ maggiori di $\frac{\beta_1}{\alpha}$ e di $\frac{\beta_0}{\alpha}$.

In ogni punto di $(a_1, b_1)$, al tender di $\lambda$ verso $+\infty$, una almeno delle due funzioni $\lambda A_1 + B_1$ e $\lambda A_0 + B_0$ tende verso $-\infty$, mentre l'altra non tende verso $+\infty$.

Pertanto il teorema III del prec. capitolo consente di affermare che, attribuendo a $\lambda$ valori, maggiori di $\frac{\beta_1}{\alpha}$ e di $\frac{\beta_0}{\alpha}$, sufficientemente grandi, si potrà far acquistare al wronskiano di una qualsiasi coppia d'integrali della $(I_\lambda)$, linearmente indipendenti in $(a, b)$ e verificanti in un punto la (53), un numero di zeri in $(a_1, b_1)$, più grande di ogni numero arbitrariamente prefissato.

In particolare, comunque si assegni il numero $\nu$, si può trovare un valore $\lambda^{(\nu)}$, tale che, per ogni $\lambda > \lambda^{(\nu)}$, esista in $(a_1, b_1)$ un numero $n > \nu$ di zeri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ di $F(x, \lambda)$, contando sempre per due ogni zero di $F(x, \lambda)$, che sia al tempo stesso uno zero di $u, v, u', v'$.

Supposto che sia $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$, si deduce, pel lemma del n°. 30, come al numero precedente, l'esistenza di $n$ funzioni $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)$, finite, continue, costantemente decrescenti, assumenti i valori $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rispettivamente per $\lambda = l$, e quindi anche l'esistenza di $n$ valori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dei quali tre qualsiansi non possono coincidere fra loro, pei quali risulta

$$x_1(\lambda_1) = x_2(\lambda_2) = \ldots = x_n(\lambda_n) = b.$$

Pertanto, nell'ipotesi fatta della esistenza dell'intervallo $(a_1, b_1)$, si conclude che, comunque si fissi il numero intero positivo $\nu$, esistono autovalori in numero superiore a $\nu$: esistono, quindi, certamente infiniti autovalori positivi. Di più, poichè si è visto al n.° 24 che tali autovalori sono gli zeri della trascendente intera $F(b, \lambda)$, si avrà ancora che l'insieme da essi costituito è privo di punti di accumulazione.

Analogamente, se si suppone l'esistenza di un intervallo $(a_2, b_2)$, contenuto in $(a, b)$, nel quale una almeno delle due funzioni $A_0$, $A_1$ abbia un minimo positivo $\alpha$, mentre l'altra sia sempre positiva o nulla, detti $\beta_0$ e $\beta_1$ i massimi (positivi o nulli) di $B_0$ e $B_1$ in $(a_2, b_2)$, prendendo valori di $\lambda$ superiori a $\frac{\beta_1}{\alpha}$ e $\frac{\beta_0}{\alpha}$, sarà

$$\lambda(-A_1)+B_1 \leqq -\alpha\lambda+\beta_1<0, \quad \lambda(-A_0)+B_0 \leqq \beta_0 \quad (a_2 \leqq x \leqq b_2),$$

oppure

$$\lambda(-A_0)+B_0 \leqq -\alpha\lambda+\beta_0<0, \quad \lambda(-A_1)+B_1 \leqq \beta_1 \quad (a_2 \leqq x \leqq b_2).$$

Onde, per $\lambda \to +\infty$, si avrà che, in ogni punto di $(a_2, b_2)$, una almeno delle due funzioni $\lambda(-A_1)+B_1$, $\lambda(-A_0)+B_0$ tende a $-\infty$, mentre l'altra non tende a $+\infty$.

Sicchè, prendendo in esame l'equazione

$$(\mathrm{I}_{-\lambda}) \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left[\{\lambda(-A_1)+B_1\}\frac{dy}{dx}\right]+\{\lambda(-A_0)+B_0\}y=0,$$

nell'intervallo $(a_2, b_2)$ e per valori di $\lambda$ maggiori di $\frac{\beta_1}{\alpha}$ e $\frac{\beta_0}{\alpha}$, si dedurrà, allo stesso modo come ora si è visto, l'esistenza di infiniti autovalori positivi $\lambda_i'$, per ciascuno dei quali il wronskiano $F_1(x, \lambda)$ di due integrali della $(\mathrm{I}_{-\lambda})$, dotati di uno zero doppio in $a$, risulta eguale a zero in $b$.

Ma si ha $F_1(x, \lambda) = F(x, -\lambda)$, e pertanto $F(b, -\lambda_i') = 0$; quindi si conclude l'esistenza di infiniti autovalori negativi $-\lambda_i'$.

**33.** Tutti gli autovalori di cui ora si è dimostrata l'esistenza si indicheranno con $\ldots, \lambda_{-n}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, supponendo di averli ordinati in maniera da far risultare

$$\ldots \leqq \lambda_{-n} \leqq \ldots \leqq \lambda_{-1} \leqq \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots.$$

Dalla (38) si trae che, se le funzioni $A_0$ e $A_1$ non assumono valori positivi in $(a, b)$, si avranno soltanto autovalori positivi; e invece, se $A_0$ e $A_1$ non assumo valori negativi in $(a, b)$, si avranno soltanto autovalori negativi. Nel primo caso si porrà $\lambda_{-0} = -\infty$ e nel secondo $\lambda_0 = +\infty$.

Se poi esistono i due intervalli $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ dotati delle proprietà indicate nel numero precedente, allora, da quanto si è detto, risulta che vi saranno infiniti autovalori positivi e infiniti negativi: in questo caso, $\lambda_n$ e $\lambda_{-n}$ saranno finiti, per ogni valore dell'indice $n$.

Ciò posto, si può dimostrare che, per ogni valore di $n$, detti $u(x, \lambda_{\pm n})$ e $v(x, \lambda_{\pm n})$ due integrali linearmente indipendenti in $(a, b)$ della $(\mathrm{I}_{\lambda\pm n})$, dotati di uno zero doppio in $a$, il wronskiano $F(x, \lambda_{\pm n})$ ha ancora, oltre ad $a$ e $b$, altri $n$ zeri, ed $n$ soltanto, in $(a, b)$, ove si contino sempre per due quegli zeri diversi da $a$, nei quali sono insieme nulle $u, v, u', v'$. Mentre, per valori di $\lambda$ soddisfacenti a una delle due limitazioni

$\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$, $\lambda_{-n-1} < \lambda < \lambda_{-n}$, il wronskiano $F(x, \lambda)$ ha, oltre allo zero $a$, altri $n+1$ zeri ed $n+1$ soltanto, tutti interni ad $(a, b)$; e infine, quando $\lambda$ è interno a $(\lambda_{-0}, \lambda_0)$, allora $F(x, \lambda)$ non ha nessuno zero in $(a, b)$, oltre allo zero $a$.

Si prendano in esame, per fissare le idee, esclusivamente valori non negativi del parametro $\lambda$.

Anzitutto, assumendo $\lambda$ in un opportuno intorno destro $(0, \varepsilon)$ dello zero, si potrà ottenere che $F(x, \lambda)$ non si annulli in nessun punto di $(a, b)$, diverso da $a$.

Ammessa l'esistenza in $(a, b)$ dell'intervallo $(a_1, b_1)$ del numero precedente, esisterà certamente, come si è visto, un valore $l > 0$, tale che, per ogni $\lambda > l$, $F(x, \lambda)$ si annulli almeno una volta, nell'interno di $(a, b)$.

Si dividano, quindi, i punti dello intervallo $(0, l)$ in due classi $C_1$, $C_2$, ponendo nella classe $C_1$ i valori di $\lambda$, per cui $F(x, \lambda)$ non si annulla in $(a, b)$, oltre che in $a$, e nella classe $C_2$ quegli altri valori di $\lambda$, per cui $F(x, \lambda)$ si annulla in un punto almeno di $(a, b)$, diverso da $a$. La classe $C_1$ non è vuota, poichè contiene tutti i punti dell'intorno $(0, \varepsilon)$; e neppure la classe $C_2$ è vuota, perchè contiene tutti i punti di un conveniente intorno sinistro di $l$.

In virtù del teorema XIII, si ha poi che, se un valore di $\lambda$ appartiene alla classe $C_1$, vi appartiene pure ogni valore minore, mentre invece, se un valore di $\lambda$ appartiene alla classe $C_2$, vi appartiene pure ogni valore maggiore. Esisterà pertanto un punto di separazione $\lambda_0$ delle due classi $C_1$, $C_2$.

Ne segue che $F(x, \lambda_0)$ non è priva di zeri diversi da $a$ in $(a, b)$, ma non ha zeri interni ad $(a, b)$: essa è, quindi, necessariamente nulla soltanto in $b$, oltre che in $a$.

Se poi risulta

$$u(b, \lambda_0) = v(b, \lambda_0) = u'(b, \lambda_0) = v'(b, \lambda_0) = 0, \tag{59}$$

allora si porrà $\lambda_1 = \lambda_0$ e il secondo autovalore positivo $\lambda_1$ coinciderà col primo $\lambda$.

Nel caso contrario, invece, per ogni valore di $\lambda > \lambda_0$ contenuto in un conveniente intorno destro $(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ di $\lambda_0$, la $F(x, \lambda)$ si annullerà una volta e una volta soltanto nell'interno di $(a, b)$. Infatti, se, per $\lambda$ prossimo quanto si voglia a $\lambda_0$, esistessero due o più zeri $x_1, x_2, \ldots$, diversi da $a$, di $F(x, \lambda)$ in $(a, b)$, essendo (teorema XII) questi zeri funzioni continue di $\lambda$, si avrebbe

$$0 = \lim_{\lambda \to \lambda_0} F\{x_i(\lambda), \lambda\} = F\{\lim_{\lambda \to \lambda_0} x_i(\lambda), \lambda_0\} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

e quindi $\lim_{\lambda \to \lambda_0} x_i(\lambda) = b$; esisterebbero, allora, due o più funzioni continue

$x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots$ soddisfacenti alla $F(x, \lambda) = 0$, assumenti lo stesso valore $b$ per $\lambda = \lambda_0$, il che è impossibile, se non si annullano le $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=b \\ \lambda=\lambda_0}}$, $\left[\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right]_{\substack{x=b \\ \lambda=\lambda_0}}$, o, ciò che è lo stesso, pel teorema X, se non risultano verificate le (59).

D'altra parte, per quanto si è visto al numero precedente, esisterà un valore $l$, tale che, per ogni $\lambda \geqq l$, la $F(x, \lambda)$ si annulli almeno due volte (o abbia almeno uno zero da contarsi due volte) nell'interno di $(a, b)$. Risulterà $l > \lambda_0$. Operando, allora, in modo perfettamente analogo al precedente, si dividano i punti di $(\lambda_0, l)$ in due classi $C_1, C_2$, ponendo in $C_1$ i valori di $\lambda$, per ciascuno dei quali non esiste che uno zero di $F(x, \lambda)$, diverso da $a$, in $(a, b)$, e in $C_2$ i valori di $\lambda$, per ciascuno dei quali esistono due o più zeri, diversi da $a$ (tenendo conto di quegli zeri che valgono per due), di $F(x, \lambda)$ in $(a, b)$.

Le due classi esistono. Di più, pel teorema XIII, se un valore di $\lambda$ appartiene a $C_1$, vi appartiene pure ogni valore minore, mentre invece, se un valore di $\lambda$ appartiene a $C_2$, vi appartiene pure ogni valore maggiore.

Ne segue l'esistenza di un valore $\lambda_1 > \lambda_0$, punto di separazione delle due classi $C_1$ e $C_2$. Il wronskiano $F(x, \lambda_1)$ sarà nullo in $b$ e ulteriormente una ed una sola volta nell'interno di $(a, b)$.

Il valore $\lambda_1$ è pertanto un secondo autovalore positivo e, non sussistendo le (59), è $\lambda_1 > \lambda_0$.

Se poi risulta

$$u(b, \lambda_1) = v(b, \lambda_1) = u'(b, \lambda_1) = v'(b, \lambda_1) = 0, \tag{60}$$

allora si porrà $\lambda_2 = \lambda_1$ e il terzo autovalore positivo $\lambda_2$ coinciderà col secondo $\lambda_1$.

Nel caso contrario, invece, per ogni valore di $\lambda > \lambda_1$, contenuto in un conveniente intorno destro $(\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon)$ di $\lambda_1$, la $F(x, \lambda)$ si annullerà due volte, e due volte soltanto, (o avrà uno zero da contarsi due volte), nell'interno di $(a, b)$. Basta, infatti, osservare come prima che, se, per valori di $\lambda$ prossimi quanto si vuole a $\lambda_1$, esistessero, nell'interno di $(a, b)$, tre o più zeri $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di $F(x, \lambda)$, due almeno di codesti zeri dovrebbero tendere, per $\lambda \to \lambda_1$, a un medesimo zero di $F(x, \lambda_1)$.

Ciò posto, detto $l$ un valore $> \lambda_1$, tale che, per $\lambda > l$, la $F(x, \lambda)$ abbia almeno tre zeri diversi da $a$ (tenendo conto sempre degli zeri che valgono per due) in $(a, b)$, ne seguirà l'esistenza di un valore $\lambda_2 > \lambda_1$, per cui la $F(x, \lambda_2)$ è nulla in $b$ e ulteriormente in due punti, e due punti soltanto, interni ad $(a, b)$ (i quali possono eventualmente coincidere fra loro).

Il valore $\lambda_2$ è pertanto un terzo autovalore positivo, e, non sussistendo le (60), è $\lambda_2 > \lambda_1$.

Così via seguitando, si otterrà, per induzione completa, la dimostrazione di quanto si era affermato.

**34.** Raccogliendo i risultati ottenuti, si può, infine, enunciare il teorema di esistenza degli autovalori:

XIV. *Data l'equazione differenziale lineare autoaggiunta del quart'ordine* $(I_\lambda)$, *supposte verificate le ipotesi del* n.° 23, *esisterà una successione* $\dots, \lambda_{-n}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_{-0}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ *di infiniti autovalori di* $\lambda$

$$\dots \leqq \lambda_{-n} \leqq \dots \leqq \lambda_{-1} \leqq \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \dots \leqq \lambda_n \leqq \dots$$

(*costantemente crescente da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *riuscendo* $\lambda_{-0} = -\infty$ *se* $A_0$ *e* $A_1$ *si mantengono non positive,* $\lambda_0 = +\infty$ *se* $A_0$ *e* $A_1$ *si mantengono non negative in* $(a, b)$). *Per nessun valore di* $h$ *per cui* $\lambda_h$ *sia finito, risulta* $\lambda_h = \lambda_{h+1} = \lambda_{h+2}$, *mentre, per ogni valore di* $h$, *l'equazione* $(I_{\lambda_h})$ *è dotata di un'autosoluzione* $y_h(x)$, *verificante le condizioni terminali*

$$y_h(a) = y_h'(a) = 0, \qquad y_h(b) = y_h'(b) = 0,$$

*riuscendo* $y_h(x)$ *e* $y_{h+1}(x)$ *linearmente indipendenti in* $(a, b)$, *nel caso che sia* $\lambda_h = \lambda_{h+1}$.

*Di più, vi sono nell'intervallo* $(a, b)$ *aperto a sinistra* $|h|$ *punti e* $|h|$ *soltanto* $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \dots, x_{|h|}^{(h)}$, *fra i quali tre qualsiansi non coincidenti tra loro e non più di uno coincidente con* $b$, *tali che, per ogni valore di* $i = 1, 2, \dots, |h|$, *esista un integrale* $y_i^{(h)}(x)$ *della* $(I_{\lambda_h})$, *dotato di uno zero doppio in* $a$ *e di un altro zero doppio in* $x_i^{(h)}$, *riuscendo* $y_i^{(h)}(x)$ *e* $y_{i+1}^{(h)}(x)$ *linearmente indipendenti in* $(a, b)$, *nel caso che i due punti* $x_i^{(h)}, x_{i+1}^{(h)}$ *coincidano fra loro.*

## § 8.

## Un altro problema di autovalori.

**35.** Il teorema XIV, di cui ora si è conseguita la dimostrazione, è un'estensione al caso dell'equazione di quart'ordine del teorema analogo ben conosciuto, pel caso dell'equazione di second'ordine. L'estensione, però, si può ottenere anche in maniera diversa, considerando, invece degli autovalori $\lambda_h$ indicati al n.° 24, degli autovalori, per ciascuno $\mu_h$ dei quali esistano $|h|$ punti distinti $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \dots, x_{|h|}^{(h)}$ nell'interno di $(a, b)$, diversi da $a$ (che si suppongono scritti in ordine crescente di grandezza), i quali godano della proprietà che vi sia un integrale $y_0^{(h)}(x)$ della $(I_{\mu_h})$, dotato di due zeri doppi consecutivi (nel senso indicato al n.° 15 del precedente capitolo) in $a, x_1^{(h)}$, vi sia un integrale $y_r^{(h)}(x)$, per $r = 1, 2, \dots, |h| - 1$, della $(I_{\mu_h})$, dotato di due zeri doppi consecutivi in $x_r^{(h)}, x_{r+1}^{(h)}$, vi sia infine un integrale $y_{|h|}^{(h)}(x)$ della $(I_{\mu_h})$, dotato di due zeri doppi consecutivi in $x_{|h|}^{(h)}, b$.

Gli $|h|+1$ integrali $y_0^{(h)}, y_1^{(h)}, \ldots, y_{|h|}^{(h)}$ della $(I_{\mu_h})$, tutti non identicamente nulli in $(a, b)$, possono essere distinti fra loro, oppure può darsi che due o più di essi coincidano in $(a, b)$.

Non si suppone però qui, come si era fatto pei valori eccezionali $\lambda_h$, che debba esistere un integrale della $(I_{\mu_h})$, dotato di due zeri doppi in $a, b$, nè che debba esistere un integrale della $(I_{\mu_h})$, dotato di due zeri doppi in due qualsiansi non successivi dei punti

$$a, x_1^{(h)}, \ldots, x_{|h|}^{(h)}, b.$$

Per comodità di scrittura, $a$ e $b$ si indicheranno ora anche con $x_0^{(h)}$ e $x_{|h|+1}^{(h)}$ rispettivamente, onde si avrà

$$a = x_0^{(h)} < x_1^{(h)} < \ldots < x_{|h|}^{(h)} < x_{|h|+1}^{(h)} = b.$$

Lo stesso ragionamento che si è fatto al n°. 25, applicato a ciascuno degl'integrali $y_r^{(h)}(x)$ nel rispettivo intervallo $(x_r^{(h)}, x_{r-1}^{(h)})$, per $r = 0, 1, \ldots, |h|$, viene a provare che non possono esistere autovalori $\mu_h$ non reali o nulli.

Così pure la (38), applicata a ciascun integrale $y_r^{(h)}(x)$ nel corrispondente intervallo $(x_r^{(h)}, x_{r+1}^{(h)})$, dà che

$$\mu_h \left[ \int_{x_r^{(h)}}^{x_{r+1}^{(h)}} \left\{ A_1 \left( \frac{dy_r^{(h)}}{dx} \right)^2 + A_0 y_r^{(h)2} \right\} \right] dx < 0,$$

da cui si deduce che, se $A_0(x), A_1(x)$ sono sempre non positive in $(a, b)$, non esisteranno autovalori $\mu_h$ negativi, mentre invece, se $A_0(x), A_1(x)$ sono sempre non negative in $(a, b)$, non esisteranno autovalori $\mu_h$ positivi.

**36.** L'esistenza degli autovalori $\mu_h$ si dedurrà facilmente dal seguente teorema:

XV. *Se, per un dato valore reale $l$ di $\lambda$, esiste un integrale $y(x, l)$ della $(I_l)$, dotato di due zeri doppi in due punti distinti $x_1, x_2$ di $(a, b)$, allora, per ogni valore di $\lambda$ dello stesso segno di $l$ e maggiore di $l$ in valore assoluto, e per ogni punto $a_1$ di $(a, b)$ non interno a $(x_1, x_2)$, esisterà un integrale $w(x, \lambda)$ della $(I_\lambda)$, dotato di uno zero doppio in $a_1$ e di un altro zero doppio in un punto almeno interno a $(x_1, x_2)$. Se poi esistono due integrali indipendenti $y(x, l)$, $\bar{y}(x, l)$ della $(I_l)$, dotati entrambi di due zeri doppi in $x_1, x_2$, allora, per ogni valore di $\lambda$ dello stesso segno di $l$ e maggiore di $l$ in valore assoluto, esisteranno due integrali $w(x, \lambda)$, $\bar{w}(x, \lambda)$ della $(I_\lambda)$, dotati ciascuno di uno zero doppio in $a$, e di uno zero doppio in un altro punto interno a $(x_1, x_2)$, risultando $w(x, \lambda)$ e $\bar{w}(x, \lambda)$ linearmente indipendenti in $(a, b)$, se quest'altro punto è lo stesso pei due integrali.*

Infatti, detti $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$ due integrali, linearmente indipendenti in $(a, b)$, della $(I_\lambda)$, dotati entrambi di uno zero doppio nel punto $x = a_1$,

se non esistesse un integrale $w(x, \lambda)$ della $(I_\lambda)$, dotato di due zeri doppi uno in $a_1$ e l'altro in un punto interno a $(x_1, x_2)$, il wronskiano di $u(x, \lambda)$, $v(x, \lambda)$ non si annullerebbe nell'interno di $(x_1, x_2)$. In tal caso, sarebbe lècito applicare alle due equazioni $(I_\lambda)$, $(I_l)$, nell'intervallo $(x_1, x_2)$, l'identità (21) del prec. capitolo, che ivi si era applicata alle (I) e (II); si otterrebbe così

$$(61)\qquad (l-\lambda)\int_{x_1}^{x_2}(A_1 y'^2 + A_0 y^2)\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\theta\left(y'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}y' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'+u'v}y\right)^2 dx = 0\,.$$

Ma questa relazione è impossibile, giacchè, applicando la (38) all'integrale $y(x, \lambda)$, nell'intervallo $(x_1, x_2)$, si trae

$$l\int_{x_1}^{x_2}(A_1 y'^2 + A_0 y^2)\,dx < 0\,,$$

mentre, per l'ipotesi fatta, $l-\lambda$ sarà certamente di segno opposto a quello di $l$.

Sicchè resta provata intanto la prima parte del teorema.

Per la dimostrazione della seconda parte, ci si appoggerà sull'identità (6), nella quale si ponga, in luogo di $y$, una qualsiasi combinazione lineare

$$z(x, l) = c_1 y(x, l) + c_2 \bar{y}(x, l)\,.$$

Tale identità, nel caso presente, ove si tenga anche conto della (53), si scrive

$$\theta z''^2 + (\lambda A_1 + B_1) z'^2 + (\lambda A_0 + B_0) z^2 - \theta\left(z'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}z' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}z\right)^2$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\left(\theta'\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v} + \theta\frac{u'v'''-u'''v'}{uv'-u'v}\right)z^2 - 2\theta\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}zz' + \theta\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}z'^2\right];$$

e, sottraendo dal secondo membro di questa relazione la derivata

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{zz'}{uv'-u'v}\{\theta(uv'''-u'''v) + \theta'(uv''-u''v) - \vartheta(u'v''-u''v') - (\lambda A_1 + B_1)(uv'-u'v)\}\right],$$

che, per la (53), è identicamente nulla, si potrà scrivere ancora

$$(62)\quad \theta z''^2 + (\lambda A_1 + B_1) z'^2 + (\lambda A_0 + B_0) z^2 - \theta\left(z'' - \frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}z' + \frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}z\right)^2$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\{(u'v''-u''v')z - (uv''-u''v)z'\}\frac{\theta' z - \theta z'}{uv'-u'v} + \{(u'v'''-u'''v')z - (uv'''-u'''v)z'\}\frac{\theta z}{uv'-u'v} + (\lambda A_1 + B_1) zz'\right].$$

Inoltre bisogna ricordare (cfr. il n.° 7 del prec. capitolo) che l'espressione di cui figura la derivata al secondo membro della (62) è nulla in $x_1$ e in $x_2$.

Ora si supponga, se è possibile, che esista un solo punto $\xi$, in cui si annulli $uv' - u'v$, senza che vi si annullino, nello stesso tempo, $u, v, u', v'$. In tal caso, le costanti $c_1, c_2$, che determinano $z(x, l)$, si potranno sempre determinare in maniera tale da far riuscire

$$(63)\qquad \begin{aligned} &[(u'v'' - u''v')z - (uv'' - u''v)z']_{x=\xi} = 0, \\ &[(u'v''' - u'''v')z - (uv''' - u'''v)z']_{x=\xi} = 0, \end{aligned}$$

come sùbito si riconosce, osservando che risulta

$$(64)\qquad \begin{aligned} &[(u'v'' - u''v')(uv''' - u'''v) - (uv'' - u''v)(u'v''' - u'''v')]_{x=\xi} \\ &= [-(uv' - u'v)(u''v''' - u'''v'')]_{x=\xi} = 0. \end{aligned}$$

Con ciò, se la derivata di $uv' - u'v$ nel punto $\xi$ è diversa da zero, l'espressione, di cui figura la derivata al secondo membro della (62), è certo finita e continua anche nel punto $x = \xi$.

Se poi la derivata di $uv' - u'v$ nel punto $\xi$ è, invece, eguale a zero, allora sarà (cfr. il n°. 7)

$$u(\xi) = 0, \quad v(\xi) = 0, \quad [u'v'' - u''v']_{x=\xi} = 0$$

e sarà nulla anche la derivata seconda di $uv' - u'v$ nel punto $\xi$, mentre sarà ivi certamente diversa da zero la derivata terza, dato che $u(\xi), v(\xi), u'(\xi), v'(\xi)$ si son supposte non tutte nulle.

In tal caso, le (63) dànno $z(\xi) = 0$, onde saranno certo nulle, per $x = \xi$, anche le derivate

$$\frac{d}{dx}[(u'v''' - u'''v')z - (uv''' - u'''v)z']$$

$$= (u'v^{IV} - u^{IV}v')z + (u''v''' - u'''v'')z - (uv^{IV} - u^{IV}v)z' - (uv''' - u'''v)z'',$$

$$\frac{d}{dx}[(u'v'' - u''v')z - (uv'' - u''v)z']$$

$$= (u'v''' - u'''v')z - (uv''' - u'''v)z' - (uv'' - u''v)z'',$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(u'v'' - u''v')z - (uv'' - u''v)z']$$

$$= (u'v^{IV} - u^{IV}v')z + (u''v''' - u'''v'')z - (uv^{IV} - u^{IV}v)z'$$

$$- 2(uv''' - u'''v)z'' - (u'v'' - u''v')z'' - (uv'' - u''v)z'''.$$

Quindi, nelle due espressioni frazionarie

$$\frac{(u'v''-u''v')z-(uv''-u''v)z'}{uv'-u'v}, \qquad \frac{(u'v'''-u'''v')z-(uv'''-u'''v)z'}{uv'-u'v}z,$$

che figurano al secondo membro della (62), il numeratore sarà anch'esso, come il denominatore, nullo insieme con le prime due derivate per $x=\xi$. Pertanto l'espressione di cui compare la derivata in quel secondo membro è finita e continua, anche nel punto $x=\xi$; onde, moltiplicando la (62) per $dx$ e integrando poi fra $x_1$ e $x_2$, si trae

$$\int_{x_1}^{x_2}\theta z''^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(\lambda A_1+B_1)z'^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(\lambda A_0+B_0)z^2\,dx$$
$$-\int_{x_1}^{x_2}\theta\Big(z''-\frac{uv''-u''v}{uv'-u'v}z'+\frac{u'v''-u''v'}{uv'-u'v}z\Big)^2dx=0.$$

Ora, sottraendo questa relazione dall'altra

$$\int_{x_1}^{x_2}\theta z''^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(l A_1+B_1)z'^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(l A_0+B_0)z^2\,dx=0$$

(la quale si ottiene allo stesso modo come la (37) del n.° 25), si deduce, anche in questo caso, la (61), la quale, come si è visto, è impossibile.

Pertanto: o nel punto $\xi$ si annulleranno allo stesso tempo $u, v, u', v'$, oppure, oltre al punto $\xi$, vi sarà almeno un altro punto in cui $uv'-u'v$ è eguale a zero.

Con ciò il teorema XV risulta del tutto dimostrato.

**37.** Si può anche provare, senz'alcuna difficoltà, che, se esiste l'autovalore $\mu_h$, esso dovrà essere certo, in valor assoluto, maggiore dell'autovalore $\lambda_h$, di cui si è precedentemente dimostrata l'esistenza.

Si supponga, invero, che per $\lambda=\mu_h$ esistano gli $|h|$ punti $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \ldots, x_{|h|}^{(h)}$, dotati della proprietà indicata al n.° 35; e si considerino due integrali $u(x), v(x)$ della $(\mathrm{I}_{\mu_h})$, linearmente indipendenti in $(a,b)$, dotati di uno zero doppio per $x=a$.

In virtù della (61), applicata ad ogni funzione $y_r^{(h)}(x)$ nel rispettivo intervallo $(x_r^{(h)}, x_{r+1}^{(h)})$, ponendo $l=\lambda=\mu_h$, si può allora affermare che il wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$, se $u$ e $v$ sono indipendenti da $y_r^{(h)}(x)$, possiede almeno uno zero nell'intervallo $(x_r^{(h)}, x_{r+1}^{(h)})$.

Se, invece, $y_r^{(h)}(x)$ è una combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$, allora il wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$ si annulla in $x_r^{(h)}$ e $x_{r+1}^{(h)}$.

Pertanto, complessivamente, il wronskiano $uv'-u'v$ possiede almeno $|h|$ zeri nell'interno di $(a,b)$.

E ciò prova, in base al teorema XIV, come si era affermato, che $|\lambda_h|\leqq|\mu_h|$.

Giova anche notare il seguente corollario, immediata conseguenza del teorema XV:

XVI. *Se vi sono, per un determinato valore reale $l$ di $\lambda$, $n$ punti distinti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, diversi da $a$, tali che esistano $n$ integrali $y_0(x,l), y_1(x,l), \ldots, y_{n-1}(x,l)$ della $(I_l)$, dei quali $y_0(x,l)$ sia dotato di due zeri doppi consecutivi in $a, \xi_1$ e $y_r(x,l)$, per $r = 1, 2, \ldots, n-1$, sia dotato di due zeri doppi consecutivi in $\xi_r, \xi_{r+1}$, allora, per ogni valore di $\lambda$ del medesimo segno di $l$, vi saranno o no, in $(a, \xi_n)$, $n$ punti diversi da $a$, i quali godano di questa stessa proprietà, secondochè sarà $|\lambda| \geqq |l|$ o $|\lambda| < |l|$.*

**38.** La dimostrazione dell'esistenza degli autovalori $\mu_h$ si ottiene con un ragionamento perfettamente simile a quello del n°. 32.

Si supponga, p. es., che esista un intervallo $(a_1, b_1)$, in ogni punto del quale una almeno delle $A_0(x)$ e $A_1(x)$ sia negativa, mentre l'altra sia negativa o nulla, e si considerino esclusivamente valori positivi del parametro $\lambda$.

Anzitutto si ha che il primo autovalore positivo $\mu_0$ coincide con $\lambda_0$. Infatti, per $\lambda = \lambda_0$, avviene che l'equazione $(I_{\lambda_0})$ possiede un integrale dotato di due zeri doppi in $a$ e $b$, mentre non possiede nessun integrale dotato di due zeri doppi in $a$ e in un punto interno all'intervallo $(a, b)$.

Per $\lambda > \mu_0 = \lambda_0$, esisterà, in virtù del teorema XVI, nell'interno di $(a, b)$, almeno un punto $x_1$, tale che vi sia un integrale della $(I_\lambda)$, dotato di due zeri doppi consecutivi in $a$ e $x_1$. Ma è impossibile che, per $\lambda$ prossimo quanto si voglia a $\mu_0$, vi sia sempre in $(x_1, b)$ un punto $x_2$, diverso da $x_1$, tale che esista un integrale della $(I_\lambda)$, dotato di due zeri doppi in $x_1, x_2$.

Si ha invero $\lim_{\lambda \to \mu_0} x_1(\lambda) = b$. Pertanto, se esistesse, per $\lambda$ arbitrariamente prossimo a $\mu_0$, il punto $x_2$ suddetto, allora, preso come si voglia il numero $\varepsilon > 0$ e il valore $\mu > \mu_0$, sarebbe sempre possibile determinare $\lambda$, minore di $\mu$ e sufficientemente vicino a $\mu_0$, perchè esistesse un integrale della $(I_\lambda)$, dotato di due zeri doppi in due punti $x_1, x_2$ contenuti entrambi in $(b - \varepsilon, b)$.

In tal caso, esisterebbe pure, pel teorema XV, un integrale della $(I_\mu)$ (cui si riduce la $(I_\lambda)$ per $\lambda = \mu$), dotato di uno zero doppio in $a$ e di un altro zero doppio in un punto interno a $(x_1, x_2)$, e quindi anche interno a $(b - \varepsilon, b)$: cioè il wronskiano di due integrali linearmente indipendenti in $(a, b)$ della $(I_\mu)$, dotati di uno zero doppio in $a$, si annullerebbe in un punto interno a $(b - \varepsilon, b)$; onde, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, codesto wronskiano si annullerebbe infinite volte in $(a, b)$, il che, come è noto, è impossibile.

Vi sarà quindi un intorno destro di $\mu_0$, tale che, preso $\lambda$ in siffatto intorno, non esista il punto $x_2$ in $(x_1, b)$.

D'altra parte, può certo determinarsi un valore $l > \lambda_0$, tale che, per ogni valore $\lambda \geqq l$, esista il punto $x_2$.

Sicchè, dividendo i valori di $\lambda$, compresi fra $\lambda_0$ ed $l$, in due classi $C_1, C_2$, col porre in $C_1$ quei valori di $\lambda$, per cui il punto $x_2$ non esiste in $(x_1, b)$ e in $C_2$ quegli altri valori di $\lambda$, per cui esiste il punto $x_2$ in $(x_1, b)$, si avrà che le due classi $C_1, C_2$ risultano entrambe non vuote.

Di più, in base al teorema XVI, si ha che, se un valore di $\lambda$ appartiene a $C_1$, vi apparterrà pure ogni valore minore, mentre invece, se un valore di $\lambda$ appartiene a $C_2$, vi apparterrà pure ogni valore maggiore. Pertanto esisterà un punto di separazione $\mu_1$ delle due classi $C_1, C_2$.

Per $\lambda = \mu_1$, il punto $x_2$ esisterà e coinciderà con $b$. Si ha quindi un secondo autovalore positivo, ed è, in ogni caso, $\mu_1 > \mu_0$.

Ripetendo sempre questo medesimo ragionamento, si dimostra, come al n.° 33, l'esistenza di infiniti autovalori positivi $\mu_h$; e di qui si deduce, allo stesso modo come si è fatto innanzi, che, se esiste un intervallo $(a_2, b_2)$, in ogni punto del quale una almeno delle $A_0(x)$, $A_1(x)$ sia positiva, mentre l'altra sia positiva o nulla, allora vi saranno pure infiniti autovalori $\mu_h$ negativi.

Inoltre, poichè, come si è visto al numero precedente, per ogni valore di $h$, è $|\mu_h| \geqq |\lambda_h|$, l'insieme dei valori $\mu_h$, come quello dei valori $\lambda_h$, sarà privo di punti di accumulazione.

Si conclude perciò che:

XVII. *Data l'equazione differenziale lineare autoaggiunta del quart'ordine* $(\mathrm{I}_\lambda)$, *supposte verificate le ipotesi del n.° 23, esisterà una successione di infiniti autovalori di* $\lambda$

$$\ldots, \mu_{-n}, \ldots, \mu_{-1}, \mu_{-0}, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \cdots$$

$$\ldots < \mu_{-n} < \ldots < \mu_{-1} < \mu_{-0} < 0 < \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n < \ldots$$

(*costantemente crescente da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *riuscendo* $\mu_{-0} = -\infty$, *se* $A_0$ *e* $A_1$ *si mantengono non positive,* $\mu_0 = +\infty$ *se* $A_0$ *e* $A_1$ *si mantengono non negative in* $(a, b)$), *tali che, per ogni valore dell'indice* $h$, *si abbiano* $|h|$ *punti* $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \ldots, x_{|h|}^{(h)}$, *nell'interno di* $(a, b)$, *i quali godano della proprietà che vi sia un integrale* $y_0^{(h)}(x)$ *della* $(\mathrm{I}_{\mu_h})$, *dotato di due zeri doppi consecutivi in* $a$, $x_1^{(h)}$, *un integrale* $y_r^{(h)}(x)$, *per* $r = 1, 2, \ldots, |h| - 1$, *della* $(\mathrm{I}_{\mu_h})$, *dotato di due zeri doppi consecutivi in* $x_r^{(h)}, x_{r+1}^{(h)}$, *e infine un integrale* $y_{|h|+1}^{(h)}(x)$ *della* $(\mathrm{I}_{\mu_h})$, *dotato di due zeri doppi consecutivi in* $x_{|h|}^{(h)}, b$.

## Capitolo terzo.

## Proprietà di minimo degli autovalori.

### § 9.

### Prima forma del teorema di minimo.

**39.** Gli autovalori $\lambda_h$, di cui si è dimostrata l'esistenza col teorema XIV del § 7, godono di notevoli proprietà di minimo, analoghe a quelle che valgono per gli autovalori relativi alle equazioni di second'ordine.

Un primo teorema di minimo, che adesso verrà dimostrato, si può enunciare, conservando le notazioni del teorema XIV, al modo seguente:

XVIII. *Sia $\Gamma'_h$ l'aggregato delle funzioni reali $y(x)$, definite nell'intervallo $(a, b)$, ivi continue e derivabili, con derivata prima assolutamente continua a numeri derivati finiti di quadrato sommabile, dotate di due zeri doppi in $a, b$, verificanti infine le condizioni*

$$(65)\qquad \begin{aligned} &[(u'_h v''_h - u''_h v'_h)\, y - (u_h v''_h - u''_h v_h)\, y']_{x=x_i^{(h)}} = 0, \\ &[(u'_h v'''_h - u'''_h v'_h)\, y - (u_h v'''_h - u'''_h v_h)\, y']_{x=x_i^{(h)}} = 0, \end{aligned}$$

*se $u_h, v_h, u'_h, v'_h$ non sono tutte nulle nel punto $x_i^{(h)}$;*

$$(65')\qquad y(x_i^{(h)}) = 0, \quad y'(x_i^{(h)}) = 0,$$

*se invece risulta $x_i^{(h)} = x_{i-1}^{(h)}$, oppure $x_i^{(h)} = x_{i+1}^{(h)}$, cioè se si ha*

$$(66)\qquad u_h(x_i^{(h)}) = v_h(x_i^{(h)}) = u'_h(x_i^{(h)}) = v'_h(x_i^{(h)}) = 0.$$

*L'integrale*

$$J_h[y] = \int_a^b \{\theta y''^2 + (\lambda_h A_1 + B_1) y'^2 + (\lambda_h A_0 + B_0) y^2\}\, dx$$

*ha in $\Gamma'_h$ per minimo la zero, che consegue quando e solo quando $y(x)$ è un'autosoluzione corrispondente all'autovalore $\lambda_h$. Si ha cioè, per ogni funzione $y(x)$ di $\Gamma'_h$,*

$$\int_a^b \theta y''^2\, dx + \int_a^b B_1 y'^2\, dx + \int_a^b B_0 y^2\, dx \geqq -\lambda_h \int_a^b (A_1 y'^2 + A_0 y^2)\, dx,$$

*il segno eguale sussistendo quando e solo quando $y(x)$ è un'autosoluzione corrispondente all'autovalore $\lambda_h$.*

Sia, infatti, $y(x)$ una funzione dell'aggregato $\Gamma'_h$ e si applichi l'identità (62) del paragrafo prec. all'equazione $(I_{\lambda_h})$, ponendo $y$, $u_h$ e $v_h$ in luogo di $z$, $u$ e $v$ rispettivamente:

$$\theta y''^2+(\lambda_h A_1+B_1)y'^2+(\lambda_h A_0+B_0)y^2-\theta\Big(y''-\frac{u_h v_h''-u_h'' v_h}{u_h v_h'-u_h' v_h}y'+\frac{u_h' v_h''-u_h'' v_h'}{u_h v_h'-u_h' v_h}y\Big)^2$$
$$=\frac{d}{dx}\Big[\{(u_h' v_h''-u_h'' v_h')y-(u_h v_h''-u_h'' v_h)y'\}\frac{\theta' y-\theta y'}{u_h v_h'-u_h' v_h}$$
$$+\{(u_h' v_h'''-u_h''' v_h')y-(u_h v_h'''-u_h''' v_h)y'\}\frac{\theta y}{u_h v_h'-u_h' v_h}+(\lambda_h A_1+B_1)yy'\Big].$$

Dato che sussistono le (65), l'espressione, di cui figura al derivata al secondo membro della relazione ora scritta, sarà funzione finita e continua di $x$, anche nei punti $x_i^{(h)}$, in cui il denominatore $u_h v_h' - u_h' v_h$ si annulla, senza che valgano le (66), ciò che si riconosce con lo stesso ragionamento fatto più innanzi al n.° 36.

Inoltre quell'espressione sarà ancora finita e continua nei punti $x_i^{(h)}$ in cui valgono le (66). Infatti per ognuno di tali punti, se ve ne sono, dato che devono sussistere le (65′), si può ripetere il ragionamento fatto pel punto $x_i$, nei n.i 6 e 7 del primo capitolo, ragionamento dal quale risulta inoltre che l'espressione in esame assume il valore zero nei punti in cui valgono le (65′): essa assume, perciò, il valore zero anche negli estremi $a$ e $b$.

Sicchè, moltiplicando la (62′) per $dx$ e integrando poi tra $a$ e $b$, si deduce che

$$\int_a^b\{\theta y''^2+(\lambda_h A_1+B_1)y'^2+(\lambda_h A_0+B_0)y^2\}dx$$
$$-\int_a^b\theta\Big(y''-\frac{u_h v_h''-u_h'' v_h}{u_h v_h'-u_h' v_h}y'+\frac{u_h' v_h''-u_h'' v_h'}{u_h v_h'-u_h' v_h}y\Big)^2dx=0,$$

da cui risulta, come si voleva,

$$J[y]\geqq 0, \tag{67}$$

il segno eguale potendo sussistere quando, e solo quando, sia identicamente nullo il wronskiano delle tre funzioni $y$, $u_h$, $v_h$, cioè la $y$ sia una combinazione lineare di $u_h$ e $v_h$.

Inoltre, poichè la $y$ deve essere dotata di due zeri doppi in $a$, $b$, si avrà che, se a $\lambda_h$ corrisponde un'unica autosoluzione $y_h(x)$ (determinata a meno di un fattore costante), allora la $y_h(x)$ sarà una combinazione lineare di $u_h(x)$, $v_h(x)$ e sussisterà il segno eguale nella (67), quando, e solo quando, $y=\alpha y_h(x)$, con $\alpha$ costante arbitraria. Se invece all'autovalore $\lambda_h$ corrispondono due autosoluzioni linearmente indipendenti, allora $u_h$ e $v_h$ saranno due autosoluzioni siffatte e varrà il segno eguale nella (67), quando, e solo quando, sarà $y=\alpha_1 u_h+\alpha_2 v_h$, con $\alpha_1$, $\alpha_2$ costanti arbitrarie.

Occorre appena avvertire che una autosoluzione $y_h$ corrispondente all'autovalore $\lambda_h$ appartiene certamente all'aggregato $\Gamma_h'$. La $y_h$ invero, essendo una combinazione lineare di $u_h$ e $v_h$, verificherà ovviamente le (65′), nei punti $x_i^{(h)}$ in cui valgono le (66), e verificherà le (65), negli altri punti

in cui $u_h v_h' - u_h' v_h$ è eguale zero, poichè, in tali punti, i primi membri delle (65) non sono altro rispettivamente che i due determinanti

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ u_h & u_h' & u_h'' \\ v_h & v_h' & v_h'' \end{vmatrix}_{x=x_i^{(h)}}, \qquad \begin{vmatrix} y & y' & y''' \\ u_h & u_h' & u_h''' \\ v_h & v_h' & v_h''' \end{vmatrix}_{x=x_i^{(h)}},$$

i quali riescono identicamente nulli in $(a, b)$.

## § 10.

## Seconda forma del teorema di minimo.

**40.** Al teorema di minimo dimostrato nel numero precedente si può dare una forma differente, mutando il campo funzionale $\Gamma_h'$ di variabilità della funzione $y(x)$, col sostituire alle condizioni (65), (65′) delle altre condizioni di tipo diverso.

A tale scopo, converrà premettere il seguente teorema:

XIX. *Sia $n$ un numero naturale qualsiasi: si indichino con $x_{i_1}^{(n)}, x_{i_2}^{(n)}, \ldots, x_{i_\nu}^{(n)}$ i punti, se esistono, interni ad $(a, b)$, in ciascuno $x_{i_r}^{(n)}$ dei quali risulta*

$$u_n(x_{i_r}^{(n)}) = v_n(x_{i_r}^{(n)}) = u_n'(x_{i_r}^{(n)}) = v_n'(x_{i_r}^{(n)}) = 0;$$

*con $x_{j_1}^{(n)}, x_{j_2}^{(n)}, \ldots, x_{j_{\nu'}}^{(n)}$ i punti, se esistono, diversi dai precedenti, interni ad $(a, b)$, in ciascuno $x_{j_s}^{(n)}$ dei quali risulta*

$$u_n(x_{j_s}^{(n)}) = v_n(x_{j_s}^{(n)}) = 0;$$

*con $x_{k_1}^{(n)}, x_{k_2}^{(n)}, \ldots, x_{k_{n-2\nu-\nu'}}^{(n)}$, infine, gli altri punti, se ne esistono ancora, in cui si annulla $u_n v_n' - u_n' v_n$. Ciò posto, detto $W[u_n, v_n, y_h]_x$ il wronskiano delle tre funzioni $u_n(x), v_n(x), y_h(x)$, si ha la disuguaglianza*

$$(68) \quad \left| \begin{array}{lll} y_0(x_{i_1}^{(n)}), & y_1(x_{i_1}^{(n)}), & \ldots, y_{n-1}(x_{i_1}^{(n)}) \\ y_0'(x_{i_1}^{(n)}), & y_1'(x_{i_1}^{(n)}), & \ldots, y_{n-1}'(x_{i_1}^{(n)}) \\ \cdots\cdots\cdots\

*Una disuguaglianza del tutto analoga si avrebbe se, invece di $n$, vi fosse un indice $-n$ negativo: basterebbe, in tal caso, porre $y_{-0}(x), y_{-1}(x), \ldots, y_{-n+1}(x)$ invece di $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$.*

Infatti, se non sussiste la (68), si potranno determinare $n$ costanti non tutte nulle $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, verificanti le $n$ equazioni lineari omogenee

$$(69)\qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x_{i_r}^{(n)}) = 0, \qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y'_{h-1}(x_{i_r}^{(n)}) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$(69')\qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x_{j_s}^{(n)}) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu'),$$

$$(69'')\qquad 0 = \sum_{h=1}^{n} c_{h-1} \begin{vmatrix} u_n(x_{k_t}^{(n)}), & v_n(x_{k_t}^{(n)}), & y_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \\ u'_n(x_{k_t}^{(n)}), & v'_n(x_{k_t}^{(n)}), & y'_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \\ u''_n(x_{k_t}^{(n)}), & v''_n(x_{k_t}^{(n)}), & y''_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \end{vmatrix}$$

$$= \Big[(u'_n v''_n - u''_n v'_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1} - (u_n v''_n - u''_n v_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y'_{h-1}\Big]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$$

$$(t = 1, 2, \ldots, n - 2\nu - \nu').$$

Si avranno inoltre le relazioni

$$(69''')\quad 0 = \Big[(u'_n v'''_n - u'''_n v'_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1} - (u_n v'''_n - u'''_n v_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y'_{h-1}\Big]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} c_{h-1} \begin{vmatrix} u_n(x_{k_t}^{(n)}), & v_n(x_{k_t}^{(n)}), & y_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \\ u'_n(x_{k_t}^{(n)}), & v'_n(x_{k_t}^{(n)}), & y'_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \\ u'''_n(x_{k_t}^{(n)}), & v'''_n(x_{k_t}^{(n)}), & y'''_{h-1}(x_{k_t}^{(n)}) \end{vmatrix}$$

$$(t = 1, 2, \ldots, n - 2\nu - \nu'),$$

le quali vengono di conseguenza dalle (69''), poichè $[u'_n v''_n - u''_n v'_n]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$ e $[u_n v''_n - u''_n v_n]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$ non sono entrambi nulli, come si è visto al n.° 7, non essendo tali $u_n(x_{k_t}^{(n)})$ e $v_n(x_{k_t}^{(n)})$, e poichè, d'altra parte,

$$(70)\quad [(u'_n v''_n - u''_n v'_n)(u_n v'''_n - u'''_n v_n) - (u_n v''_n - u''_n v_n)(u'_n v'''_n - u'''_n v'_n)]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$$

$$= [-(u_n v'_n - u'_n v_n)(u''_n v'''_n - u'''_n v''_n)]_{x = x_{k_t}^{(n)}} = 0.$$

Ma allora la combinazione lineare

$$\eta(x) = \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x)$$

è una particolare funzione, dotata di due zeri doppi in $a$ e $b$, la quale soddisfa alle condizioni (65) per $h = n$, nei punti $x_{j_s}^{(n)}$, $x_{k_t}^{(n)}$, e alle (65'), nei punti $x_{i_r}^{(n)}$. In altri termini, si riconosce che la $\eta(x)$ è una funzione dell'aggregato $\Gamma'_n$.

Si può scrivere pertanto, in virtù del teorema XVIII,

$$0 \leqq J_n[\eta] = \int_a^b \theta \Big( \sum_{h=1}^{n} c_{h-1} y''_{h-1} \Big)^2 dx + \int_a^b (\lambda_n A_1 + B_1) \Big( \sum_{h=1}^{n} c_{h-1} y'_{h-1} \Big)^2 dx$$
$$+ \int_a^b (\lambda_n A_0 + B_0) \Big( \sum_{h=1}^{n} c_{h-1} y_{h-1} \Big)^2 dx .$$

Questa relazione poi, tenendo conto delle (35) e (36), applicate a tutte le coppie di autosoluzioni $y_h$, $y_k$, con $h$ e $k$ compresi fra zero ed $n-1$, si muta nell'altra

$$0 \leqq J_n[\eta] = \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}^2 \int_a^b \{ \theta y''^2_{h-1} + (\lambda_n A_1 + B_1) y'^2_{h-1} + (\lambda_n A_0 + B_0) y^2_{h-1} \} dx;$$

e infine, valendosi della (37) applicata ad $y_{h-1}$, per $h = 1, 2, \ldots, n$, essa si può scrivere ancora

$$0 \leqq J_n[\eta] = \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}^2 \int_a^b (\lambda_n - \lambda_{h-1}) (A_1 y'^2_{h-1} + A_0 y^2_{h-1}) dx .$$

Ma la (38) mostra chiaramente che questa relazione non può sussistere se non quando tutte le costanti $c_{h-1}$, per $h = 1, 2, \ldots, n$, siano eguali a zero. E quindi resta provato che deve valere la disuguaglianza (68).

**41.** Ciò premesso, si può passare senz'altro alla dimostrazione del seguente ulteriore teorema di minimo:

XX. *Sia $\Gamma''_n$ ($\Gamma''_{-n}$) l'aggregato delle funzioni reali $y(x)$, definite nell'intervallo $(a, b)$, ivi continue e derivabili, con derivata prima assolutamente continua, a numeri derivati finiti di quadrato sommabile in $(a, b)$, dotate di due zeri doppi in $a$ e $b$ e sottoposte alle $n$ condizioni*

$$\int_a^b A_1 y'_0 y' dx + \int_a^b A_0 y_0 y dx = \int_a^b A_1 y'_1 y' dx + \int_a^b A_0 y_1 y dx = \ldots$$
$$= \int_a^b A_1 y'_{n-1} y' dx + \int_a^b A_0 y_{n-1} y dx = 0,$$

(71)
$$\Big( \int_a^b A_1 y'_{-0} y' dx + \int_a^b A_0 y_{-0} y dx = \int_a^b A_1 y'_{-1} y' dx + \int_a^b A_0 y_{-1} y dx = \ldots$$
$$= \int_a^b A_1 y'_{-n+1} y' dx + \int_a^b A_0 y_{-n+1} y dx = 0 \Big).$$

*L'integrale $J_n[y]$ ($J_{-n}[y]$) ha in $\Gamma''_n$ ($\Gamma''_{-n}$) per minimo lo zero, che consegue quando e solo quando $y \equiv \alpha y_n$ ($y \equiv \alpha y_{-n}$), $\alpha$ designando una costante, se vi è un'unica autosoluzione $y_n$ ($y_{-n}$), determinata a meno di un fattore costante, corrispondente all'autovalore $\lambda_n$ ($\lambda_{-n}$); quando e solo quando, invece, $y \equiv \alpha_1 y_n + \alpha_2 \bar{y}_n$ ($y \equiv \alpha_1 y_{-n} + \alpha_2 \bar{y}_{-n}$), $\alpha_1, \alpha_2$ designando*

*due costanti, si vi sono due autosoluzioni indipendenti* $y_n$, $\bar{y}_n$ $(y_{-n}, \bar{y}_{-n})$, *corrispondenti all'autovalore* $\lambda_n$ $(\lambda_{-n})$, *cioè se* $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ $(\lambda_{-n} = \lambda_{-n-1})$, *oppure* $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ $(\lambda_{-n} = \lambda_{-n+1})$.

Infatti, sia $y(x)$ una funzione di uno dei due aggregati $\Gamma_n''$, $\Gamma_{-n}''$, p. es. di $\Gamma_n''$.

Anche se $y(x)$ non verifica le (65), (65'), si potrà sempre nondimeno costruire una combinazione lineare

$$\eta(x) = y(x) + \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x),$$

che soddisfi a quelle condizioni.

Basterà, invero, determinare $n$ costanti $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, soluzioni del sistema di $n$ equazioni lineari

$$(72)\quad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x_{i_r}^{(n)}) = -\,y(x_{i_r}^{(n)}), \qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}'(x_{i_r}^{(n)}) = -\,y'(x_{i_r}^{(n)})$$
$$(r = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$(72')\qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}(x_{j_s}^{(n)}) = -\,y(x_{j_s}^{(n)}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu'),$$

$$(72'')\quad \Big[(u_n' v_n'' - u_n'' v_n') \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1} - (u_n v_n'' - u_n'' v_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}'\Big]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$$
$$= -\,[(u_n' v_n'' - u_n'' v_n')\, y - (u_n v_n'' - u_n'' v_n)\, y']_{x = x_{k_t}^{(n)}} \quad (t = 1, 2, \ldots, n - 2\nu - \nu'),$$

ciò che può sempre certamente farsi, e in modo unico, in virtù del teorema XIX.

Dalle (72'') segue pure, in virtù della (70)

$$(72''')\quad \Big[(u_n' v_n''' - u_n''' v_n') \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1} - (u_n v_n''' - u_n''' v_n) \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}'\Big]_{x = x_{k_t}^{(n)}}$$
$$= -\,[(u_n' v_n''' - u_n''' v_n')\, y - (u_n v_n''' - u_n''' v_n)\, y']_{x = x_{k_t}^{(n)}} \quad (t = 1, 2, \ldots, n - 2\nu - \nu').$$

Sicchè la funzione $\eta(x)$ risulta proprio una funzione dell'aggregato $\Gamma_n'$.

Applicando quindi alla $\eta(x)$ il teorema XVIII, si può scrivere

$$(73)\qquad 0 \leqq J_n[\eta] = \int_a^b \theta \Big(y'' - \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}''\Big)^2 dx$$
$$+ \int_a^b (\lambda_n A_1 + B_1) \Big(y' + \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}'\Big)^2 dx$$
$$+ \int_a^b (\lambda_n A_0 + B_0) \Big(y + \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}\, y_{h-1}\Big)^2 dx.$$

Ora si tenga presente che devono sussistere le relazioni

$$\int_a^b \theta\, y''_{h-1}\, y''\, dx + \int_a^b (\lambda_{h-1} A_1 + B_1)\, y'_{h-1}\, y'\, dx + \int_a^b (\lambda_{h-1} A_0 + B_0)\, y_{h-1}\, y\, dx = 0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n),$$

le quali si ottengono allo stesso modo come la (34). Di più, per le (71), tali relazioni si riducono a

$$\int_a^b \theta\, y''_{h-1}\, y''\, dx + \int_a^b B_1\, y'_{h-1}\, y'\, dx + \int_a^b B_0\, y_{h-1}\, y\, dx = 0 \tag{74}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n).$$

E si riconosce quindi immediatamente, in base alle (35), (36), (74), (37), che la (73) si può scrivere

$$0 \leqq J_n[\eta] = J_n[y] + \sum_{h=1}^{n} c_{h-1}^2 (\lambda_n - \lambda_{h-1}) \left[ \int_a^b A_1 y'^2_{h-1}\, dx + \int_a^b A_0 y^2_{h-1}\, dx \right],$$

onde si trae infine, ricordando la (38),

$$0 \leqq J_n[\eta] \leqq J_n[y].$$

L' integrale $J_n[y]$ è pertanto sempre positivo o nullo; e precisamente esso riesce eguale a zero, quando le costanti $c_{h-1}$ sono tutte nulle e di più risulta pure $J_n[\eta] = 0$, cioè quando $y(x)$ coincide con $\eta(x)$ e $\eta(x)$ è (teorema XVIII) un' autosoluzione corrispondente all' autovalore $\lambda_n$.

Resta, così, del tutto dimostrato il teorema XX, che è il teorema di minimo per le autosoluzioni dell' equazione autcaggiunta del quart' ordine, posto nella forma hilbertiana.

Napoli, 9. Febbraio 1929. VII.

(Eingegangen am 15. Februar 1929.)

# Über berührende Kegelschnitte.

Von

Erich Podehl in Königsberg.

Die Sätze von Minkowski, Böhmer[1]) und Mohrmann[2]) über stets elliptisch und stets hyperbolisch gekrümmte Kurven lassen sich kurz und einheitlich durch Anwendung eines Hilfssatzes von Reidemeister[3]) beweisen. Im folgenden sollen einige weitere Eigenschaften jener Kurven dargestellt werden, die sich in Anlehnung an diesen Hilfssatz ableiten lassen und eine Arbeit von Ogiwara[4]) über stets elliptiseh gekrümmte Ovale ergänzen.

## § 1.

Zur Einführung gebe ich den Beweis des genannten Hilfssatzes wieder, der a. a. O. etwas knapp dargestellt ist. Er lautet:

*Durch zwei Eckpunkte eines Dreiecks sei ein Parabelbogen so gelegt, daß er dort die gegenüberliegenden Dreieckseiten zu Tangenten hat. Beide Punkte seien außerdem durch einen stets elliptisch gekrümmten doppelpunktfreien Kurvenbogen verbunden, dessen Tangenten in diesen Punkten sich innerhalb oder auf dem Rande des Dreiecks schneiden mögen. Dann liegt dieser Kurvenbogen mit Ausnahme seiner Endpunkte genau im Innern des Gebietes, das von dem Parabelbogen und der dritten Dreieckseite begrenzt wird.*

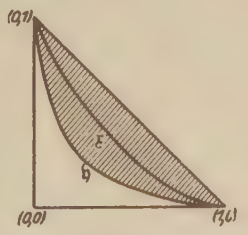


Fig. 1.

Zum Beweise verlegen wir die Eckpunkte des Dreiecks durch eine Affinität nach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und beziehen die Kurven auf einen Parameter $t$, der der Affinlänge der Kurven proportional sei. Der stets elliptisch gekrümmte Kurvenbogen sei durch $\xi(t)$, der Parabelbogen durch $\eta(t)$ dargestellt (Fig. 1).

[1]) Math. Annalen 60 (1905), S. 256—262.

[2]) Math. Annalen 72 (1912), S. 285—291 und S. 593—595.

[3]) Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 318—320. Vgl. ferner W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923, S. 48f.

[4]) Science Rep. o. Tôhoku Univ. I, 15, Nr. 4.

Wir setzen

$$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = (t-1)^2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

und fordern für $\mathfrak{x}(t)$ die Randbedingungen

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_1'(0) \geqq 0,$$
$$x_2(0) = 1, \quad x_2(1) = 0, \quad x_2'(1) \leqq 0,$$

und die Differentialbedingungen

$$x_i'''(t) + \frac{k(t)}{c^2} x_i'(t) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

die ausdrücken, daß $t = c \cdot s$ dem Affinbogen proportional ist. $k(t)$ ist die Affinkrümmung. Sie ist bei elliptischer Krümmung positiv. Wir bilden nun den Vektor

$$\mathfrak{z}(t) = \mathfrak{x}(t) - \mathfrak{y}(t)$$

und zeigen, daß seine Komponenten größer als 0 sind für $0 < t < 1$. Dann ist dieser Vektor ins Innere der Parabel gerichtet, und die Behauptung, daß $\mathfrak{x}$ ganz im Innern von $\mathfrak{y}$ liegt, ist damit bewiesen.

Es ist

$$z_1(t) = x_1(t) - t^2,$$
$$\text{I)} \quad z_1(0) = 0, \quad z_1(1) = 0,$$
$$z_1'(0) \geqq 0,$$
$$\text{II)} \quad z_1'''(t) = x_1'''(t) = -\frac{k(t)}{c^2} x_1'(t) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < 1.$$

Aus I) folgt, daß $z_1'$ mindestens einmal im Intervall $0 < t < 1$ verschwinden muß. Die erste Nullstelle sei $t_1$.

Es wird behauptet, daß $t_1$ eine einfache Nullstelle ist, daß $z_1'$ an dieser Stelle von positiven zu negativen Werten übergeht und daß $t_1$ die einzige Nullstelle in dem Intervall $0 < t \leqq 1$ ist. Nach dem Mittelwertsatz ist nämlich:

$$0 = z_1'(t_1) = z_1'(0) + t_1 z_1''(t_2) \qquad (0 < t_2 < t_1),$$
$$z_1''(t_2) = -\frac{z_1'(0)}{t_1} \leqq 0.$$

Da nach II) $z_1''$ wesentlich monoton abnimmt, folgt

$$z_1''(t_1) < 0.$$

Eine weitere Nullstelle kann auf $t_1$ nicht folgen, da ja $z_1'' < 0$ ist auch für $t_1 \leqq t \leqq 1$. Daraus folgt

$$z_1 + 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < 1;$$

denn würde $z_1$ verschwinden, so müßte $z_1'$ mindestens zwei Nullstellen in diesem Intervall haben. Da $z_1' > 0$ für $0 < t < t_1$ ist, muß $z_1$ positiv sein.

Ebenso zeigt man, durch Betrachtung der letzten Nullstelle von $z_2'(t)$, $z_2 > 0$.

## § 2.

Das Ergebnis dieses Hilfssatzes legt die Frage nahe, ob es ähnliche Lagebeziehungen zwischen stets elliptisch bzw. stets hyperbolisch gekrümmten Kurven und Ellipsen bzw. Hyperbeln gibt.

Ogiwara[4]) hat nachgewiesen, daß die oskulierenden Ellipsen einer stets elliptisch gekrümmten Eilinie in den Punkten, wo ihre Affinkrümmung den größten und kleinsten Wert hat, abgesehen von der Berührungsstelle ganz im Innern bzw. im Äußern der Eilinie liegen. Er hat sogar noch etwas mehr bewiesen: *Eine durchweg elliptisch gekrümmte Eilinie läßt sich stets zwischen zwei Ellipsen einschließen, die in einem beliebigen Punkt in dritter Ordnung berühren und als Affinkrümmungen das Maximum und das Minimum der Affinkrümmung der Eilinie haben.*

Das *Analoge* läßt sich auch *für stets hyperbolisch gekrümmte Kurven nachweisen.*

$\mathfrak{x}(s)$ stelle eine stets hyperbolisch gekrümmte Kurve mit der Affinkrümmung $k(s)$

$$(\underline{k} \leqq k(s) \leqq \bar{k} < 0)$$

dar, wobei der Parameter $s$ die Affinbogenlänge sein soll. $\mathfrak{y}(s)$ stelle die Hyperbel mit der Affinkrümmung $\bar{k}$ dar, die $\mathfrak{x}$ im Punkte $\mathfrak{O}$ vierpunktig berührt. Es wird behauptet, daß $\mathfrak{x}$ in allen andern Punkten außerhalb des berührenden Hyperbelastes liegt (Fig. 2).

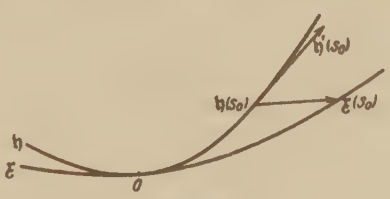


Fig. 2.

Im Punkt $\mathfrak{O}$ sei $s = 0$ und $k(0)$ sei $< \bar{k}$. Wir bilden die Determinanten

$$T(s) = (\mathfrak{x}'(s), \mathfrak{y}'(s_0)), \qquad \bar{T}(s) = (\mathfrak{y}'(s), \mathfrak{y}'(s_0))$$

und

$$t(s) = T(s) - \bar{T}(s) = (\mathfrak{x}'(s) - \mathfrak{y}'(s), \mathfrak{y}'(s_0)),$$

wobei $s_0$ ein beliebig gewählter fester Wert der Affinbogenlänge sei. $s_0$ sei hier positiv angenommen. Für negatives $s_0$ gestaltet sich der Beweis genau so. Es ist

I) $t(0) = 0,$

II) $t'(0) = 0,$

III) $t''(s) = -k(s)\,T(s) + \bar{k}\,\bar{T}(s) = -k(s)\,t(s) + (\bar{k} - k(s))\,\bar{T}(s),$

$t''(0) = (\bar{k} - k(0))\,\bar{T}(0) > 0.$

Hieraus folgt, daß $t$ an der Stelle $s = 0$ ein Minimum besitzt.

Es wird nun behauptet, daß $t$ in dem ganzen Intervall $0 < s \leqq s_0$ größer als 0 ist. Hätte nämlich $t$ eine Nullstelle $s_1$

$$(0 < s_1 \leqq s_0, \quad t > 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < s_1),$$

so gäbe es wegen I) nach dem Satz von Rolle in dem Intervall $0 < s < s_1$ eine Nullstelle von $t'$. Daraus könnte man wieder wegen II) auf das Vorhandensein einer Nullstelle von $t''$ in diesem Intervalle schließen. Das würde aber nach III) einen Widerspruch bedeuten; denn $t$ war in diesem Intervall positiv vorausgesetzt, und ebenso ist $\bar{T} > 0$ für $0 \leqq s < s_0$.

Erstreckt man nun über die in dem Intervall $0 < s \leqq s_0$ positive Funktion $t(s)$ das Integral, so erhält man

$$0 < \int_0^{s_0} t(s)\, ds = (\mathfrak{x}(s_0) - \mathfrak{y}(s_0), \mathfrak{y}'(s_0)).$$

Daraus sieht man, daß der Punkt $\mathfrak{x}(s_0)$ auf der rechten Seite des Tangentenvektors $\mathfrak{y}'(s_0)$, also außerhalb der Hyperbel $\mathfrak{y}$ liegt.

Gibt es Stellen $\bar{s}$, wo $k(\bar{s}) = \bar{k}$ ist, so folgt aus Stetigkeitsgründen, daß auch der in einem solchen Punkt berührende Hyperbelast ganz im Innern von $\mathfrak{x}$ liegt.

Ist die obere Grenze von $k(s)$ Null, so zeigt man ebenso, daß $\mathfrak{x}$ ganz außerhalb der im Punkt $\mathfrak{O}$ berührenden Schmiegparabel liegt.

In derselben Weise läßt sich beweisen, daß die vierpunktig berührende Hyperbel mit der Affinkrümmung $\underline{k}$, vom Berührungspunkt abgesehen, ganz außerhalb der Kurve $\mathfrak{x}$ liegt.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, daß eine stets hyperbolisch gekrümmte Kurve eine offene Eilinie darstellt bzw. sich zu einer solchen ergänzen läßt[5]).

## § 3.

Eine weitere Eigenschaft im Großen für stets hyperbolisch gekrümmte Kurven ist: Jede solche Kurve hat *höchstens einen Scheitel.* Erstreckt sie sich nach beiden Seiten ins Unendliche, so hat sie notwendig einen Scheitel.

Ein Scheitel ist ein Punkt der Kurve, in dem die gewöhnliche Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ verschwindende Ableitung ($\varkappa' = 0$) hat. Nun ist $\varrho = |\mathfrak{x}'(s)|^3$ [6]) und da $\varkappa$ für die ganze Kurve von Null verschieden ist, haben die Ableitungen von $\varkappa$ und von $|\mathfrak{x}'|^3$ dieselben Nullstellen. Dasselbe gilt von

[5]) Vgl. H. Mohrmann, Math. Annalen 72 (1912), S. 593—595.

[6]) Siehe W. Blaschke, Differentialgeometrie II, Berlin 1923, S. 32

$|\mathfrak{x}'|^3$ und $|\mathfrak{x}'|^2$. Bezieht man die Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so ist

$$|\mathfrak{x}'|^2 = \mathfrak{x}'^2 = R(s).$$

Man erhält

$$R'(s) = 2\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''$$

$$R''(s) = 2(\mathfrak{x}''^2 - k\cdot\mathfrak{x}'^2) > 0 \quad \text{für alle } s.$$

Hieraus folgt, daß $R'$ höchstens einmal verschwinden kann und daß $R$ an dieser Nullstelle ein Minimum hat.

Daß dieses Minimum für Kurven, die sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken, tatsächlich vorhanden ist, ergibt sich daraus, daß $|\mathfrak{x}'|$ für $s \to +\infty$ und für $s \to -\infty$ gegen $\infty$ strebt. Im begleitenden Zweibein ist nämlich

$$x_2'(s) = s\,x_2''(0) - \frac{s^2}{2}\,k(\bar{s})\,x_2'(\bar{s}) \qquad (0 < \bar{s} < s).$$

Daraus folgt

$$\lim_{s\to+\infty} x_2'(s) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{s\to-\infty} x_2'(s) = -\infty.$$

(Eingegangen am 3. April 1929.)

# Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. I.

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt.)

Von

Felix Pollaczek in Berlin.

## 1. Problemstellung.

Die Bestimmung der statistischen Verteilung der Wartezeiten der von einem oder von mehreren parallel arbeitenden „Schaltern" abzufertigenden Personen, von der das Nachstehende handelt, führt im einfachsten Falle (konstante Abfertigungszeit) auf Fragen folgender Art:

Für jedes ganzzahlige $n$ seien $\mu(n) \leqq n$ reelle inhomogene Linearformen $l_1^{(n)}, \ldots, l_\mu^{(n)}$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben; man integriere nun die Funktion

$$\text{Maximum der Zahlen } 0, l_1^{(n)}, \ldots, l_\mu^{(n)}$$

über einen gewissen Simplex des $n$-dimensionalen Raumes der $x_\nu$, bzw. man bestimme für jedes $t$ das Volumen desjenigen Simplexteiles, in dessen Punkten die erwähnte Funktion $\leqq t$ ist, und untersuche beide Resultate insbesondere bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Dimensionszahl $n$.

Wir behandeln diese Aufgabe, deren Erledigung funktionentheoretische Hilfsmittel erfordert, hier nur in dem durch die wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellung bedingten Umfange und bedienen uns hierbei an Stelle abstrakter Bezeichnungen, der bei dieser Fragestellung auftretenden Ausdrücke („Personen", „Ankunftszeit" usw.).

Unser Problem ist folgendes:

Es seien $s\ (\geqq 1)$ Schalter vorhanden, und vor diesen mögen innerhalb eines gewissen Zeitintervalls $T$ stets gleichviel $(n)$ Personen erscheinen; diese $n$ Personen mögen unabhängig voneinander eintreffen und für jede von ihnen sei jede Ankunftszeit innerhalb des Intervalls $T$ gleich wahrscheinlich (dies als einfachste derartige Annahme). Weiter setzen wir die erforderlichen Abfertigungszeiten als statistisch bekannt voraus, d. h. es sei eine Funktion $f(t)$

vorgegeben, welche den Bruchteil derjenigen Personen, deren Abfertigungszeit höchstens gleich $t$ ist (oder die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abfertigungszeit eines Schalterbesuchers $\leqq t$ ist), angibt. Wir fragen nun nach der mittleren Wartezeit $\vartheta$ irgendeiner der $n$ Personen und nach der Statistik der Wartezeiten, d. h. nach der Wahrscheinlichkeit $\varrho(t)$ dafür, daß die Wartezeit irgendeiner der $n$ Personen höchstens gleich $t$ ist.

Zur Erledigung dieser Fragen, deren erstere in diesem Teile beantwortet wird, muß eine Vorschrift darüber gegeben sein, in welcher Reihenfolge die Wartenden abgefertigt werden. Schreibt man vor, daß jede Person in der Reihenfolge ihres Eintreffens abgefertigt wird, so kann im einfachsten Falle einer für alle Personen gleichen Abfertigungszeit für die Untersuchung der Wartevorgänge von vornherein angenommen werden, daß an dem $a$-ten ($a = 1, 2, \ldots, s$) Schalter nur die $a$-te, $s + a$-te, $2s + a$-te, usw. eintreffende Person abgefertigt wird; hingegen wäre bei Beibehaltung der ursprünglichen Vorschrift im Falle des Vorkommens verschiedener Abfertigungszeiten der Abfertigungsschalter durch die Reihenfolge des Eintreffens allein noch nicht bestimmt, sondern auch von den Abfertigungszeiten aller vorher Eingetroffenen abhängig. *Wir schreiben jedoch entsprechend den meisten Wartevorgängen der Wirklichkeit vor, daß in jedem Falle dem $a$-ten Schalter der $a$-te, $s + a$-te, $2s + a$-te usw. Eintreffende zugewiesen wird.*

Wir bestimmen hier die mittlere (d. h. die mathematisch zu erwartende) Wartezeit $\vartheta$, die mit der später abzuleitenden Wahrscheinlichkeit $\varrho(t)$ durch die Beziehung

$$\vartheta = \int_0^\infty t \, d\varrho(t) = \int_0^\infty (1 - \varrho(t)) \, dt$$

verknüpft ist, auf direktem Wege.

Die Größe $\vartheta$, welche, so wie später $\varrho(t)$, als geometrische Wahrscheinlichkeit zu berechnen ist, erscheint zunächst in der Form eines $(2n-1)$-fachen Integrals über eine gewisse abteilungsweise lineare Funktion der Integrationsvariablen. Dann ist zuerst die Aufgabe zu erledigen, dieses Integral „auszuwerten", und dies gelingt mit Hilfe eines vielfachen komplexen Integrals, einer Verallgemeinerung des Dirichletschen Faktors. $\vartheta$ ergibt sich so allgemein, d. h. für beliebige Verteilungsfunktionen $f(t)$, in Form eines komplexen Doppelintegrals, dessen Integrand von einer durch die Momente von $f(t)$ bestimmten analytischen Funktion $\varepsilon(z)$ und außerdem von $n$ und einem reellen Parameter $\eta$, dem „Ausnützungsgrad", abhängt. Zwar kann dieses Doppelintegral für jedes gegebene $f(t)$, $\eta$ und $n$ formal ausgerechnet werden, doch hängt das Resultat (im Falle konstanter Abfertigungszeit ein Polynom $r$-ten Grades in $\eta$) für großes $n$ in sehr umständlicher Weise von den erwähnten Größen ab.

Es ergibt sich daher die weitere Aufgabe, $\vartheta$ asymptotisch für $n \to \infty$ zu entwickeln, und um diese zu erledigen, machen wir einschränkende Voraussetzungen über $f(t)$. Je nach der Abhängigkeit des Parameters von $n$ sind hierbei die drei Fälle $\eta = \text{const} \leqq 1$ und $\eta = 1 + \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}$ (im Falle konstanter Abfertigungszeit die vier Fälle $\eta = \text{const} \leqq 1$ und $\eta = 1 \pm \frac{\text{const}^2}{\sqrt{n}}$) zu unterscheiden, deren jedem eine besondere Entwicklung entspricht, ähnlich wie z. B. die Entwicklung der Besselschen Funktion $J_n(nx)$ für $n \to \infty$ (*Debye*) auf drei verschiedene semikonvergente Reihen führt, je nachdem $x = \text{const} \gtrless 1$ oder $x = 1 + \frac{\text{const}}{n^{2/3}}$ ist.

Das Anfangsglied jeder dieser Entwicklungen, auf dessen Anführung wir uns, nach Darlegung des formalen Rechnungsganges, zumeist beschränken, stellt das Limesgesetz des betreffenden Falles für kontinuierlichen Betrieb dar; mit diesem Glied, das frei ist von den Wirkungen der „Enden" der unserer Rechnung zugrunde gelegten Wartevorgänge (nämlich dem Vorhandensein eines ersten und eines letzten Eintreffenden) wird man sich bei Anwendungen auf die Praxis zumeist begnügen. —

Die entsprechenden Entwicklungen für die Funktion $\varrho(t)$, die Statistik der Wartezeiten, werden in einem zweiten Teile gebracht.

## 2. Einführung eines vielfachen Fourierintegrals.

Zur Bestimmung der mittleren Wartezeit $\vartheta$ *irgendeiner* innerhalb des Intervalls $T$ eintreffenden Person benötigt man zuvor die mittlere Wartezeit $\vartheta_m$ der $m$-ten eintreffenden Person $(1 \leqq m \leqq n)$; aus den $\vartheta_m$ folgt dann $\vartheta$ mittels

$$\vartheta = \frac{1}{n} \sum_1^n \vartheta_m. \tag{1}$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist es gleichgültig, ob man $n$ von vornherein fest bezifferte Personen annimmt, deren jede in jedem Zeitpunkt innerhalb $T$ eintreffen kann, oder ob man, so wie im folgenden, der $m$-ten eintreffenden Person den Index $m$ zuteilt, und demgemäß nur über alle Zeitpunktskombinationen

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq T \tag{2}$$

($x_m$ = Ankunftszeitpunkt der $m$-ten eintreffenden Person) summiert, in denen $n$ Personen *nacheinander* eintreffen können. Die Abfertigungszeit sei vorläufig für alle $n$ Personen als gleich $t_0$ = konst. vorausgesetzt. Für jedes System (2) ist nun zunächst die zugehörige Wartezeit des $m$-ten Eintreffenden zu bestimmen, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind:

$\alpha)$ $1 \leqq m \leqq s$,

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_s = 0,$$

da die ersten $s$ Personen voraussetzungsgemäß nicht warten müssen.

$\beta)$ $m > s$.

Die $m$-te Person hat nach dem früher Gesagten bis zur Erledigung der $(m-s)$-ten Person zu warten; diese letztere, die zur Zeit $x_{m-s}$ eintraf und eine Wartezeit $\tau_{m-s}$ hatte, verläßt zur Zeit $x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0$ den Schalter. Fällt die Ankunftszeit $x_m$ *vor* diesen Zeitpunkt, so ist $\tau_m = x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m$; liegt sie aber später, so ist $\tau_m = 0$. Um beide Fälle formal zusammenfassen, sei ein Zeichen $(\ )$ eingeführt durch folgende Definition:

$$(3) \qquad \begin{aligned} (a) &= a && (a \geqq 0), \\ (a) &= 0 && (a < 0). \end{aligned}$$

Mit (3) gilt allgemein

$$(4a) \qquad \tau_m = (x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m) \qquad (s+1 \leqq m \leqq n),$$

$$(4b) \qquad \tau_m = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq s).$$

Zur Bildung der mittleren Wartezeit $\vartheta_m$ hat man über alle Kombinationen (2) zu mitteln, d. h. $\vartheta_m$ ist der Quotient aus

$$\int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^T \tau_m \, dx_n \quad \text{und} \quad \int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^T dx_n = \frac{T^n}{n!}.$$

Nach (4a) hängt $\tau_m$ nur ab von der Variablen $x_m$, $x_{m-s}$, $x_{m-2s}$ usw.; im Zählerintegral können daher die $n-m$ inneren Integrationen sogleich ausgeführt werden, und man erhält

$$(5) \qquad \vartheta_m = \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{m-1}}^T \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} \tau_m \, dx_m \qquad (1 \leqq m \leqq n),$$

und hieraus insbesondere nach (4b)

$$(5a) \qquad \vartheta_m = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq s).$$

Aus (4a) folgt für $\tau_m$, wenn für den Augenblick

$$(6) \qquad x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0 = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

geschrieben und weiter

$$(7) \qquad m = \mu s + s', \quad 1 \leqq s \leqq s', \quad \text{also} \quad \left[\frac{m-1}{s}\right] = \mu,$$

gesetzt wird,

$$(8) \qquad \tau_m = (a_1 + (a_2 + (a_3 + \ldots + (a_\mu)))).$$

Beachtet man, daß $a + (b - a)$ die größere der beiden Zahlen $a$ und $b$, ebenso

$$a + (b - a + (c - b))$$

das Maximum der drei Zahlen $a, b, c$ darstellt usw., so geht leicht hervor daß (8) das Maximum der Zahlen $0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, \sum_1^{\mu} \alpha_\nu$ darstellt. Unsere Aufgabe besteht also zunächst darin, die folgende Funktion:

Maximum der $\mu+1$ Linearformen

$$0,\ x_{m-s}-x_m+t_0,\ x_{m-2s}-x_m+2t_0,\ \ldots,\ x_{m-\mu s}-x_m+\mu t_0$$

über den Simplex (2) zu integrieren.

Da nun zwar nicht der Ausdruck (8), jedoch ein Ausdruck von der Form

$$(9) \qquad (-a_1-(a_2+(a_3+(a_4+\ldots))))$$

(Bedeutung: Minimum der Zahlen $-a_1, -a_1-a_2, -a_1-a_2-a_3$, ... usw., falls dieses Minimum positiv ist; andernfalls die Null) eine die Durchführung der Integrationen nach den $x$ erleichternde Integraldarstellung besitzt, schreiben wir unter Benutzung der aus (3) folgenden Identität

$$(10) \qquad (a)=a+(-a)$$

anstatt (4a)

$$\tau_m = x_{m-s}+\tau_{m-s}+t_0-x_m+(-(x_{m-s}-x_m+t_0)-\tau_{m-s})$$

mit

$$(11) \quad (-(x_{m-s}-x_m+t_0)-\tau_{m-s})=(-a_1-(a_2+(a_3+\ldots))),$$

und dies gibt, in (5) eingesetzt,

$$\vartheta_m=\vartheta_{m-s}+\frac{n!}{T^n}\int_0^T dx_1\ldots\int_{x_{m-1}}^T (x_{m-s}-x_m+t_0+(-(x_{m-s}-x_m+t_0)-\tau_{m-s}))\times\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}dx_m.$$

Wird hier die Integration über die ersten Summanden ausgeführt und

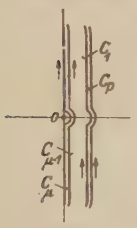


Fig. 1.

$$(12) \qquad \varphi_{\mu,n+1}(T)=(n+1)!\int_0^T dx_1\ldots\int_{x_{m-1}}^T(-(x_{m-s}-x_m+t_0)-\tau_{m-s})\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}dx_m$$

gesetzt, so folgt weiter

$$(13) \qquad \vartheta_m=\vartheta_{m-s}+t_0-\frac{sT}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\,T^n}\varphi_{\mu,n+1}(T)$$

und der Faktor (...) unter dem Integralzeichen in (12) hat nunmehr die Gestalt (9). Es gilt nun, gewissermaßen als Verallgemeinerung des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors, folgende Integraldarstellung:

$$(14) \qquad (-a_1-(a_2+(a_3+\ldots+(a_{\mu-1}+(a_\mu))\ldots)))$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^\mu}\int_{C_1}\cdots\int_{C_\mu}\frac{e^{-\sum_1^\mu q_i a_i}}{q_1(q_1-q_2)(q_2-q_3)\ldots(q_{\mu-1}-q_\mu)q_\mu}dq_1\,dq_2\ldots dq_\mu \quad (\mu\geqq 2),$$

wobei $C_1=C_{q_1}, \ldots, C_\mu=C_{q_\mu}$ die aus der Fig. 1 ersichtlichen Kurven sind.

Die Formel (14) ist zunächst leicht zu verifizieren für $\mu = 2$, wo sie gibt:

$$(14\,a) \qquad (-a_1 - (a_2)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} dq_1 \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{e^{-q_1 a_1 - q_2 a_2}}{q_1 (q_1 - q_2) q_2}\, dq_2 .$$

Ist $a_2 > 0$, also $(a_2) = a_2$, so darf die Kurve $C_2$ parallel zu sich ins Unendliche der positiven $q_2$-Halbebene, wo $\int .. dq_1$ verschwindet, verschoben werden, wobei der Pol $q_2 = q_1$, dessen Residuum mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, überstrichen wird; (14 a) geht dann über in die bekannte Identität

$$(-a_1 - a_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{e^{-q_1 (a_1 + a_2)}}{q_1^2}\, dq_1 ;$$

ebenso folgt für $a_2 \leqq 0$, also $(a_2) = 0$, durch Verschieben der Kurve $C_1$ nach links ins Unendlichferne der negativ-reellen $q_1$-Halbebene, wobei sich $\int \ldots dq_1$ auf das Residuum in $q_1 = 0$ reduziert, die Identität

$$(-a_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{e^{-q_1 a_1}}{q_1^2}\, dq_1 .$$

In analoger Weise ist die allgemeine Formel (14) durch Schluß von $\mu$ auf $\mu - 1$ zu beweisen.

Für die Größe (11) kann nun mit (14) und (6) geschrieben werden

$$(15\,a) \qquad (-(x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s})$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^\mu}\int_{C_1} \cdots \int_{C_\mu} \frac{e^{-\sum_1^\mu q_\nu (x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0)}}{q_1 (q_1 - q_2) \cdots (q_{\mu-1} - q_\mu) q_\mu}\, dq_1 \ldots dq_\mu .$$

Weiter schreiben wir für den zweiten Faktor des Integranden von (12)

$$(15\,b) \qquad \frac{(T - x_m)^{n-s}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{p(T - x_m)}}{p^{n-m+1}}\, dp$$

mit einer aus Fig. 1 ersichtlichen Integrationskurve $C_p$. Setzt man (15 a, b) in (12) ein und vertauscht die Reihenfolge der komplexen und der reellen Integrationen, so können die letzteren sogleich ausgeführt werden; der Exponent der $e$-Potenz des Integranden lautet

$$p(T - x_m) - \sum_1^\mu q_\nu (x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0)$$
$$= pT + x_m (q_1 - p) + \sum_1^{\mu-1} x_{m-\nu s} (q_{\nu+1} - q_\nu) - x_{m-\mu s} q_\mu - t_0 \sum_1^\mu q_\nu$$

und es wird

$$(16) \qquad \varphi_{\mu, n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}}\int_{C_p}\int_{C_1} \cdots \int_{C_\mu} \frac{dp\, dq_1 \ldots dq_\mu}{q_1 (q_1 - q_2) \cdots (q_{\mu-1} - q_\mu) q_\mu}$$
$$\asymp \int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{m-1}}^T e^{pT + x_m (q_1 - p) + \sum_1^{\mu-1} x_{m-\nu s} (q_{\nu+1} - q_\nu) - x_{m-\mu s} q_\mu - t_0 \sum_1^\mu q_\nu} p^{-n+m-1}\, dx_m .$$

Führt man nun die Integration $\int_{x_{m-1}}^{T} \dots dx_m$ aus, so wird an der oberen Grenze der von $p$ abhängige Faktor des Integranden gleich $\frac{1}{p^{n-m+1}(q_1-p)}$ und das zugehörige $\int_{C_p} \dots dp$ verschwindet, da $C_p$ (Fig. 1) ohne Überschreitung eines Poles ins Unendliche gerückt werden kann; es bleibt also jedesmal nur der der unteren Grenze entsprechende Anteil, und nach $s$ Integrationen ergibt sich für den inneren Teil von (16):

$$\int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-s-1}}^{T} \frac{e^{pT+x_{m-s}(q_2-p)+\sum_2^{\mu-1} x_{m-\nu s}(q_{\nu+1}-q_\nu)-x_{m-\mu s}q_\mu-t_0\sum_1^{\mu} q_\nu}}{p^{n-m+1}(p-q_1)^s}\, dx_{m-s}.$$

Nach Durchführung von weiteren $(\mu-1)s = m-s-s'$ Integrationen wird aus (16)

$$\varphi_{\mu,n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p}\int_{C_1}\dots\int_{C_\mu} \frac{dp\,dq_1\dots dq_\mu}{q_1(q_1-q_2)\dots(q_{\mu-1}-q_\mu)q_\mu} \int_0^T dx_1 \dots$$

$$\dots \int_{x_{s'-1}}^{T} \frac{e^{p(T-x_{s'})-t_0\sum_1^{\mu} q_\nu}}{p^{n-m+1}(p-q_1)^s\dots(p-q_\mu)^s}\, dx_{s'},$$

und wenn noch die letzten $s' \leqq s$ Integrationen ausgeführt werden, wird, mit (7),

$$(17)\qquad \varphi_{\mu,n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p}\int_{C_1}\dots\int_{C_\mu} \frac{dp\,dq_1\dots dq_\mu}{q_1(q_1-q_2)\dots(q_{\mu-1}-q_\mu)q_\mu}$$

$$\times \frac{e^{pT-t_0\sum_1^{\mu} q_\nu}}{p^{n-\mu s+1}(p-q_1)^s\dots(p-q_\mu)^s}.$$

### 3. Umformung des Integrals (17).

Um dieses Integral zu vereinfachen, seien zuerst $p-q_1 = q_1'$ anstatt $q_1$, $p-q_2 = q_2'$ anstatt $q_2$ usw. als Integrationsvariable genommen; dann wird (die Akzente der $q_i'$ werden wieder fortgelassen)

$$(17\,a)\qquad \varphi_{\mu,n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p}\int_{K_1}\dots\int_{K_\mu} \frac{e^{p(T-\mu t_0)+t_0\sum_1^{\mu} q_i}}{p^{n-\mu s+1}(q_1\dots q_\mu)^s}$$

$$\times \frac{dp\,dq_1\dots dq_\mu}{(p-q_1)(q_2-q_1)\dots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)},$$

wobei als Integrationskurven für die $q_i$ zunächst wieder die Kurven $C_i$ der Fig. 1, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, zu gelten haben ($C_{i+1}$ rechts

von $C_i$, aber links von $C_p$). Man kann jetzt zuerst die innerste dieser Kurven, $C_1$, durch einen kleinen Kreis $K_1$ um den Nullpunkt der $q_1$-Ebene ersetzen, sodann auch $C_2$ durch einen den ersten umgebenden, aber noch links von $C_3$ liegenden Kreis $K_2$ usw., so daß schließlich die Integrationskurven von (17a) gemäß Fig. 2 gelegen sind.

Fig. 2.

Zerlegt man im Integranden (17a) folgendermaßen:

$$\frac{1}{(p-q_1)(p-q_\mu)} = \frac{1}{(p-q_1)(q_1-q_\mu)} - \frac{1}{(p-q_\mu)(q_1-q_\mu)},$$

so wird

$$17b)\quad \frac{1}{(n+1)!}\varphi_{\mu,n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p}\int_{K_1}\cdots\int_{K_\mu} \frac{dp\,dq_1\ldots dq_\mu}{p^{n-\mu s+1}(q_1\ldots q_\mu)^s}\cdot e^{p(T-\mu t_0)+t_0\sum_1^\mu q_i}$$
$$\times\left[\frac{1}{(p-q_1)(q_2-q_1)\ldots(q_\mu-q_{\mu-1})(q_1-q_\mu)} - \frac{1}{(p-q_\mu)(q_1-q_\mu)(q_2-q_1)\ldots(q_\mu-q_{\mu-1})}\right].$$

Läßt man hier im Integrale über den *ersten* Summanden den Kreis $K_1$ sich so vergrößern, daß er den Kreis $K_\mu$ in seinem Innern enthält, die Kurve $C_p$ aber noch nicht schneidet, so stimmt dieses Integral, für dessen Integrationskreise jetzt $K_2 \prec K_3 \prec K_4 \prec \ldots \prec K_\mu \prec K_1$ gilt, bis auf das Vorzeichen überein mit dem Integral über den zweiten Summanden; $\varphi_{\mu,n+1}$ ist daher gleich der negativen Residuensumme bez. der beiden zu berücksichtigenden einfachen Pole $q_1 = q_2$ und $q_1 = q_\mu$, also

$$18)\quad \frac{1}{(\mu+1)!}\varphi_{\mu,n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^\mu} \int_{C_p}\int_{K_2}\cdots\int_{K_\mu} \frac{dp\,dq_2\ldots dq_\mu\cdot e^{p(T-\mu t_0)+t_0\sum_2^\mu q_i}}{p^{n-\mu s+1}(q_2\ldots q_\mu)^s}$$
$$\times\left[\frac{e^{q_2 t_0}}{q_2^s(p-q_2)(q_3-q_2)\ldots(q_\mu-q_{\mu-1})(q_2-q_\mu)} - \frac{e^{q_\mu t_0}}{q_\mu^s(p-q_\mu)(q_2-q_\mu)\ldots(q_\mu-q_{\mu-1})}\right].$$

Man kann dieses Verfahren wiederholen, indem man $K_2$ so vergrößert, daß $K_\mu \prec K_2$ wird usw.; nach $\mu - 3$ Wiederholungen ergibt sich

$$19)\quad \frac{1}{(n+1)!}\varphi_{\mu,n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p}\int_{K_{\mu-1}}\int_{K_\mu} \frac{dp\,dq_{\mu-1}\,dq_\mu}{p^{n-\mu s+1}(q_{\mu-1}q_\mu)^s}\cdot e^{p(T-\mu t_0)+t_0(q_{\mu-1}+q_\mu)}$$
$$\times\left[\frac{e^{(\mu-2)t_0 q_{\mu-1}}}{q_{\mu-1}^{s(\mu-2)}(p-q_{\mu-1})(q_\mu-q_{\mu-1})(q_{\mu-1}-q_\mu)} - \frac{e^{(\mu-2)t_0 q_\mu}}{q_\mu^{s(\mu-2)}(p-q_\mu)(q_{\mu-1}-q_\mu)(q_\mu-q_{\mu-1})}\right].$$

Läßt man jetzt noch $K_{\mu-1}$ über $K_\mu$ hinauswachsen, jedoch links von $C_p$ bleiben, so reduziert sich der letzte Ausdruck auf das Residuum (bez. $dq_{\mu-1}$) des ersten Integranden im Pole zweiter Ordnung $q_\mu$, und die elementare Rechnung gibt (wir schreiben jetzt $q, K_q$ statt $q_\mu, K_\mu$):

$$(20)\qquad \frac{1}{(n+1)!}\varphi_{\mu,n+1}(T)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q} \frac{dp\,dq}{p^{n-\mu s+1}q^{\mu s+1}(p-q)}\, e^{p(T-\mu t_0)+\mu q t_0}\left[(\mu-1)(qt_0-s)+\frac{q}{p-q}\right];$$

die Integrationskurven $C_p$ und $K_q$ zeigt Fig. 3. Das letzte leicht auszuwertende Doppelintegral ergibt

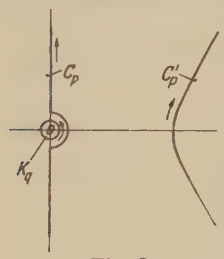


Fig. 3.

$$(20\,a)\qquad \varphi_{\mu,n+1}(T) = \sum_{\varkappa=0}^{s\mu}\binom{n+1}{\varkappa}(T-\mu t_0)^{n+1-\varkappa}(\mu t_0)^{\varkappa}\frac{s\mu-\varkappa}{\mu},$$

doch knüpft das Weitere nicht an dieses für großes $\mu$ unübersichtliche Polynom an, sondern an den Ausdruck (20).

Aus (13) folgt, mit (5a) und (7), durch Summierung über $\mu = 1, 2, \ldots, \mu$

$$(21)\qquad \vartheta_{\mu s+s'} = \mu\left(t_0 - \frac{sT}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)T^n}\sum_{\nu=1}^{\mu}\varphi_{\nu,n+1}(T) \qquad (\mu \geqq 1,\ 1 \leqq s' \leqq s);$$

$\vartheta_{\mu s+s'}$ hängt also nicht von $s'$ ab.

Für das Weitere denken wir uns $n$, die Zahl aller eintreffenden Personen, durch $s$ teilbar:

$$(22)\qquad n = s(\mu_0+1);$$

nach (1) gilt dann für die mittlere Wartezeit irgendeiner der $n$ Personen

$$(23)\qquad \vartheta = \frac{s}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\vartheta_{\mu s+s}$$

und hieraus folgt mit (21), (22):

$$(24)\qquad \vartheta = \frac{n-s}{2s}\left(t_0 - \frac{sT}{n+1}\right) + \frac{s}{n(n+1)T^n}\sum_{\mu=1}^{\mu_0}(\mu_0+1-\mu)\varphi_{\mu,n+1}(T).$$

Hierin setzen wir für $\varphi_{\mu,n+1}$ den zuvor umzuformenden Ausdruck (20) ein; der Integrand (20) ist gleich

$$\frac{e^{p(T-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\left[\frac{e^{\mu q t_0}}{q^{\mu s}}\cdot\frac{s-qt_0}{p(p-q)} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{e^{\mu q t_0}}{(p-q)q^{\mu s}} - \frac{e^{\mu q t_0}}{\mu p q^{\mu s}}\right)\right],$$

so daß aus (20), mit $\int_{K_q}\frac{\partial\ldots}{\partial q}dq = 0$, folgt

$$(25)\qquad \frac{1}{(n+1)!}\varphi_{\mu,n+1}(T) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)}\left(\frac{p^s}{q^s}e^{(q-p)t_0}\right)^{\mu}(s-qt_0)\,dp\,dq.$$

Gleichung (25) gibt, in (24) eingesetzt,

$$\vartheta = \frac{n-s}{2s}\left(t_0 - \frac{sT}{n+1}\right) \tag{26}$$

$$+ \frac{s(n-1)!}{T^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \left(\frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0}\right)^{\mu} (s - q t_0)\, dp\, dq.$$

Es ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_0} = (\mu_0 + 1)(s - q t_0) \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \left(\frac{p^s}{q^s} e^{(p-q)t_0}\right)^{\mu} + q \frac{\partial}{\partial q} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \left(\frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0}\right)^{\mu}$$

$$= \left[(\mu_0 + 1)(s - q t_0) + q \frac{\partial}{\partial q}\right] \frac{\left(\frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0}\right)^{\mu_0+1} - \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0}}{\frac{p^s}{q^s} e^{(p-q)t_0} - 1},$$

und dies gibt, in (26) eingesetzt und partiell integriert (nach (22) ist wieder $\mu_0 + 1 = n/s$ gesetzt):

$$\vartheta = \frac{n-s}{2s}\left(t_0 - \frac{sT}{n+1}\right) + \frac{s(n-1)!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \tag{27}$$

$$\times \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \left(\frac{n}{s}(s - q t_0) - \frac{p}{p-q}\right) \frac{p^n e^{(q-p)\frac{n t_0}{s}} - p^s e^{(q-p)t_0} \cdot q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)t_0} - q^s} q^{s-n}\, dp\, dq.$$

Schreibt man hierin $p \cdot \frac{s}{t_0}$ bzw. $q \cdot \frac{s}{t_0}$ statt $p$ bzw. $q$ und setzt zur Abkürzung

$$\frac{sT}{t_0} = \alpha, \tag{28}$$

so folgt weiter

$$\vartheta = t_0 \left\{\frac{n-s}{2s}\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) + \frac{n!}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2}\right. \tag{29}$$

$$\left. \times \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{p\alpha}}{p^{n+2}(p-q)q^{n-s}} \left(1 - q - \frac{p}{n(p-q)}\right) \frac{p^n e^{(q-p)n} - p^s e^{(q-p)s} q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)s} - q^s} dp\, dq \right\}.$$

## 4. Asymptotische Entwicklung der Formel (29) im Falle $\eta < 1$.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, den letzten Ausdruck für $n \to \infty$ asymptotisch zu entwickeln; hierfür muß aber über die Abhängigkeit des Parameters $\alpha$ von $n$ eine Festsetzung getroffen werden. Setzt man

$$\eta = \frac{n}{\alpha} = \frac{n t_0}{sT}, \tag{30}$$

so ist $\eta$, als Quotient aus der gesamten Abfertigungszeit aller $n$ Personen und der gesamten dafür an allen Schaltern vorgesehenen Arbeitszeit, anzusehen als gemeinsamer zeitlicher Ausnützungsgrad der $s$ Abfertigenden mit deren Einzelausnützungsgraden $\eta$ nur dann übereinstimmt, wenn auch diejenigen Personen, deren Wartezeit $= 0$ ist, die eingangs erwähnte Reihen-

folge der Schalter einhalten). Bei der asymptotischen Entwicklung von (29) nehmen wir $\eta$ zunächst als unabhängig von $n$ an und setzen zuerst voraus

$$0 < \eta < 1. \tag{31}$$

Die für großes $|p|$ ausschlaggebenden Faktoren des Integranden (29) lauten $e^{p(\alpha-n)} = e^{pn\left(\frac{1}{\eta}-1\right)}$ bzw. $e^{p(\alpha-s)} = e^{pn\left(\frac{1}{\eta}-\frac{s}{n}\right)}$; da bei der Annahme (31) die Koeffizienten $\frac{1}{\eta}-1$ und $\frac{1}{\eta}-\frac{s}{n}$ positiv sind, darf $C_p$ (Fig. 3) in bekannter Weise durch einen Vollkreis $K_p \succ K_q$ um den Nullpunkt der $p$-Ebene ersetzt werden: $\int_{C_p}\int_{K_q} = \int_{K_p}\int_{K_q}$. Wir verkleinern jetzt den Kreis $K_p$, bis er innerhalb $K_q$ liegt, und haben dann zu dem Integral (29) noch das Residuum in $p=q$ hinzuzuzählen, welches lautet:

$$\text{(31a)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{K_q} \frac{e^{q\alpha}}{q^{n+2}}\left[\frac{n-s}{2s}(1-q)+\frac{n-s}{s}(n+1-\alpha q)\right]dq = \frac{\alpha^n}{s\,n!}\cdot\frac{n-s}{2}\left(\frac{\alpha}{n+1}-1\right);$$

aus (29) wird daher

$$\text{(32)}\quad \vartheta = t_0\cdot\frac{n!\,\eta^n}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_q}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2}(p-q)q^{n-s}}\left(1-q-\frac{p}{n(p-q)}\right)$$
$$\times\frac{p^n e^{(q-p)n}-p^s e^{(q-p)s}q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)s}-q^s}\,dp\,dq \qquad (K_p \prec K_q).$$

Der dem Minuenden des letzten Bruches in (32) entsprechende Integralanteil verschwindet; das zugehörige $\int_{K_p}$ ist nämlich gleich dem Residuum im Pole zweiter Ordnung $p=0$, und dieses lautet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_q}\frac{e^{nq}}{q^{n+1}}\left[\frac{1}{nq}+(1-q)\left(\alpha-n+\frac{1}{q}+\delta_s^1\cdot\frac{e^q}{q}\right)\right]dq = 0$$

($\delta_s^1 = 1$ oder $=0$, je nachdem $s=1$ oder $>1$ ist);

daher wird aus (32) weiter

$$\text{(33)}\quad \vartheta = t_0\frac{n!\,\eta^n}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{K_p}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+1}}dp$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{K_p}\frac{1}{p(p-q)}\left(1-q-\frac{p}{n(p-q)}\right)\frac{p^s e^{(q-p)s}}{q^s-p^s e^{(q-p)s}}dq \quad (K_p \prec K_q)$$

oder, mit

$$\text{(34)}\quad F\left(p,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_q}\frac{1}{p(p-q)}\left(1-q-\frac{p}{n(p-q)}\right)\frac{p^s e^{(q-p)s}}{q^s-p^s e^{(q-p)s}}dq \qquad (p \prec K_q),$$

$$\text{(35)}\quad \vartheta = t_0\cdot\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)}F\left(p,\frac{1}{n}\right)\frac{dp}{p}.$$

Integrale von dieser Gestalt sind für $n \to \infty$ gemäß der „Methode der Sattelpunkte“ [1]) zu entwickeln, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß der Exponent, hier $w = \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}$, als neue Integrationsvariable eingeführt wird, und daß man den Integrationsweg in der mehrblättrigen $w$-Ebene in Umläufe um die nach $\Re(w) = -\infty$ hin gezogenen Verzweigungsschnitte deformiert. In der $p$-Ebene bedeutet dies, daß man die Kurve $K_p$ so zu deformieren hat, daß sie die Nullstelle von $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{p}$, d. i. die Stelle $p = \eta$, den „Sattelpunkt“, passiert und daß auf ihr im weiteren der Realteil von $w$ gegen $-\infty$ fällt oder wenigstens kleiner bleibt als im Sattelpunkte; (35) wird dann für $n \to \infty$ im wesentlichen gleich dem Integral über das die Stelle $p = \eta$ umfassende Kurvenelement und kann elementar asymptotisch nach $n$ entwickelt werden. Insbesondere gilt in erster Näherung

$$(36) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right) \frac{dp}{p} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} F(\eta, 0)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

vorausgesetzt, daß $F(p, z)$ an der Stelle $p = \eta$, $z = 0$ regulär ist, und daß bei der Deformation von $K_p$ keine Singularität von $F\left(p, \frac{1}{n}\right)$ überstrichen wurde; mit der Stirlingschen Formel

$$(37) \qquad n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

folgt weiter aus (35), (36):

$$(38) \qquad \vartheta = t_0\left[F(\eta, 0) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (\eta < 1).$$

Wir haben jetzt die Funktion $F\left(p, \frac{1}{n}\right)$ zu betrachten; da in (34) $|p| \ll |q| \ll 1$ gedacht ist, hat jeder der $s$ Faktoren

$$(39) \qquad q - \zeta_k p e^{q-p}, \qquad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1)$$

des Nenners $q^s - p^s e^{(q-p)s}$ innerhalb $K_q$ eine einzige Nullstelle

$$(39a) \qquad q_k(p) \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1)$$

und insbesondere gilt

$$(39b) \qquad q_0(p) = p.$$

Der Integrand von (34) hat daher einen Pol dritter Ordnung $q = p$ und $s - 1$ Pole erster Ordnung $q_1, \ldots, q_{s-1}$, und die Anwendung des Residuen-

[1]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik 1, S. 435 ff.

satzes gibt

$$(40)\quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{s}\left[\frac{p}{2(1-p)} - \frac{s-1}{2}\cdot\frac{p+1}{p} + \frac{s^2-1}{12n}\cdot\frac{p-1}{p} - \frac{p^3-4p^2+6p}{12n(1-p)^3} + \sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{p-q_k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{q_k}{(1-q_k)(p-q_k)^2}\right];$$

$$(40a)\qquad q_k - \zeta_k p e^{q_k - p} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Die Funktion (40) wird nur an der Stelle $p = 1$ und in den Verzweigungspunkten der Funktionen $q_k(p)$ singulär; aus (40a) nebst

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_k}(q_k - \zeta_k p e^{q_k - p}) = 1 - \zeta_k p e^{q_k - p}$$

folgt für diese Verzweigungsstellen und die zugehörigen Funktionswerte von $q_k(p)$

$$(41)\qquad e^{p-1} = \zeta_k p, \quad q_k(p) = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Alle Verzweigungspunkte, sowie der Pol $p = 1$ der Funktion (40), liegen also auf der aus Fig. 4 ersichtlichen Kurve

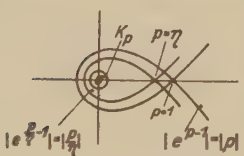


Fig. 4.

$$(41a)\qquad |e^{p-1}| = |p|;$$

daher gilt hier die Formel (36), deren Ableitung voraussetzt, daß der Integrand innerhalb der Schleife der Kurve

$$(41b)\qquad \left|e^{\frac{p}{\eta}-1}\right| = \left|\frac{p}{\eta}\right|$$

(abgesehen von $p = 0$) regulär ist. Für $F(\eta, 0)$ folgt aus (40), wenn $q_k = \eta z_k$ gesetzt wird:

$$(42)\quad F(\eta, 0) = \frac{1}{s}\left[\frac{\eta}{2(1-\eta)} - \frac{s-1}{2}\cdot\frac{\eta+1}{\eta} + \frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{1-z_k}\right];\quad z_k = \zeta_k e^{\eta(z_k-1)} \qquad (\eta < 1).$$

Um für $F(\eta, 0)$ eine Reihenentwicklung herzuleiten, gehen wir aus von Gleichung (34), in der, falls $0 < p < 1$ ist, für $K_q$ der Einheitskreis der $q$-Ebene genommen werden darf; die Funktion $pe^{-p}$ hat nämlich für reelles $p$ ihr Maximum in $p = 1$, während die längs des Kreises $|q| = 1$ betrachtete Funktion $qe^{-q}$ in $q = 1$ das Minimum ihres Betrages erreicht, so daß

$$(43)\qquad |q^s e^{-qs}| > p^s e^{-ps} \quad \text{für} \quad |q| = 1, \quad 0 < p < 1$$

gilt. Nach dem Rouchéschen Satze[2]) haben daher innerhalb des Kreises $|q| = 1$ die Funktionen $q^s e^{-qs}$ und $q^s e^{-qs} - p^s e^{-ps}$ (d. i. im wesentlichen der Nenner des Integranden von (34)) gleichviel Nullstellen, d. h. je $s$.

[2]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Funktionentheorie I, 1. Aufl., S. 185.

Für reelles $p = \eta < 1$ wird deshalb in (34) kein neuer Pol überstrichen, wenn $K_q$ bis in den Einheitskreis der $q$-Ebene ausgedehnt wird; schreibt man noch $q = \eta z$, so folgt daher aus (34)

$$(44) \qquad F(\eta, 0) = \frac{1}{2\pi i \eta} \int\limits_{K_{|z|=\frac{1}{\eta}}} \frac{1-\eta z}{1-z} \cdot \frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s - e^{s\eta(z-1)}}\, dz \qquad (\eta < 1),$$

wobei auf dem Integrationskreise $K_{|z|=\frac{1}{\eta}}$ gemäß (43) $|z^s| > |e^{s\eta(z-1)}|$ gilt.

Die letzte Ungleichung erlaubt, den zweiten Bruchfaktor des Integranden (44) in eine geometrische Reihe zu entwickeln, über die gliedweise integriert werden darf:

$$(45) \quad F(\eta, 0) = \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_{|z|=\frac{1}{\eta}}} \frac{1-\eta z}{1-z} \cdot \frac{e^{\eta s k(z-1)}}{z^{sk}}\, dz$$

$$= \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ e^{-\eta s k} \frac{(\eta s k)^{sk}}{(s k)!} - (1-\eta)\left(1 - e^{-\eta s k} \sum_{\nu=0}^{sk-1} \frac{(\eta s k)^{\nu}}{\nu!}\right)\right].$$

Aus (42) oder (44) und (38) folgt

$$(46) \qquad \boxed{\vartheta = \frac{t_0}{s}\left[\frac{\eta}{2(1-\eta)} - \frac{s-1}{2} \cdot \frac{\eta+1}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]}, \qquad (\eta < 1)$$

$$(46a) \qquad \boxed{\vartheta = \frac{t_0}{\eta}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta s k)^{sk}}{(s k)!} e^{-\eta s k} - (1-\eta)\left(1 - e^{-\eta s k} \sum_{\nu=0}^{sk-1} \frac{(\eta s k)^{\nu}}{\nu!}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]}; \qquad (\eta < 1)$$

nur für $s = 1$ (*ein* Schalter) befolgt $\vartheta$ asymptotisch ein einfaches Gesetz; die erste Gleichung (46) gibt dann

$$(46b) \qquad \boxed{\vartheta = t_0 \cdot \left[\frac{\eta}{2(1-\eta)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \qquad (s = 1,\ \eta < 1).$$

Um $F(\eta, 0)$ für großes $s$ zu approximieren, schreiben wir die Gleichung (44) folgendermaßen um:

$$(47) \qquad F(\eta, 0) = \frac{1}{2\pi i s \eta} \int\limits_{K_z} \frac{z}{1-z}\, d \log \frac{z^s - e^{s\eta(z-1)}}{z^s}$$

$$= \frac{1}{2\pi i s \eta} \int\limits_{K_z} -\log\left(1 - z^s e^{s\eta(z-1)}\right) \frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i s \eta} \int\limits_{K_z} \frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s} \left[1 + O\left(\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}\right)\right] \frac{dz}{(1-z)^2},$$

und erhalten gemäß Gleichung (36) (Sattelpunkt ist jetzt der Punkt $z=\frac{1}{\eta}$ und es ist $\left[\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}\right]_{z=\frac{1}{\eta}}<1$)

$$F(\eta,0)=\frac{1}{s\eta}\frac{e^{s-s\eta}}{\sqrt{2\pi s}\left(\frac{1}{\eta}\right)^s}\left[\frac{\frac{1}{\eta}}{\left(\frac{1}{\eta}-1\right)^2}+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{s\sqrt{2\pi s}(1-\eta)^2}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right).$$

Mit (38) folgt daher

$$\lim_{n\to\infty}\vartheta=t_0\left[\frac{1}{(1-\eta)^2}\cdot\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{s\sqrt{2\pi s}}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\right] \qquad (47a)$$

$$(s\gg 1,\ \eta<1).$$

Die vollständige, mittels der Sattelpunktsmethode in grundsätzlich einfacher Weise zu gewinnende asymptotische Entwicklung von Gleichung (35) ist von der Form

$$\vartheta\sim\frac{t_0}{1-\eta}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu(\eta)}{n^\nu(1-\eta)^{2\nu}} \qquad (48)$$

$$(0\leqq\eta<1),$$

worin die $f_\nu(\eta)$ stetige, für $\eta=1$ nicht verschwindende Funktionen sind; diese Entwicklung versagt daher in den Anwendungen immer dann, wenn $\frac{1}{n(1-\eta)^2}$ nicht mehr als klein gegen 1 angesehen werden darf.

## 5. Asymptotische Entwicklung im Falle $\eta=1-c\sqrt{\frac{2}{n}}$, $c\geqq 0$.

Um auch den Fall eines sehr wenig unterhalb 1 liegenden $\eta$ zu erfassen, stellen wir der bisherigen Annahme (31) die Annahme

$$\eta=1-c\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (49)$$

$$(c\geqq 0)$$

mit einer von $n$ unabhängigen Konstanten $c$ ($c\sqrt{2}$ statt $c$ geschrieben, um die weiteren Ausdrücke zu vereinfachen) an die Seite.

Wir verschieben wieder den Integrationsweg von (35) über die Schleife von (41a) hinaus ($K_p'$)[3]), lassen ihn jedoch den Pol $p=1$ des

[3]) Beim Übergang von $K_p$ zu $K_p'$ werden $s-1$ auf der erwähnten Kurvenschleife liegende Verzweigungspunkte der $s-1$ Funktionen $q_k(p)$ (40a) überstrichen; die zugehörigen Verzweigungsintegrale modifizieren, solange $c\neq 0$ ist, die asymptotische Entwicklung von (51) nicht, da sie, wie die in § 7, Gl. (70) durchgeführte Überlegung zeigt, $O(e^{-k\sqrt{n}})$ sind. — Für $c=0$ muß der Beitrag dieser Verzweigungsintegrale berücksichtigt werden; er ergibt sich in diesem Falle als $o\left(\frac{1}{n}\right)$, wodurch das Zeichen $\geqq 0$ in (55) gerechtfertigt wird. Würde man, um die linke Nachbarschaft

(Fortsetzung der Fußnote [3]) auf nächster Seite.)

Integranden (40) gemäß Fig. 5 umkreisen; bis auf einen Faktor $1+o(e^{-nk})$ (mit $k>0$) ist dann (35) gleich dem Integral über ein beliebig kleines festes, dem Punkt $p=1$ benachbartes Kurvenstück auf $K_p'$.

Fig. 5.

Setzt man

$$p=1+iz\sqrt{\frac{2}{n}}, \tag{50}$$

so folgt für den Exponenten in (35)

$$n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)=-(z-ic)^2+\frac{2i}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}(z-ic)^3+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{50a}$$

und mittels elementarer Abschätzungen zeigt man dann in bekannter Weise, daß für die asymptotische Entwicklung von (35) symbolisch

$$\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{K_p}e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)}F\left(p,\frac{1}{n}\right)\frac{dp}{p} \tag{51}$$

$$\sim\frac{n!}{n^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(z-ic)^2}\,e^{\frac{2i}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}(z-ic)^3+O\left(\frac{1}{n}\right)}F\left(1+iz\sqrt{\frac{2}{n}},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{i\sqrt{\frac{2}{n}}}{1+iz\sqrt{\frac{2}{n}}}\,dz$$

gilt; der Ausdruck auf der rechten Seite ist so zu verstehen, daß zuerst der Integrand durch seine Reihenentwicklung nach $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zu ersetzen und sodann gliedweise zu integrieren ist, wobei man den Pol $z=0$, das Bild des Poles $p=1$, in negativem Sinne zu umkreisen hat.

Aus (40), (50) folgt

$$F\left(p,\frac{1}{n}\right)=\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{2iz}-\frac{1}{8iz^3}\right)+O(1) \tag{52}$$

---

von $\eta=1$ völlig zu beherrschen, $\vartheta$ auch für

$$\eta=1-\frac{k}{n} \qquad (k=\text{const}\geqq 0) \tag{49a}$$

entwickeln, so müßten diese $s-1$ Verzweigungsintegrale ebenfalls berücksichtigt werden. Diese Entwicklung kann also nicht aus der im Falle (49) gültigen Entwicklung durch formales Einsetzen von $c=\frac{k}{\sqrt{2n}}$ erhalten werden, und ähnliches gilt bei konstanter Abfertigungszeit für die rechte Nachbarschaft von $\eta=1$ (§ 7).

Im Falle variabler Abfertigungszeit treten derartige Anomalien nicht auf; aus der Entwicklung für $\eta=1-c\sqrt{\frac{2}{n}}$ (die für positives und negatives $c$ die gleiche ist) könnte die Entwicklung für (49a) durch formales Umrechnen gewonnen werden.

und daher wird aus (51) mit (35), (37) in erster Näherung

$$(53)\qquad \vartheta = \frac{t_0}{2s}\sqrt{2\pi n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\Big(-\frac{1}{z}-\frac{1}{4z^3}\Big)\,dz + O(1),\quad \delta>0$$

und hieraus durch zweimalige partielle Integration

$$(53a)\qquad \vartheta = \frac{t_0}{2s}\sqrt{2\pi n}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\Big(\frac{ic}{2}+\frac{2c^2-3}{4z}\Big)\,dz + O(1).$$

Nun ist

$$\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

und

$$(54)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\frac{dz}{z} = e^{c^2}\int_{\infty}^{c}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-z^2+2ixz}\frac{dz}{z}\Big)\,dx$$

$$= \frac{e^{c^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{c} e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-2cx}\,dx,$$

so daß aus (53a) folgt:

$$(55)\qquad \boxed{\vartheta = \frac{t_0}{s}\Big[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{2}}\Big(c+(3-2c^2)\int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx}\,dx\Big)+O(1)\Big],\quad \Big(\eta = 1-\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\quad c\geqq 0\Big)}\;;$$

in zweiter Näherung folgt aus (51):

$$(55a)\qquad \boxed{\begin{aligned}\vartheta = \frac{t_0}{s}\Big[&\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{2}}\Big(c+(3-2c^2)\int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx}\,dx\Big)+\frac{4c^4-2c^2-5}{12}\\ &+\frac{c-2c^5}{3}\int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx}\,dx-(s-1)+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{1-z_k}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big],\\ &\Big(z_k=\zeta_k e^{2k-1},\quad \eta=1-\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\Big)\end{aligned}}\;.$$

## 6. Der Fall $\eta > 1$.

Im Falle

$$(56)\qquad \eta > 1$$

gehen wir wieder aus von Gleichung (29) und Fig. 3 und fragen jetzt danach, welche Kurven in der $p$-Ebene die Nullstellen $p_k(q)$ der $s$ Nenner-

faktoren (39) beschreiben, wenn $q$ den kleinen Kreis $K_q$ durchläuft. Es ist leicht einzusehen, daß jeder der $s$ durch die Gleichung

$$(57) \qquad p\,e^{-p} = \zeta_k\, q\, e^{-q}, \qquad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1)$$

und durch die Forderung $|p_k| \to \infty$ für $|q| \to 0$ definierten Funktionszweige $p_k(q)$ den unendlich oft in beiden Richtungen durchlaufenen Kreis $K_q$ auf eine einfache Kurve $C_p^{(k)}$ der positiv-reellen $p$-Halbebene abbildet; alle Kurven $C_p^{(k)}$ befolgen, $p = x + iy$ gesetzt, für großes $x$ und $y$ näherungsweise das Gesetz $y\,e^{-x} = \pm |q|$.

Verschiebt man nun in (29) die Kurve $C_p$ in eine rechts von allen $C_p^{(k)}$ gelegenen Kurve $C_p'$ (Fig. 3), wo

$$(57\,a) \qquad |p^s e^{-ps}| < |q^s e^{-qs}|$$

gilt, so darf der Minuend $p^n e^{(q-p)n}$ des letzten Zählers in (29) fortgelassen werden; denn in dem ihm entsprechenden Teilintegral $\int\limits_{C_p'}$ kann die Integrationskurve ohne Überschreitung von Nullstellen des Integrandennenners bis in das Unendlichferne der positiv-reellen $p$-Halbebene verschoben werden, wo dieses Integral infolge des Faktors $e^{np\left(\frac{1}{\eta}-1\right)}$ verschwindet; aus (29) folgt daher, mit (30), (34),

$$(58) \qquad \vartheta = \frac{t_0}{s}\left\{\frac{n-s}{2}\left(1 - \frac{n}{(n+1)\,\eta}\right) + \frac{s\,n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p'} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log\frac{p}{\eta}\right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right)\frac{dp}{p}\right\}$$
$$(\eta > 1).$$

Da nach unserer Wahl $C_p'$ rechts von den dem unendlich oft durchlaufenen Kreise $K_q$ entsprechenden Kurven $C_p^{(k)}$ liegt, fallen für jedes $p$ von $C_p'$ $s$ Nullstellen $q_k(p)$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$ des Integrandennenners, von (34) innerhalb von $K_q$ und die Anwendung des Residuensatzes auf (34) gibt jetzt

$$(59) \qquad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{q_k}{p\,(p-q_k)} - \frac{q_k}{n\,(p-q_k)^2\,(1-q_k)}\right).$$

Um nun auf das Integral in (58) die Formel (36) anwenden zu dürfen muß $C_p'$ in eine neue Kurve verschoben werden, längs welcher der Realteil des Exponenten $\frac{p}{\eta} - \log\frac{p}{\eta}$ von seinem Maximum 1 gegen $-\infty$ fällt; dieser Bedingung genügt z. B. die Kurve $|p\,e^{-p}| = \eta\,e^{-\eta}$, und da diese Kurve wegen $\eta\,e^{-\eta} < e^{-1}$ rechts liegt von der Kurve $|p\,e^{-p}| = e^{-1}$, auf der nach (41) die Verzweigungsstellen und Pole des Integranden (59) liegen, modifizieren diese Stellen nicht die Formel (36), mit welcher aus (58),

(59) folgt

$$\vartheta = \frac{t_0}{s}\left[n\cdot\frac{\eta-1}{2\eta} - \frac{s-1}{2\eta} - \frac{s}{2} + \frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \tag{60}$$
$$(\eta > 1)$$

hierin ist $z_k$ die innerhalb des Einheitskreises gelegene Wurzel der Gleichung

$$z - \zeta_k e^{\eta(z-1)} = 0, \qquad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1;\ \eta > 1). \tag{61}$$

Eine Reihenentwicklung analog (46 a) ergibt sich, wenn in (34), wo jetzt $p > K_q$ ($p$ außerhalb $K_q$) gilt, der Nenner gemäß (57 a) in eine geometrische Reihe entwickelt und gliedweise integriert wird; man erhält dann

$$\vartheta = t_0\left[\frac{n-s}{2s}\cdot\frac{\eta-1}{\eta} + \frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\eta sk)^{sk}}{(sk)!} + (1-\eta)\sum_{\nu=0}^{sk-1}\frac{(\eta sk)^\nu}{\nu!}\right)e^{-\eta sk} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{62}$$
$$(\eta > 1)$$

Analog der Formel (48) ist die vollständige asymptotische Entwicklung von $\vartheta$ für $\eta > 1$ von der Form

$$\vartheta \sim t_0\left[n\cdot\frac{\eta-1}{2s\eta} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu(\eta)}{n^\nu(1-\eta)^{2\nu+1}}\right], \tag{63}$$

so daß bei der Anwendung der Gleichungen (60), (62) immer die Bedingung $n(1-\eta)^2 \gg 1$ erfüllt sein muß.

## 7. Der Fall $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}$, $c < 0$.

Um auch die rechte Nachbarschaft der Stelle $\eta = 1$ zu umfassen, muß daher (58), (59) auch unter der Annahme

$$\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (c < 0) \tag{64}$$

entwickelt werden.

Das Anfangsglied der Summe $\sum_{k=0}^{s-1}$ in (59) hat an der Stelle $p = 1$ einen Pol, da dort beide Nenner $q_0(p) - 1$ und $p - q_0(p)$ verschwinden; die übrigen Glieder dieser Summe verhalten sich für $p = 1$ regulär. Die für das Folgende erforderliche Entwicklung von $q_0(p)$ an der Stelle $p = 1$ ergibt sich aus (57) ($k = 0$) durch elementare Rechnung als

$$q_0(p) = 1 - (p-1) - \frac{2}{3}(p-1)^2 - \ldots. \tag{65}$$

Um das Integral (58) für $n \to \infty$ entwickeln zu können, hat man $C_p'$ in eine i. a. dem Gebiete $\left|\frac{e^{p-1}}{p}\right| < 1$ angehörende Kurve $C_p''$, deren Verlauf in der Nähe von $p = 1$ Fig. 6 zeigt, zu verschieben; hierbei werden unendlich viele Verzweigungspunkte $p_\nu$ der Funktionen $q_k(p)$ überstrichen, deren Verzweigungsintegrale sich später als $O\left(e^{-k^2\sqrt{n}}\right)$ ergeben werden. Führt man in dem über $C_p''$ erstreckten Integral (58) wieder gemäß (50) die Variable $z$ ein, so gilt, mit $F\left(p, \frac{1}{n}\right)$ nach (59), und in gleichem Sinne wie Gleichung (51):

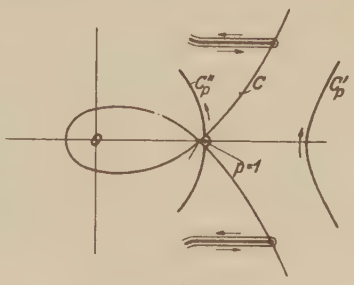


Fig. 6.

$$(66)\qquad \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p'} e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)} F\left(p,\frac{1}{n}\right) dp$$

$$\sim \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-ic)^2} e^{\frac{2i}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}(z-ic)^2+O\left(\frac{1}{n}\right)} F\left(1+iz\sqrt{\frac{2}{n}},\frac{1}{n}\right)\frac{i\sqrt{\frac{2}{n}}}{1+iz\sqrt{\frac{2}{n}}}\,dz.$$

Aus (59) folgt mit (65), (50)

$$(67)\qquad F\left(p,\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{2iz}+\frac{1}{8iz^3}\right)+O(1)$$

und daher ist in erster Näherung

$$\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p''} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{2s}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4z^3}\right)dz + O(1), \qquad \delta > 0$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}}{2s}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2}\left(-\frac{ic}{2}-\frac{2c^2-3}{4z}\right)dz + O(1),$$

$$(68)\qquad \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p''} = \frac{1}{4s}\sqrt{\frac{n}{2}}\left(-c-(2c^2-3)\int_0^\infty e^{-x^2+2cx}\,dx\right)+O(1), \quad c<0.$$

Vernachlässigt man, zunächst ohne Begründung, die Verzweigungspunkte, so folgt aus (58) mit (64), (68) in erster Näherung:

$$(69)\qquad \boxed{\vartheta = \frac{t_0}{s}\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{2}}\left(-5c+(3-2c^2)\int_0^\infty e^{-x^2+2cx}\,dx\right)+O(1)\right]}$$

$$\boxed{\left(\eta = 1-c\sqrt{\frac{2}{n}},\ c<0\right)}.$$

Die Verzweigungspunkte $p_\nu$ der Funktionen $q_k(p)$ genügen der Gleichung (41), liegen also auf der in Fig. 6 dargestellten Kurve

$$C: \quad |e^{p-1}| = |p|, \tag{41a}$$

und bei Übergang von $C_p'$ zu $C_p''$ werden diejenigen Verzweigungsstellen überstrichen, die auf den von $p=1$ ins Unendliche gehenden Ästen von $C$ liegen. Die asymptotischen Entwicklungen der zugehörigen Verzweigungsintegrale enthalten als ausschlaggebenden Faktor die $e$-Potenz $e^{n\left(\frac{p_\nu}{\eta} - \log\frac{p_\nu}{\eta}\right)}$ und für diese folgt mit (41), (64)

$$\frac{n!}{n^n} e^{n\left(\frac{p_\nu}{\eta} - \log\frac{p_\nu}{\eta}\right)} = \frac{n!}{n^n}\left(\zeta_k e^{1+p_\nu\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+\log\eta}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\cdot e^{c\sqrt{2n}(p_\nu-1)+O(1)}; \tag{70}$$

da $c<0$ ist und nur solche $p_\nu$ in Frage kommen, für welche $\Re e(p_\nu - 1) > 0$ ist, d. h. welche auf den beiden vom Doppelpunkt ins Unendliche gehenden Ästen von $C$ liegen, verschwinden diese Beiträge für großes $n$ exponentiell, und ebenso die über alle $p_\nu$ erstreckte Summe; aus (41) folgt nämlich leicht, daß für den $N$-ten Verzweigungspunkt von $q_k(p)$ asymptotisch $\Re e(p_\nu) = \frac{1}{\eta}\log 2\pi N$ gilt. Zur asymptotischen Entwicklung (69) liefern daher diese Integrale keinen Beitrag.

## 8. Verallgemeinerung auf den Fall variabler Abfertigungszeiten.

Wir geben jetzt die bisherige Voraussetzung $t_0 = \text{const}$ auf und lassen als Abfertigungszeiten alle Werte $t$ eines Intervalls von endlicher Länge

$$0 \leqq t' \leqq t \leqq t'' \tag{71}$$

zu, deren jeder mit einer beliebig vorgegebenen relativen Häufigkeit vorkomme; für die im Intervall (71) nicht abnehmende Funktion $f(t)$, welche die relative Anzahl der Schalterbesucher mit einer Abfertigungszeit $\leqq t$, also die Statistik der Abfertigungszeiten darstellt, gilt dann

$$f_-(t') = 0, \quad f_+(t'') = 1, \quad \int_{t'}^{t''} df(t) = 1. \tag{72}$$

Um $\vartheta_m$ und $\vartheta$ zu berechnen, hat man der $m$-ten eintreffenden Person eine Abfertigungszeit

$$t_m \qquad (1 \leqq m \leqq n-1) \tag{73}$$

zuzuteilen, sodann $\tau_m$ in Abhängigkeit von den Ankunftszeiten (2) und den Abfertigungszeiten (73) zu bestimmen, und sowohl über die Variablen $x_\nu$ als auch über die $t_\nu$ zu mitteln. Die letztere Mittelung ist gemäß der

Bedeutung der Funktion $f(t)$ so vorzunehmen: Wird für den Augenblick der Mittelwert von $\tau_m$ bezüglich der $x_\nu$ mit $\bar{\vartheta}_m = \bar{\vartheta}_m(t_1, \ldots, t_{m-1})$ bezeichnet, so ist $\vartheta_m$ gleich dem $(m-1)$-fachen Stieltjesintegral

$$\vartheta_m = \int_{t'}^{t''} df(t_1) \ldots \int_{t'}^{t''} df(t_{m-1})\, \bar{\vartheta}_m(t_1, \ldots, t_{m-1}). \tag{74}$$

Wie in der Einleitung erwähnt, schreiben wir auch im jetzigen Falle vor, daß der $m$-te $= (\mu s + s')$-te Eintreffende dem $s'$-ten Schalter $(1 \leqq s' \leqq s)$ zugewiesen ist; dann gilt analog (4 a, b)

$$\begin{aligned} \tau_m &= (x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_{m-s} - x_m) \qquad (s+1 \leqq m \leqq n); \\ \tau_m &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1 \leqq m \leqq s), \end{aligned} \tag{75}$$

und auch die weiteren Formeln (5) bis (17 b) bleiben erhalten, wenn $t_0$ durch $t_{m-\nu s}$, $\mu t_0$ durch $\sum_1^\mu t_{m-\nu s}$ usw. ersetzt wird. Die Gleichungen (13) bzw. (21) lauten jetzt

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_m(t_{s'}, t_{s+s'}, \ldots, t_{m-s}) &= \bar{\vartheta}_{m-s}(t_{s'}, t_{s+s'}, \ldots, t_{m-2s}) + t_m - \frac{sT}{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)T^n}\varphi_{\mu, n+1}(T) \qquad (m = \mu s + s'), \end{aligned} \tag{76}$$

$$\bar{\vartheta}_{\mu s+s'}(t_{s'}, \ldots, t_{\mu s - s + s'}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} t_{m-\nu s} - \frac{\mu s T}{n+1} + \frac{1}{(n+1)T^n}\sum_{\nu=1}^{\mu}\varphi_{\nu, n+1}(T). \tag{77}$$

In (17 a, b) lautet die $e$-Potenz jetzt

$$e^{p\left(T - \sum_1^\mu t_{m-\nu s}\right) + \sum_1^\mu q_\nu t_{m-\nu s}}$$

und der aus $\varphi_{\mu, n+1}(T)$ durch Mittelung über alle $\mu!$ Permutationen $\Pi$ der $\mu$ Größen $t_{m-\nu s}$ entstehende Ausdruck

$$\varphi^*_{\mu, n+1}(T) = \frac{1}{\mu!}\sum_{\Pi} \varphi^{\Pi}_{\mu, n+1}(T) \tag{78}$$

kann in der gleichen Weise umgeformt werden wie das Integral (17 c), wodurch sich analog (20) ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi^*_{\mu, n+1}(T)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q} \frac{e^{pT + (q-p)\sum_1^\mu t_{m-\nu s}}}{p^{n-\mu s+1} q^{\mu s+1}(p-q)}\left[(\mu - 1)\left(\frac{q}{\mu}\sum_1^\mu t_{m-\nu s} - s\right) + \frac{q}{p-q}\right] dp\, dq. \end{aligned} \tag{79}$$

Zur Berechnung der $\vartheta_m$ benötigt man nur diesen Mittelwert (78), denn offensichtlich darf in dem Integranden von (74) jede beliebige Per-

mutation der $t_\nu$ vorgenommen werden, und daher auch in den Größen $\varphi_{\mu,n+1}(T)$, von welchen dieser Integrand nach (77) linear abhängt.

Für das arithmetische Mittel $\bar{\vartheta}(t_1,\ldots,t_{n-1})$ (bezüglich der $x_\nu$) der Größen $\vartheta_m$ folgt, mit (22), analog (24)

$$\bar{\vartheta}(t_1,\ldots,t_{n-1}) \tag{80}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_1^{\mu_0} t_{\nu s} - \frac{n-s}{2}\frac{T}{n+1} + \frac{s}{n(n+1)T^n}\sum_1^{\mu_0}(\mu_0+1-\mu)\varphi_{\mu,n+1}(T)$$

und hieraus für die mittlere Wartezeit $\vartheta$ einer beliebigen der $n$ Personen:

$$\vartheta = \int_{t'}^{t''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{n-1})\,\bar{\vartheta}(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \int_{t'}^{t_0''} df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''} df(t_{n-1}) \tag{81}$$
$$\left[\frac{1}{2}\sum_1^{\mu_0} t_{\nu s} - \frac{n-s}{2}\cdot\frac{T}{n+1} + \frac{s}{n(n+1)T^n}\sum_1^{\mu_0}(\mu_0+1-\mu)\varphi^*_{\mu,n+1}(T)\right],$$
$$\mu_0 = \frac{n-s}{s}.$$

Wir formen nun den Ausdruck (79) analog (20), (25) durch partielle Integration um in

$$\frac{1}{(n+1)!}\varphi^*_{\mu,n+1}(T) \tag{79a}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)}\cdot\frac{p^{s\mu}e^{(q-p)\sum_1^{\mu} t_{\nu s}}}{q^{s\mu}}\left(s-\frac{q}{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu} t_{\nu s}\right)dp\,dq$$

und setzen in (81) ein; vertauscht man die Reihenfolge der komplexen und der reellen Integrationen und führt die ganze Funktion

$$\mathcal{J}(z) = \int_{t'}^{t''} e^{zt}\,df(t) \tag{82}$$

ein, so wird aus (81):

$$\vartheta = \frac{n-s}{2s}\left(\mathcal{J}'(0) - \frac{sT}{n+1}\right) + \frac{s(n-1)!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \tag{83}$$
$$\times\sum_{\mu=1}^{\mu_0}(\mu_0+1-\mu)\frac{p^{s\mu}\mathcal{J}^{\mu-1}(q-p)}{q^{s\mu}}\left(s\mathcal{J}(q-p)-q\mathcal{J}'(q-p)\right)dp\,dq;$$

hieraus, mit

$$\sum_1^{\mu_0} = \left[(\mu_0+1)\frac{s\mathcal{J}(q-p)-q\mathcal{J}(q-p)}{\mathcal{J}(q-p)} + q\frac{\partial}{\partial q}\right]\frac{\left(\frac{p^s}{q^s}\mathcal{J}(q-p)\right)^{\mu_0+1}-\frac{p^s}{q^s}\mathcal{J}(q-p)}{\frac{p^s}{q^s}\mathcal{J}(q-p)-1},$$

$$\mu_0 = \frac{\mu-s}{s},$$

und partiell integriert:

$$\vartheta = \frac{n-s}{2s}\left(\mathcal{J}'(0) - \frac{sT}{n+1}\right) \tag{84}$$

$$+ \frac{s\cdot n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)}\left(\frac{s\mathcal{J}(q-p)-q\mathcal{J}'(p-q)}{s\mathcal{J}(q-p)} - \frac{p}{n(p-q)}\right)$$

$$\times \frac{p^n\mathcal{J}^{\frac{n}{s}}(q-p)-p^s\mathcal{J}(q-p)q^{n-s}}{p^s\mathcal{J}(q-p)-q^s}\,q^{s-n}\,dp\,dq.$$

Schreibt man hierin $p\cdot\frac{s}{\mathcal{J}'(0)}$ bzw. $q\cdot\frac{s}{\mathcal{J}'(0)}$ statt $p$ bzw. $q$ und setzt

$$\varepsilon(z) = \mathcal{J}\left(\frac{z}{\mathcal{J}'(0)}\right) = \int_{t'}^{t''} e^{z\frac{t}{\mathcal{J}'(0)}}\,df(t) \qquad (\varepsilon'(0)=1), \tag{85}$$

$$\eta = \frac{n\mathcal{J}'(0)}{sT}, \tag{86}$$

so folgt endlich in Verallgemeinerung der Gleichung (29)

$$\vartheta = \mathcal{J}_0'\left[\frac{n-s}{2s}\left(1-\frac{n}{(n+1)\eta}\right) + \frac{n!\,\eta^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2}(p-q)\,q^{n-s}}\right. \tag{87}$$

$$\times\left(\varepsilon(s(q-p)) - q\,\varepsilon'(s(q-p)) - \frac{p\,\varepsilon(s(q-p))}{n(p-q)}\right)$$

$$\left.\times\frac{p^n\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}(s(q-p))-p^sq^{n-s}}{p^s\varepsilon(s(q-p))-q^s}\right]dp\,dq.$$

In (87) bedeutet

$$\mathcal{J}_0' \equiv \mathcal{J}'(0) = \int_{t'}^{t''} t\,df(t) \tag{88}$$

die mittlere Abfertigungszeit, und die Größe $\eta$ (Gl. (86)) ist wieder als (mittlerer) Ausnützungsgrad zu bezeichnen[4]).

## 9. Asymptotische Entwicklungen der Formel (87).

Bei der asymptotischen Entwicklung der Gleichung (87) sind, wenn jetzt der früher erledigte Fall konstanter Wartezeit ausgeschlossen wird, nur drei Fälle zu unterscheiden:

$$\eta = \text{const} \gtrless 1, \qquad \eta = 1 + \text{const}\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (\text{const} \lessgtr 0).$$

1) $\eta = \text{const} < 1.$

[4]) Gl. (87) gilt auch dann noch, wenn man unendlich große Abfertigungszeiten ($t'' = \infty$) zuläßt, vorausgesetzt, daß (88) konvergiert. Da dann aber die Existenz und Regularität von $\mathcal{J}(z)$ und $\varepsilon(z)$ zunächst nur in der linken Halbebene sichergestellt ist, hat man in (87) dann als $C_p$ etwa eine rechts von $K_q$ gelegene Parallele zur imaginären Achse ($\Re e\,(q-p)<0$) zu nehmen.

Wir verschieben in (87) die gemäß Fig. 3 liegende Kurve $C_p$ in die linke $p$-Halbebene hinein ($C_p'$ in Fig. 7) und haben daher zu $\int_{C_p'}$ noch das Integral $\int_{K_q}$ über einen die Integrandenpole $p=0$ und $p=q$ (und daher den ganzen Kreis $K_q$) enthaltenden Kreis $K_p$ (Fig. 7) hinzuzuzählen:

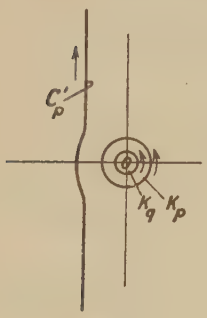


Fig. 7.

$$(89)\quad \vartheta = \mathcal{J}_0'\Big[\frac{n-s}{2s}\Big(1-\frac{n}{(n+1)\eta}\Big) + \frac{n!\,\eta^n}{n^n}\Big(\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{K_q} + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_q}\Big)\Big] \qquad (K_p > K_q).$$

Verkleinert man in $\int_{K_p}\int_{K_q}$ den Kreis $K_p$ so, daß $K_p < K_q$ wird, so hat man noch das Residuum in $p=q$ hinzuzunehmen, und da dieses sich, analog Gleichung (31a), als entgegengesetzt gleich dem ersten Gliede von (89) ergibt, folgt

$$(90)\quad \vartheta = \mathcal{J}_0'\frac{n!\,\eta^n}{n^n}\Big[\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{K_q} + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_q}\frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2}(p-q)\,q^{n-s}}\Big(\varepsilon(s(q-p)) - q\varepsilon'(s(q-p)) - \frac{p\varepsilon(s(q-p))}{n(p-q)}\Big)\frac{p^n\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}(s(q-p))-p^s q^{n-s}}{p^s\varepsilon(s(q-p))-q^s}\,dp\,dq\Big] \qquad (K_p < K_q).$$

Das zweite Doppelintegral in (90) ist gleich dem analogen Ausdrucke (32) so zu behandeln, daß auf $\int_{K_q}$, nach Streichung des Gliedes $p^n\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$, der Residuensatz angewandt und das Integral

$$(90a)\quad \frac{\eta^n}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_q} = \frac{1}{2\pi i s}\int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)}\Big(\mathrm{Res}_{q=p}+\sum_{k=1}^{s-1}F_k\Big)\frac{dp}{p}$$

mit

$$(90b)\quad \mathrm{Res}_{q=p} = \frac{sp\varepsilon_0''}{2(1-p)} + \frac{s-1}{2}\cdot\frac{1-2p}{p(1-p)} + \frac{s^2-1}{12n}\cdot\frac{p-1}{p} - \frac{1}{12n(1-p)^3} \times[p^3(3s^2\varepsilon_0''^2 - 2s^2\varepsilon_0''' - s^2+1) + 2p^2(s^2\varepsilon_0''' - 3s^2\varepsilon_0'' + 2s^2 - 2) + 6p(s\varepsilon_0'' - s+1)],$$

$$(90c)\quad \begin{cases} F_k(p) = \dfrac{q_k}{p(p-q_k)}\Big(1-\dfrac{p\varepsilon'(s(q_k-p))}{n(p-q_k)}\cdot\dfrac{1}{s(s(q_k-p))-q\varepsilon'(s(q_k-p))}\Big), \\ q_k = p\zeta_k\varepsilon^{\frac{1}{s}}(s(q_k-p)), \quad (k=0,1,2,\ldots,s-1); \qquad \varepsilon^{\frac{1}{s}}(0)=1 \end{cases}$$

(dessen Integrand längs der reellen Achse, auf der keine Verzweigungspunkte liegen können[5]), analytisch fortgesetzt werde), asymptotisch nach $n$ entwickelt wird. Bei Anwendung der Formel (36) hat man jedoch jetzt auf der rechten Seite die Summe $\sum_{p_v}$ der Verzweigungsintegrale hinzuzuzählen, die den innerhalb oder auf dem Rande der Schleife von (41a) (Fig. 4) liegenden Verzweigungspunkten $p_v$[5a]) der Funktionen $q_k(p)$ zugehören. Analog (38), (44) erhält man so

$$(91)\quad \frac{n!\,\eta^n}{n^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{K_p}\int_{K_q} = \frac{1}{2\pi i\,\eta}\int_{K_{|z|=1+}} \frac{\varepsilon(s\eta(z-1)) - z\eta\varepsilon'(s\eta(z-1))}{z^s - \varepsilon(s\eta(z-1))}\cdot\frac{dz}{1-z} + O\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{p_v},$$

wobei die Glieder der Summe $\sum_{p_v}$ von der resp. Größenordnung $\left|\frac{e^{\frac{p_v}{\eta}-1}}{\frac{p_v}{\eta}}\right|^n n^k$ sind (mit geeigneten Konstanten $k$).

Das erste Doppelintegral in (90), dessen Integrationskurve $C_p$ beliebig weit nach $\Re e(p) = -\infty$ hin verschoben werden darf, verschwindet identisch, falls

$$(92)\quad \frac{1}{\eta} > \frac{t''}{f'(0)} = \tau''$$

ist, d. h. falls auch der auf die größte auftretende (anstatt auf die mittlere) Abfertigungszeit bezogene Ausnützungsgrad $\leqq 1$ ist; denn dann verschwinden *beide* ausschlaggebenden Faktoren von (90), $e^{\frac{np}{\eta}}$ und

$$e^{\frac{np}{\eta}}\,\varepsilon^{\frac{n}{s}}(s(q-p)) = \left[\int_{t'}^{t''} e^{\frac{sqt}{f'(0)} + sp\left(\frac{1}{\eta} - \frac{t}{f'(0)}\right)} df\right]^{\frac{n}{s}},$$

exponentiell für $\Re e(p) \to -\infty$.

Um aber dieses Integral auch für $\frac{1}{\eta} \leqq \tau''$ ohne längere Betrachtungen abschätzen zu können, werden wir über die Verteilungsfunktion $f(t)$ einschränkende Annahmen machen. Um auch fernerhin als Integrationsbereich das „Produkt" zweier eindimensionaler Mannigfaltigkeiten nehmen zu können, ersetzen wir $p$ durch eine neue Integrationsvariable $p_0 = p - q$,

---

[5]) Beweis: $\int_{K_q} \dots \frac{dq}{p^s\,\varepsilon(s(q-p)) - q^s}$ ist wegen

$$|p^s\,\varepsilon(s(q-p))| < q^s \quad \text{für} \quad 0 \leqq p < 1, \quad 1 < \frac{|q|}{p} < 1+\delta$$

in der Nachbarschaft der Strecke $0 \leqq p < 1$ regulär.

[5a]) Es ist leicht, Verteilungsfunktionen $f(t)$, die „beliebig wenig" von der Verteilung bei konstanter Abfertigungszeit abweichen, anzugeben, derart, daß solche Verzweigungspunkte innerhalb der Schleife von (41a) wirklich vorhanden sind.

wobei zunächst die Integrationswege der Fig. 7 beibehalten werden dürfen $(C_{p_0} = C'_p)$:

$$(93)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C'_p}\int\limits_{K_q} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_{p_0}}\int\limits_{K_q} \frac{e^{\frac{n(p_0+q)}{\eta}}}{(p_0+q)^{n+2}\, p_0\, q^{n-s}} \cdot \frac{(p_0+q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1}(-sp_0) - (p_0+q)^s q^n}{(p_0+q)^s s(-sp_0) - q^s}$$

$$\times \left(\varepsilon(-sp_0) - q\varepsilon'(-sp_0) - \frac{(p_0+q)s(-sp_0)}{np_0}\right) dp_0\, dq.$$

Das weitere Verfahren besteht nun darin, daß wir die beiden Integrationswege derart verschieben, $(C'_{p_0}, K'_q)$, daß

$$(94a)\qquad \left| e^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)\right| < c' < 1 \quad \text{längs } C'_{p_0}$$

und

$$(94b)\qquad \left| \frac{e^{\frac{q}{\eta}-1}}{\frac{q}{\eta}} \right| \leqq 1 \quad \text{längs } K_q$$

ist. Dann kann nämlich der dem Minuenden $(p_0+q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1}(-sp_0)$ des zweiten Integrandenzählers entsprechende Anteil von $\frac{n!\,\eta^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)}\iint$ als $O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right)$ abgeschätzt werden; der Anteil des Subtrahenden $(p_0+q)^s q^{n-s}$ aber kann durch Anwendung des Residuensatzes als Summe von einfachen Integralen $\int \ldots dp_0$ geschrieben werden und es handelt sich nur noch darum, $C'_{p_0}$ derart einzurichten, daß auch diese Integrale abgeschätzt werden können, deren Auftreten eben der schematischen Anwendung der Sattelpunktsmethode auf das Doppelintegral (93) im Wege steht.

Der Nenner des Integranden (93) verschwindet an den Stellen

$$(95a)\qquad q = -p_0$$

und

$$(95b)\quad q = \frac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)}{1 - \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)}, \qquad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1;\ \varepsilon^{\frac{1}{s}}(0) = 1).$$

Wir ziehen nun in der $q$-Ebene eine einfach geschlossene Kurve $K'_q$ gemäß (94b), die also den Punkt $q = \eta$ passiert und die Schleife der Kurve $\left|e^{\frac{q}{\eta}-1}\right| = \left|\frac{q}{\eta}\right|$ im Innern enthält; dann werden die durch (95a) entworfenen Bilder $C_p^{-1}$ einiger Teilbogen $C_{p_0}^{-1}$ und die durch (95b) entworfenen Bilder $C_q^k$ von im allgemeinen unendlich vielen Teilbogen $C_{p_0}^k$ der Kurve $C'_{p_0}$ *innerhalb* $K'_q$ fallen. Wir gehen jetzt in (93) von $K_q$ zu $K'_q$ über, wobei die Residuen in den Punkten der $C_{p_0}^{-1}$ abzuziehen sind, und wenden

sodann auf das Glied mit $(p_0+q)^s q^{n-s}$ den Residuensatz an. Die Pole (95b) liefern die Residuen

$$\sum_{C_{p_0}^k} \frac{1}{2\pi i s} \int_{C_{p_0}^k} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+1-s} p_0^s q^{s-1}} \left(\varepsilon(-sp_0) - (p-p_0)\varepsilon'(-sp) - \frac{ps'(-sp_0)}{np_0}\right) dp_0,$$

wobei

$$p = \frac{p_0}{1 - \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)} \tag{97}$$

gesetzt ist; führt man in das letzte Integral $p$ anstatt $p_0$ als Variable ein, und schreibt $p - p_0 = q_k$ (so daß aus (97) $q_k = p\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(s(q-p))$ folgt), so wird weiter mit der Bezeichnung (90c)

$$\frac{1}{2\pi i s} \int_{C_{p_0}^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p^k} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^n} F_k(p) \frac{dp}{p}. \quad (C_p^k \text{ ist das } p\text{-Bild (97) von } C_{p_0}^k).$$

Die Umformung von (93) lautet also, da längs $C_{p_0}^{-1}$ im ganzen nur das Residuum des Gliedes mit $(p_0+q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$ abzuziehen ist,

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{n!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p'} \int_{K_q} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{p_0}'} \int_{K_q'} \left[ e^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)\, e^{\frac{q}{\eta} - \log\frac{q}{\eta}} \right]^n \frac{1}{(p_0+q)^2 p_0} \\ &\quad \times \frac{\varepsilon^{-1}(-sp_0)\, q^s}{(p_0+q)^s\, \varepsilon(-sp_0) - q^s} \left(\varepsilon(-sp_0) - q\varepsilon'(-sp_0) - \frac{p_0+q}{np_0}\varepsilon(-sp_0)\right) dp_0\, dq \\ &\quad + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{C_p^k} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i s} \int_{C_p^k} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log\frac{p}{\eta}\right)} F_k(p) \frac{dp}{p} \\ &\quad - \sum_{C_{p_0}^{-1}} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p_0}^{-1}} \frac{d}{dp_0} \left[ \frac{\varepsilon^{\frac{n}{s}}(-sp_0)}{\left(\frac{-p_0}{\eta}\right)^n} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{n-1}{np_0} - \delta_s^1 \frac{s(-sp_0)}{(n+1)p_0}\right) \right] dp_0. \end{aligned} \right.$$

Hat man $C_{p_0}'$ gemäß (94a) gewählt, was stets möglich ist, so handelt es sich nunmehr um die Abschätzung der Integrale $\int_{C_p^k}$. Die Enden der Kurven $C_p^k$ entsprechen den Schnittpunkten der beiden Kurven $K_q'$ und (95b) in der $q$-Ebene (Fig. 8). In diesen Schnittpunkten gilt nach (94b), (95b)

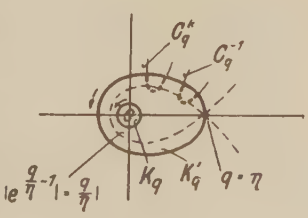


Fig. 8.

$$\left| \frac{\dfrac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}}{e^{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})}} - 1}{\dfrac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}}{\eta\left(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}\right)}} \right| < 1 \tag{98a}$$

und daher, wenn mit der Ungleichung (94a) multipliziert wird, nach (97)

$$\left| \frac{\dfrac{p_0}{e^{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})}} - 1}{\dfrac{p_0}{\eta\left(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}\right)}} \right| = \left| \frac{e^{\frac{p}{\eta}} - 1}{\dfrac{p}{\eta}} \right| < c' < 1 \tag{99a}$$

und ebenso findet man für beide Enden der Kurven $C_{p_0}^{-1}$

$$\left| \frac{\varepsilon^{\frac{1}{s}}(-s p_0)}{\dfrac{p_0}{\eta}} \right| < c' < 1. \tag{99b}$$

Da nach (99a) die Endpunkte aller $C_p^k$ dem Gebiete

$$\left| \frac{e^{\frac{p}{\eta}} - 1}{\dfrac{p}{\eta}} \right| < c' < 1 \tag{100}$$

der $p$-Ebene angehören, kann man insbesondere *dann* eine Kurve $C_p^k$ ganz in dieses Gebiet (s. Fig. 3) hinein verschieben, wenn sie die positiv-reelle $p$-Halbachse nicht schneidet. Um dies zu erzielen, werden wir $C'_{p_0}$ so bestimmen, daß im allgemeinen nur *solche* Stellen $p_0$ reelle $p$-Bilder (97) haben, deren $q$-Bilder (95b) von sehr großem Betrage sind und daher außerhalb $K'_q$ liegen; *diese* Stellen $p_0$ fallen daher außerhalb der Bogen $C_{p_0}^k$.

Außerdem wird (für $k \neq 0$) ein negativ-reeller Wert von (97) als Bild eines Punktes in der Nachbarschaft von $p_0 = 0$ mit kleinem $q$-Bild zugelassen werden. Weiter werden wir Vorkehrungen treffen, daß das $q$-Bild (95b) von $C'_{p_0}$ die Kurve $K'_q$ (Fig. 8) nur endlich oft schneidet; dann nämlich enthält die Doppelsumme in (98) nur endlich viele Glieder.

Den meisten dieser Bedingungen genügt die an verschiedenen Stellen nach links ausgebogene imaginäre $p_0$-Achse. Für imaginäres $p_0$ ist nämlich $|\varepsilon(-s p_0)| \leqq \varepsilon(0) = 1$ und daher der Ausdruck (97) nur an der Stelle $p_0 = 0$ reell; d. h. das $p$-Bild (97) der imaginären $p_0$-Achse schneidet die reelle $p$-Achse nur an der Stelle $p = 0$ (für $k > 0$) bzw. an der Stelle $p = 1$ (für $k = 0$). Für imaginäres $p_0$ gilt weiter (94a), abgesehen von der Nachbarschaft etwaiger Einsstellen von $\varepsilon(-s p_0)$; imaginäre Eins-

stellen sind ersichtlich dann und nur dann vorhanden, wenn die Verteilungsfunktion $f(t)$ abteilungsweise konstant ist und nur in äquidistanten Stellen der $t$-Achse unstetig wird, und sie liegen diskret, mit Ausnahme des Falles konstanter Abfertigungszeit ($\varepsilon(z) \equiv e^z$), den wir jetzt ausschließen.

Um das Ungleichheitszeichen von (94a) auch in der Nachbarschaft dieser Einsstellen zu erzielen, hat man dort die imaginäre $p_0$-Achse hinreichend wenig nach links auszubiegen, denn für hinreichend kleines $\Re e(p_0) = x < 0$ gilt wegen

$$\left[e^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-s p_0)\right]'_{p_0=0} = \frac{1}{\eta} - 1 > 0 \qquad \text{auch}$$

$$\left| e^{\frac{x+iy}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-s(x+iy)) \right| < e^{\frac{x}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sx) < \varepsilon^{\frac{1}{s}}(0) = 1$$

und ersichtlich wird der Betrag von (95b) an den Realstellen des $p$-Bildes (97) der so deformierten imaginären $p_0$-Achse (abgesehen von der Stelle $p \approx 0$ bzw. $p \approx 1$) beliebig groß.

Um aber zu verhindern, daß das $q$-Bild (95b) von $C'_{p_0}$ die Kurve $K'_q$ unendlich oft schneidet, machen wir einschränkende Annahmen über $f(t)$ und daher über $\varepsilon(z)$. Wir setzen von hier ab $f(t)$ als abteilungsweise konstante, nur in äquidistanten Punkten der $t$-Achse unstetige Funktion voraus; gleiches gilt dann von $\varphi(t)$ und nach (85) wird $e^{-z\tau_1}\varepsilon(z)$ gleich einem Polynom $N = \frac{\tau'' - \tau'}{\delta}$-ten Grades in $e^{z\delta}$ (unter $\delta$ die Stufenbreite von $\varphi(\tau)$ verstanden). $\varepsilon(z)$ wird also, bis auf einen Exponentialfaktor, eine periodische Funktion von $z$; die Einsstellen und die etwaigen imaginären Nullstellen von $|\varepsilon(-s p_0)|$ bilden eine gewisse Anzahl äquidistanter Punktreihen auf der imaginären Achse und in einem gewissen Parallelstreifen um diese Achse liegen keine weiteren Nullstellen.

Als $C'_{p_0}$ nehmen wir nun die an den erwähnten Nullstellen und Einsstellen halbkreisförmig, mit konstantem Radius $\varrho$, nach links ausgebogene imaginäre Achse. Macht man den Radius $\varrho$ hinreichend klein, so gilt ersichtlich folgendes:

$\alpha$) Längs $C'_{p_0}$ ist (94a) erfüllt mit einer geeigneten Konstante $c' < 1$.

$\beta$) Die periodische Funktion $|\varepsilon(-s p_0)|$ hat längs $C'_{p_0}$ keine Nullstelle und daher ein positives Minimum, so daß der Betrag von (95b) längs $C'_{p_0}$ gegen $\infty$ geht und die Kurven (95b) und $K'_q$ (Fig. 8) einander nur endlich oft schneiden.

$\gamma$) Diejenigen Punkte von $C'_{p_0}$, deren $p$-Bilder (97) reell sind, haben im allgemeinen $q$-Bilder (95b) von sehr großem Betrage und liegen daher nicht auf den Bogen $C^k_{p_0}$; außerdem hat das $p$-Bild des der Stelle $p = 0$

benachbarten Bogens von $C'_{p_0}$, der für $k \neq 0$ ein $C^k_{p_0}$ ist, einen Schnittpunkt $p \approx \frac{-\varrho}{2 \sin \frac{k\pi}{s}}$ mit der negativ-reellen Halbachse.

Infolge $\alpha$) kann das Doppelintegral rechts in (98) (die endlich vielen Nullstellen des Integrandennenners ergeben bekanntermaßen keine Schwierigkeiten) als $O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right)$ abgeschätzt werden:

$$\frac{n!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q} = O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right). \tag{101a}$$

Infolge $\beta$) enthält die Doppelsumme in (98) nur endlich viele Glieder; deren Integrationskurven $C^k_p$ können nun zufolge $\gamma$) ohne Überschreitung des Sattelpunktes $p = \eta$ ganz in das Gebiet (100) hinein verschoben werden, wobei im allgemeinen Verzweigungspunkte $p_v$ der Integranden überstrichen werden, so daß die betreffenden Verzweigungsintegrale hinzuzuzählen sind. Mit (99a) erhält man daher:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{C} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i s} \int_{C^k_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right)} F_k(p) \frac{dp}{p} = \sum_{p_v}' + O(c'^n), \tag{101b}$$

und ebenso folgt mit (99b) für das letzte Glied in (98)

$$\sum_{C^{-1}_{p_0}} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{-1}_{p_0}} = O(c'^n). \tag{101c}$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben mit (98)

$$\frac{n!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_p} \int_{K_q} = \sum_{p_v}' + O(c'^n), \tag{102}$$

und aus (90), (91), (102) folgt

$$\vartheta = O(1) + \sum_{p_v} + \sum_{p_v}' + O(c'^n). \tag{103}$$

Da nun $\vartheta$ gemäß seiner Definition als Mittelwert von Wartezeiten höchstens $O(n)$ ist, während die einzelnen Glieder von $\sum_{p_v}$ und $\sum_{p_v}'$ von der Größenordnung $\left| \frac{e^{\frac{p_v}{\eta}} - 1}{\frac{p_v}{\eta}} \right|^n n^k$ sind, mit

$$\left| \frac{e^{\frac{p_v}{\eta}} - 1}{\frac{p_v}{\eta}} \right| \geqq 1, \tag{104}$$

so müssen jedenfalls diejenigen Verzweigungsintegrale, für welche in (104) das Ungleichheitszeichen gilt, in beiden Summen mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Würden aber für ein bestimmtes $\eta = \eta_0$ diejenigen Glieder, für welche (104) mit dem Gleichheitszeichen gilt, nicht ebenfalls identisch fortfallen, so würde die Gleichung (103) für jedes $\eta > \eta_0$ ein mit $n$ exponentiell wachsendes $\vartheta$ ergeben; daher gilt, jedenfalls für $\eta < 1$,

$$\sum_{p_v} + \sum_{p_v}' = 0 \qquad (0 \leqq \eta < 1) \tag{105}$$

und hieraus folgt mit (90), (91), (102)

$$\vartheta = \mathcal{J}_0' \cdot \frac{1}{2\pi i \eta} \int_{K\,|z|=1+} \frac{\varepsilon(s\eta(z-1)) - z\eta\varepsilon'(s\eta(z-1))}{z^s - \varepsilon(s\eta(z-1))} \frac{dz}{1-z} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \eta < 1 \tag{106}$$

und allgemeiner die Regel, daß man, um die asymptotische Entwicklung von $\vartheta$ zu erhalten, das Integral (90a) formal (d. h. ohne Berücksichtigung der Verzweigungspunkte des Integranden) nach der Sattelpunktsmethode zu entwickeln hat.

Durch Anwendung des Residuensatzes auf (106) folgt analog Gl. (46)

$$\boxed{\vartheta = \mathcal{J}_0' \left[ \frac{\eta}{2(1-\eta)} \left( \varepsilon''(0) - \frac{s-1}{s} \right) - \frac{s-1}{2s\eta}(1+\eta) + \frac{1}{s\eta} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]}. \tag{106a}$$

Hierin sind mit $z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s-1)$ die $s-1$ innerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon(s\eta(z-1)) - z^s = 0 \qquad (0 < \eta < 1) \tag{106b}$$

bezeichnet; analog der Gleichung (46a) könnte auch für das Integral in (106) eine Reihenentwicklung gegeben werden.

2) $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad c \gtrless 0.$

Wir gehen aus von Gleichung (90); wird der *zweite*, durch Gleichung (90a—c) umgeformte Summand so behandelt wie im Falle konstanter Abfertigungszeit (Gleichung (51) ff.), so folgt, mit der Abkürzung

$$\varepsilon''(0) = \varepsilon_0'',$$

$$\frac{n!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} \tag{107}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{4s} \Big[ c(s\varepsilon_0'' - s + 1)^2 + (4(s\varepsilon_0'' - s + 1) - (1 + 2c^2)(s\varepsilon_0'' - s + 1)^2)$$

$$\times \int_0^\infty e^{-x^2 - 2cx}\, dx \Big] + O(1) + \sum_{p_v}'.$$

Den ersten Summanden von (90) zerlegen wir wieder gemäß Gleichung (98), wobei jetzt als $C'_{p_0}$ die nur an den Nullstellen von $\varepsilon(-sp_0)$ (mit hinreichend kleinem von $n$ unabhängigem Radius $\varrho$) und an der Stelle $p_0 = 0$ $\left(\text{mit einem Radius } \varrho' = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}\right)$ halbkreisförmig nach links ausgebogene imaginäre Achse gewählt wird. Wie früher kann dann das zweite und dritte Glied rechts in (98) gemäß (101 b, c), mit geeignetem $c' < 1$, abgeschätzt werden; da jedoch (94 a) nicht mehr durchwegs erfüllt und für keine Lage von $C'_{p_0}$ erfüllbar ist (das Minimum von $c'^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)$ längs der reellen Achse geht mit $\eta \to 1$ selbst gegen 1), verschwindet das Glied $\int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q}$ rechts in (98) nicht mehr exponentiell, sondern die Umgebung von $q = 1$ (auf $K'_q$) liefert zusammen mit der Umgebung von $p_0 = 0$, bzw. mit den Umgebungen der übrigen auf $C'_{p_0}$ liegenden Einsstellen von $|\varepsilon(-sp_0)|$ zu diesem Doppelintegral Beiträge von der Größenordnung $n^{\frac{1}{2}}$ resp. $n^{-1}$. Um z. B. den Beitrag der Einsstelle $p_0 = 0$ zu erhalten, hat man formal

$$p_0 = i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta, \qquad q = 1 + i\sqrt{\frac{2}{n}}z \tag{108}$$

zu setzen, womit für den Exponenten des ausschlaggebenden $q$-Faktors $e^{n\left(\frac{q}{n} - \log\frac{q}{n}\right)}$ wieder Gleichung (50 a) folgt, während sich für den Exponenten des ausschlaggebenden $p_0$-Faktors $\left(e^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)\right)^n$

$$n\left(\frac{p_0}{\eta} + \frac{1}{s}\log\varepsilon(-sp_0)\right) = 2ic\zeta - s\zeta^2(\varepsilon''_0 - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

also ebenfalls eine Größe $O(1)$ ergibt.

Elementare Abschätzungen zeigen dann, daß man die asymptotische Entwicklung des Beitrages der Umgebung von $p_0 = 0$, $q = 1$ dadurch erhält, daß man (Anwendung der Sattelpunktsmethode auf Doppelintegrale) in $\int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q}$ die Variablen (108) einführt, den Integranden formal nach $\frac{1}{\sqrt{n}}$ entwickelt, und gliedweise nach $\zeta$ und $z$ integriert. Die Integrationskurve $K'_q$ haben wir uns, nach Festlegung von $C'_{p_0}$, in solcher Weise aus der Umgebung von $q = 0\,(K_q)$ bis an die Stelle $q = 1$ deformiert zu denken, daß dabei der Nennerfaktor

$$q - \frac{p_0 \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)}{1 - \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)} = i\sqrt{\frac{2}{n}}\left(z + \zeta^2 \frac{s+1-s\varepsilon''_0}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

niemals verschwindet, und um dies zu erzielen, hat man den Realteil von $q$ hinreichend unterhalb 1 zu lassen. Demgemäß hat man in dem mit (108) transformierten Integrale die Integration nach $z$ und $\zeta$ etwa über zwei Parallele $G_1$, $G_2$ zur reellen Achse, für welche

$$\Im\mathfrak{m}\left(z+\zeta\cdot\frac{s+1-s\varepsilon_0''}{2}\right)>0, \qquad \Im\mathfrak{m}(\zeta)>0$$

gilt, zu erstrecken. Die Durchführung der Rechnung ergibt in erster Näherung

$$(109)\quad \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_{p_0}'\approx 0}\int\limits_{K_q'\approx 1}=\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2 s}\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\frac{e^{2ic\zeta-s\zeta^2(\varepsilon_0''-1)-(z-ic)^2}}{-z-\zeta\cdot\frac{s+1-s\varepsilon_0''}{2}}$$

$$\asymp\left(\zeta s(\varepsilon_0''-1)+\frac{1}{2\zeta}-z\right)\frac{dz\,d\zeta}{\zeta^2}+O(1).$$

Um das letzte Doppelintegral in reelle Form überzuführen, hat man durch Differentiation nach geeigneten Parametern die Integrandennenner fortzuschaffen, wodurch sich bekannte Integraltypen ergeben, und hat sodann wieder nach den Parametern zu integrieren. Mit

$$(110)\qquad v=\sqrt{s(\varepsilon_0''-1)}$$

(da wir den Fall $\varepsilon(z)=e^z$ ausgeschlossen haben, gilt nach der Schwarzschen Ungleichung für das durch (85) definierte $\varepsilon(z)$ immer $\varepsilon_0''>1$ und daher $v>0$), erhält man so

$$(111)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\ldots dz\,d\zeta=\frac{1}{8\pi}\Bigg[v(v^2+3)e^{-\frac{c^2}{v^2}}-2c(v^4+2v^2+3)\int\limits_{\frac{c}{v}}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

$$+2e^{c^2}v(2v^2c^2+2c^2+v^2-3)\int\limits_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty}\int\limits_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty}e^{-x^2-2xy\frac{1-v^2}{1+v^2}-y^2}dx\,dy\Bigg]\equiv A.$$

Um den Beitrag einer der übrigen Einsstellen (diese sind bei unseren Annahmen von der Form $\frac{2\pi i\nu}{\delta}$ $(\nu=\pm1,\pm2,\ldots)$) zu erhalten, hat man die eben angedeutete Rechnung mit $p_0=\frac{2\pi i\nu}{\delta}+i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta$ an Stelle von (108) durchzuführen.

Da das höchste Glied der so zu erhaltenden, von allen übrigen Einsstellen herrührenden Entwicklung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist, wird die Entwicklung von $\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_{p_0}'}\int\limits_{K_q'}$ in erster Näherung durch (109), (111) gegeben:

$$(112a)\qquad \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_{p_0}'}\int\limits_{K_q'}=\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{1}{s}\cdot A+O(1),$$

und mit (101b), (101c) folgt daher für (98)

$$\frac{n!\,\eta^n}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{K_q'}=\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{1}{s}\cdot A+O(1)+\sum_{p_v}. \tag{112b}$$

Setzt man (112b) und (107) in (90) ein, so ergibt sich

$$\vartheta=O(\sqrt{n})+\sum_{p_v}+\sum_{p_{v'}}',$$

und hier müssen in $\sum_{p_v}+\sum_{p_v}'$ nach dem bei Gleichung (103) Ausgeführten alle jene Glieder identisch fortfallen, deren $p_v$ innerhalb der Schleife der Kurve (41a) liegt; die etwa nicht identisch fortfallenden Beiträge der *auf* dieser Schleife liegenden $p_v$ wären aber im wesentlichen von der Größenordnung (70) und würden daher im Falle $c<0$ $(\Re(p_v-1)<0)$ ein $\vartheta=O(e^{k\sqrt{n}})$ $(k>0)$ ergeben, was unmöglich ist. Daher gilt die Gleichung (105) auch noch für $\eta=1$, und mit ihr folgt aus (90), (107), (112b), (111)

$$\begin{aligned}\vartheta=\mathcal{J}_0'\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{4s}\Big\{&c(v^2+1)^2+[4(v^2+1)-(1+2c^2)(v^2+1)^2]\int_0^\infty e^{-x^2-2cx}\,\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi}}v(v^2+3)e^{-\frac{c^2}{v^2}}-2c(v^4+2v^2+3)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{c}{v}}^\infty e^{-x^2}dx\\&+2e^{c^2}v(2v^2c^2+2c^2+v^2-3)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1+v^2}{2v}c}^\infty\int_{\frac{1+v^2}{2v}c}^\infty e^{-x^2-2xy\frac{1-v^2}{1+v^2}-y^2}dx\,dy\Big\}+O(\\&\left(\eta=1-c\sqrt{\frac{2}{n}},\quad c\gtrless 0,\quad v=\sqrt{s(\varepsilon''(0)-1)}\right)\end{aligned} \tag{113}$$

Aus (113) folgt für $c=0$

$$\vartheta=\mathcal{J}_0'\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\cdot\frac{1}{8s}\left[(v^2+1)(v^2-3)\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}v-1\right)+\frac{2v}{\pi}(v^2+3)\right]+O(1)$$
$$\left(\eta=1,\quad v=\sqrt{s(\varepsilon''(0)-1)},\quad 0\leqq\operatorname{arc\,tg}v<\frac{\pi}{2}\right) \tag{113a}$$

3) Der Fall $\eta=\text{const}>1$ kann nunmehr rasch erledigt werden. Zunächst sieht man, daß im Sonderfall

$$\frac{1}{\eta}<\frac{t'}{\mathcal{T}'(0)}=\tau'$$

o wie bei konstanter Abfertigungszeit vorgegangen werden könnte. Im allgemeinen Falle gehen wir aus von Gleichung (87) und Fig. 3 und ersetzen die Variable $p$ wieder durch $p_0 = p - q$, wodurch das Integral $\int\limits_{C_p}\int\limits_{K_q}$ in (87) formal in (93) übergeht ($K_q$ liegt jetzt links von $C_{p_0}$).

Sodann wählen wir $K_q'$ so wie früher (Fig. 8) und nehmen als $C_{p_0}'$ die an den früher erwähnten Null- und Einsstellen etwa halbkreisförmig *nach rechts* ausgebuchtete imaginäre $p_0$-Achse. In gleicher Weise wie früher gelangt man dann zur Gleichung (98), deren erstes und letztes Glied gemäß (101a), (101c) abgeschätzt werden können; diejenigen $s$ Kurven $C_p^k$ jedoch, welche gemäß (97) der Nachbarschaft von $p_0 = 0$ (auf $C_{p_0}'$) entsprechen, schneiden die reelle $p$-Achse rechts vom Nullpunkt und bleiben daher bei dem Versuch, sie in das Gebiet (100) hinein zu verschieben, am Sattelpunkt $p = \eta$ hängen; die zugehörigen $s$ Integrale $\int\limits_{C_p^k}$ müssen daher nach der Sattelpunktsmethode entwickelt werden, während für die übrigen Glieder der Doppelsumme in (98) wieder (101b) gilt. Man stellt dann ähnlich wie früher fest, daß keine störenden Verzweigungsintegrale auftreten können, und erhält daher aus (87)

$$\vartheta = \mathcal{J}_0'\Big[\frac{n-s}{2s}\Big(1-\frac{n}{(n+1)\eta}\Big) + \sum_{k=0}^{s-1}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p\approx\eta} e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)}F_k(p)\frac{dp}{p} + O(c'')\Big] \qquad (\eta > 1) \tag{114}$$

wobei unter $C_{p\approx\eta}$ ein die reelle Achse im Punkte $p = \eta$ senkrecht schneidendes Kurvenelement, unter $c''$ eine geeignete Konstante $< 1$ und unter $q_k(p)$ (in den Ausdrücken $F_k(p)$ von Gleichung (90c)) die längs der reellen $p$-Achse fortgesetzte, für $p_0 \approx 0$ durch die Parameterdarstellung (95b), (97) gegebene Lösung der Gleichung $q_k = p\,\zeta_k\,\varepsilon^{\frac{1}{s}}(s(q_k - p))$ zu verstehen ist.

Es kommt dies also auf dasselbe hinaus, als ob man in dem Integral (87) das Glied $p^n\varepsilon^{\frac{n}{s}-1}(s(q-p))$ streichen und den Rest, so wie in § 6, eventuell nach Anwendung des Residuensatzes auf $K_q$, formal im Sattelpunkt $p = \eta$ entwickeln würde, und man erhält so

$$\vartheta = \mathcal{J}_0'\Big[n\frac{\eta-1}{2s\eta} - \frac{\eta-1}{2\eta} + \frac{1}{2s\eta} + \frac{1}{2\pi i\eta}\int\limits_{K_{|z|=1-}} \frac{s(s\eta(z-1)) - z\eta\, s'(s\eta(z-1))}{z^s - s(s\eta(z-1))}\cdot\frac{dz}{1-z} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big], \qquad \eta > 1, \tag{115}$$

oder analog Gleichung (60)

$$(116)\qquad \boxed{\vartheta = \frac{J_0'}{s}\left[n\frac{\eta-1}{2\eta} - \frac{s-1}{2\eta} - \frac{s}{2} + \frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad \eta > 1},$$

wobei $z_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$ die $s$ innerhalb des Einheitskreises gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$(116a)\qquad z^s - \varepsilon(s\,\eta\,(z-1)) = 0, \qquad \eta > 1$$

bezeichnet.

(Eingegangen am 1. Juni 1929.)

# Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Sieht man von einer von Herrn Yosie[1]) angegebenen Bedingung ab, so liegen auf die Frage, unter welchen Bedingungen bei einem Differentialgleichungssystem

$$(D) \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

mit stetigen rechten Seiten die Integralkurve durch den Anfangspunkt eindeutig bestimmt ist, folgende Antworten vor:

Auf der einen Seite ist man im Verlaufe einer längeren Entwicklung zu folgendem Satz gelangt[2]):

I. *Im Bereich*

$$0 \leqq x < a, \qquad z \geqq 0$$

*sei die Funktion* $\omega(x, z)$ *stetig und* $\geqq 0$, *und die Differentialgleichung*

$$z' = \omega(x, z)$$

*möge in dem angegebenen Bereich nur eine durch den Punkt* $0, 0$ *gehende Integralkurve haben, und zwar die Gerade* $z = 0$ *für das ganze Intervall* $0 \leqq x < a$.

[1]) Japanese Journal of Mathematics **2** (1926), S. 161–173.

[2]) O. Perron, Math. Annalen **95** (1926), S. 98–101; vgl. auch M. Müller, Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale [Sitz.-Berichte der Heidelberger Akademie d. Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1927].

*Sind nun*

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ \ldots, \ f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

*Funktionen, die in dem Bereich*

$$(1) \qquad \xi \leqq x < \xi + a, \quad |y_1 - \eta_1| < b, \quad \ldots, \quad |y_n - \eta_n| < b$$

*definiert sind und die Ungleichungen*

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \omega(x - \xi, z)$$

*für*

$$z = \operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,n} |\bar{y}_\mu - y_\mu|$$

*und $\nu = 1, \ldots, n$ erfüllen, so hat das System* (D) *in dem Bereich* (1) *höchstens eine durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehende Integralkurve.*

Wählt man insbesondere $\omega(x, z) = kz$, wo $k$ eine positive Konstante bedeutet, so ergibt sich, daß die Eindeutigkeit des Integrals gesichert ist, wenn die Funktionen die Lipschitz-Bedingung

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq k \operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,n} |\bar{y}_\mu - y_\mu|$$

erfüllen.

Auf der anderen Seite steht ein Eindeutigkeitskriterium, das zuerst von Herrn Nagumo [3]) angegeben ist und von Herrn Perron [4]) die folgende Gestalt erhalten hat:

II. *Wenn die Funktionen*

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ \ldots, \ f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

*in dem Bereich*

$$\xi \leqq x < \xi + a, \quad |y_1 - \eta_1| < b, \quad \ldots, \quad |y_n - \eta_n| < b$$

*stetig sind und den Bedingungen*

$$(x - \xi)|f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,n} |\bar{y}_\mu - y_\mu|$$

*genügen, hat das System* (D) *in dem angegebenen Bereich nur eine durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehende Integralkurve.*

Beschränkt man sich auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$, so folgt aus diesem Satz offenbar ebenfalls, daß die Lipschitz-Bedingung die Eindeutigkeit sichert. Aber dieser Satz sichert die Eindeutigkeit auch in einer Reihe von Fällen, in denen die Lipschitz-Bedingung nicht mehr erfüllt ist, ja auch in Fällen, in denen der Satz I

[3]) Japanese Journal of Mathematics 3 (1926), S. 107–112.
[4]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 216–219.

nicht mehr anwendbar ist. Gleichwohl hat dieser Satz von Nagumo-Perron einen sehr speziellen Charakter und legt die Frage nahe, ob man ihn nicht zu einem dem Satz I entsprechenden Satz verallgemeinern kann. Das ist in der Tat möglich, und zwar gelangt man zu folgendem Satz, der für $n = 1$ die genauen Sätze I und II und für $n > 1$ diese Sätze nach geringfügigen Modifikationen als Sonderfälle enthält:

III. *Es sei* $\omega(x, z)$ *stetig und* $\geqq 0$ *in dem Bereich*

$$0 < x < a, \quad z \geqq 0. \tag{2}$$

*Für jedes* $0 < \alpha < a$ *sei* $\chi(x) \equiv 0$ *im Intervall* $0 \leqq x < \alpha$ *die einzige differenzierbare Funktion, die in dem offenen Intervall* $0 < x < \alpha$ *ein Integral der Differentialgleichung*

$$z' - \omega(x, z) \tag{3}$$

*ist und die Bedingungen* $\chi(0) = \chi'(0) = 0$ *erfüllt.*

*Sind nun*

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ \ldots, \ f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

*Funktionen, die in dem Bereich*

$$\xi \leqq x < \xi + a, \quad |y_1 - \eta_1| < b, \ \ldots, \ |y_n - \eta_n| < b \tag{4}$$

*definiert sind und die Ungleichungen*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \omega\Big(x - \xi, \ \sum_{\nu=1}^{n} |\bar{y}_\nu - y_\nu|\Big)$$

*erfüllen, so hat das System* (D) *in dem Bereich* (4) *höchstens eine durch den Punkt* $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *gehende Integralkurve.*

Der Beweis beruht wesentlich auf dem folgenden

Hilfssatz. Es sei $\omega(x, z)$ stetig und $\geqq 0$ in dem abgeschlossenen Gebiet

$$\xi \leqq x \leqq \xi + a, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ seien in dem Bereich

$$\xi \leqq x \leqq \xi + a, \quad a_1 < y_1 < b_1, \ \ldots, \ a_n < y_n < b_n$$

definiert und mögen die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \omega\Big(x, \ \sum_{\nu=1}^{n} |\bar{y}_\nu - y_\nu|\Big) \tag{5}$$

erfüllen. Ferner sei für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$

$$y_1 = \varphi_1(x), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(x)$$

eine durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ und

$$y_1 = \overline{\varphi}_1(x), \ \ldots, \ y_n = \overline{\varphi}_n(x)$$

eine durch den Punkt $\xi, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n$ gehende Integralkurve des Systems (D) und endlich $z = \psi(x)$ für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$ die durch den Punkt

$$\xi, \zeta = \sum_{\nu=1}^{n} |\overline{\eta}_\nu - \eta_\nu|$$

gehende maximale Integralkurve der Differentialgleichung

$$z' = \omega(x, z). \tag{3}$$

Dann ist für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\overline{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)| \leqq \psi(x).$$

Beweis des Hilfssatzes. Der Beweis läßt sich sowohl unter Verwendung der von Herrn Perron eingeführten Oberfunktionen als auch folgendermaßen führen, wobei wiederum ein von Herrn Perron mehrfach verwendetes Schlußverfahren benutzt wird. Für alle hinreichend kleinen positiven $\varepsilon$ hat die Differentialgleichung

$$z' = \omega(x, z) + \varepsilon$$

Integralkurven $y = \psi(x, \varepsilon)$, die durch den Punkt $\xi, \zeta$ gehen und für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$ existieren; diese erfüllen die Relation

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi(x, \varepsilon) = \psi(x)\ ^{5}).$$

Daher genügt es, die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\overline{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)| \leqq \psi(x, \varepsilon) \tag{6}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und solche Integrale $\psi(x, \varepsilon)$ zu beweisen, die in dem Intervall $\xi \leqq x \leqq \xi + a$ existieren.

Wäre nun die Ungleichung (6) nicht in dem ganzen Intervall $\langle \xi, \xi + a \rangle$ richtig, so gäbe es eine untere Grenze $\xi_1$ $(\xi \leqq \xi_1 < \xi + a)$ der Zahlen $x \geqq \xi$, für die (6) falsch ist. Wegen der Stetigkeit der Funktionen wäre

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\overline{\varphi}_\nu(\xi_1) - \varphi_\nu(\xi_1)| = \psi(\xi_1, \varepsilon) \tag{7}$$

---

[5]) Das ergibt sich z. B. durch eine leichte Umgestaltung des Hilfssatzes 2 bei Kamke, Zur Theorie der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ [Acta Mathematica 52 (1929), S. 331 ff.].

und, wenn $D_+$ die rechtsseitige Ableitung bedeutet [6]),

$$\Big[D_+ \sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)|\Big]_{x=\xi_1} \geqq \psi'(\xi_1, \varepsilon),$$

also erst recht

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu'(\xi_1) - \varphi_\nu'(\xi_1)| \geqq \psi'(\xi_1, \varepsilon),$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(\xi_1, \bar{\varphi}_1(\xi_1), \ldots, \bar{\varphi}_n(\xi_1)) - f_\nu(\xi_1, \varphi_1(\xi_1), \ldots, \varphi_n(\xi_1))| \geqq \omega(\xi_1, \psi(\xi_1, \varepsilon)) + \varepsilon,$$

während wegen (7) und (5)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(\xi_1, \bar{\varphi}_1(\xi_1), \ldots, \bar{\varphi}_n(\xi_1)) - f_\nu(\xi_1, \varphi_1(\xi_1), \ldots, \varphi_n(\xi_1))| \leqq \omega(\xi_1, \psi(\xi_1, \varepsilon))$$

ist. Aus diesen beiden Ungleichungen würde also entgegen unserer Voraussetzung $\varepsilon \leqq 0$ folgen, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Zusatz. Gelten die Voraussetzungen des Hilfssatzes für $\xi - a \leqq x \leqq \xi$ statt für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$, so gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)| \geqq \psi(x),$$

wo $y = \psi(x)$ die durch den Punkt $\xi, \zeta$ gehende minimale Integralkurve der Gleichung (3) ist.

Der Beweis hierfür ist fast wörtlich derselbe wie für den Hilfssatz. Man hat nur in der Relation (6) das Zeichen $\leqq$ durch $\geqq$ zu ersetzen und unter $\xi_1$ die obere Grenze der Zahlen $x \leqq \xi$ zu verstehen, für welche die so abgeänderte Ungleichung (6) nicht zutrifft.

Hieraus ergibt sich nun leicht der

Beweis des Satzes III. Es seien

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \quad \text{und} \quad y_1 = \bar{\varphi}_1(x), \ldots, y_n = \bar{\varphi}_n(x)$$

zwei für $\xi \leqq x < \xi + \alpha$ existierende Integralkurven des Systems (D), die beide durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehen. Wären sie nicht identisch, so wäre an einer Stelle $\xi_0$ $(\xi < \xi_0 < \xi + \alpha)$

$$\zeta = \sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu(\xi_0) - \varphi_\nu(\xi_0)| > 0.$$

---

[6]) Dabei wird benutzt, daß für differenzierbare Funktionen die Summe ihrer absoluten Beträge nach rechts differenzierbar ist.

Durch den Punkt $\xi_0, \zeta$ gäbe es eine noch ein gewisses Stück links von $\xi_0$ existierende minimale Integralkurve $y = \psi(x)$ der Differentialgleichung

$$z' = \omega(x - \xi, |z|). \tag{8}$$

Soweit diese Kurve links von $\xi_0$ existiert, wäre nach dem Zusatz

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)| \geqq \psi(x).$$

Die Funktion $\psi(\xi + x)$ ist, soweit sie im Intervall $0 < x \leqq \xi_0 - \xi$ existiert, ein Integral von (3). Daher ist $\psi(\xi + x) > \chi(x) = 0$; denn sonst könnte man, wenn man von $\xi_0 - \xi$ nach links fortschreitet, bei dem Schnittpunkt der beiden Kurven $y = \psi(\xi + x)$ und $y = \chi(x)$ von der ersten Kurve auf die zweite übergehen und hätte damit entgegen der Voraussetzung eine zweite Integralkurve von (3), die in den Punkt 0, 0 ebenfalls mit der Ableitung 0 einmündete.

Die Funktion $y = \psi(x)$ erfüllt also, soweit sie von $\xi_0$ aus nach links existiert, die Ungleichungen

$$0 < \psi(x) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\bar{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)|. \tag{9}$$

Die Integralkurve $y = \psi(x)$ muß aber nach links dem Rand des für die Differentialgleichung (8) maßgebenden Gebiets $\xi < x < \xi + \alpha$, $-\infty < z < +\infty$ beliebig nahe kommen. Da sie wegen der Ungleichungen (9) beschränkt ist, muß sie also an den linken Rand dieses Bereichs herankommen und existiert daher in dem ganzen Intervall $\xi < x \leqq \xi_0$ und erfüllt dort die Ungleichungen (9). Daraus folgt aber, daß

$$\lim_{x \to \xi} \psi(x) = 0$$

existiert. Wird nun $\psi(\xi) = 0$ gesetzt, so ist weiter für $\xi < x < \xi_0$

$$0 < \frac{\psi(x) - \psi(\xi)}{x - \xi} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\bar{\varphi}_\nu(x) - \varphi_\nu(x)}{x - \xi} \right|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\bar{\varphi}_\nu(x) - \bar{\varphi}_\nu(\xi)}{x - \xi} - \frac{\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(\xi)}{x - \xi} \right|.$$

Da

$$\lim_{x \to \xi} \left\{ \frac{\bar{\varphi}_\nu(x) - \bar{\varphi}_\nu(\xi)}{x - \xi} - \frac{\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(\xi)}{x - \xi} \right\} = \bar{\varphi}_\nu'(\xi) - \varphi_\nu'(\xi)$$

$$= f_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) - f_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$$

ist, existiert demnach $\psi'(\xi)$ und hat den Wert 0. Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht, da hiernach $y = \psi(\xi + x)$ eine zweite

für $0 \leqq x < \xi_0 - \xi$ differenzierbare Funktion wäre, die für $0 < x < \xi_0 - \xi$ die Differentialgleichung (3) und außerdem die Gleichung

$$\psi(\xi + 0) = \psi'(\xi + 0) = 0$$

erfüllt.

Daß der Satz I für $n = 1$ und nach einer geringen Abänderung auch für $n > 1$ in III enthalten ist, ist klar. Der Satz II ergibt sich in einer entsprechenden Abänderung für

$$\omega(x, z) = \frac{z}{x}.$$

Aber der Satz von Nagumo kann nun auch leicht verschärft werden. Z. B. erhält man eine solche Verschärfung durch die Wahl von

$$\omega(x, z) = \frac{z + z^2}{x - x^2}.$$

Tübingen, 20. 6. 1929.

(Eingegangen am 3. Juli 1929.)

# Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen.

## Erste Mitteilung.

Von

M. Fekete in Jerusalem.

---

1. Herr G. Pólya hat neuerdings folgenden Satz gefunden[1]):

I. *Eine beschränkte abgeschlossene ebene Punktmenge und ihr perfekter Kern haben denselben transfiniten Durchmesser*[2]).

Dieses Resultat ist als Spezialfall im folgenden Satze enthalten:

II. *Es sei $f\{M\}$ eine Mengenfunktion, definiert für beschränkte abgeschlossene ebene Punktmengen $M$, mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Ist $m$ in $M$ enthalten, so ist $f\{m\} \leqq f\{M\}$.* (*Monotonie.*)

2) *Entsteht $\overline{M}$ aus $M$ durch Adjunktion eines Punktes $P$, so ist $f\{\overline{M}\} = f\{M\}$.* (*Invarianz.*)

3) *Ist $M$ nicht leer und bedeutet $M(\varrho)$ die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene, die in den um die Punkte von $M$ mit dem Radius $\varrho > 0$ beschriebenen Kreisflächen liegen, so ist $\lim_{\varrho \to 0} f\{M(\varrho)\} = f\{M\}$.* (*Stetigkeit*).

*Dann hat diese Funktion für die Menge $M$ und für ihren perfekten Kern denselben Wert.*

Im nachfolgenden will ich zuerst den eben formulierten Satz beweisen; danach zeige ich, daß aus ihm der Pólyasche Satz I folgt, d. h. der transfinite Durchmesser einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge die

---

[1]) G. Pólya, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen **99** (1928), S. 687–706; S. 695. Vgl. auch G. Pólya, Notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Verhandl. d. Schweizer. Naturf. Gesellschaft, Basel, 1927, II. Teil, S. 84–85.

[2]) Betreffs der Definition des transfiniten Durchmessers einer nichtleeren Punktmenge s. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 228–249; S. 231. Der transfinite Durchmesser der leeren Menge hat (vgl. a. a. O.[1]) S. 688, Fußnote [6])) definitionsgemäß den Wert 0.

Eigenschaften 1) bis 3) besitzt. Zur Ergänzung meiner Betrachtungen erörtere ich endlich die Frage, ob bei linearen Punktmengen das Verschwinden des zugehörigen transfiniten Durchmessers das des Lebesgueschen Maßes involviert und umgekehrt.

2. Der perfekte Kern $K$ einer Menge $M$, d. h. die Gesamtheit der Verdichtungspunkte von $M$, kann bekanntlich als die $\alpha$-te Derivierte von $M$ aufgefaßt werden, wobei $\alpha$ eine finite oder abzählbare transfinite[3]) Ordinalzahl bedeutet. Um II zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß für jede Ordinalzahl $\beta$ der erwähnten Art die $\beta$-te derivierte Menge $M^{(\beta)}$ der beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmenge $M$ der Bedingung

$$f\{M^{(\beta)}\} = f\{M\} \tag{1}$$

genügt. Das folgt für sämtliche finiten Ordinalzahlen — und auch für transfinite Ordinalzahlen erster Art (d. h. für solche $\beta$, die eine unmittelbar vorangehende Zahl besitzen), sobald das Entsprechende für $\beta - 1$ gilt — auf Grund der Definition: $M^{(\beta)}$ = die Derivierte von $M^{(\beta-1)}$, aus dem

Lemma A. *Es sei $m'$ die erste Derivierte von der beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmenge $m$. Dann besteht (für die Funktionen $f$ mit den Eigenschaften* 1) *bis* 3))

$$f\{m'\} = f\{m\}.$$

Die Richtigkeit dieses Hilfssatzes ist für leeres $m'$ wegen 2) augenscheinlich; für nichtleeres $m'$ kann man sie etwa so folgern: Ist $m'(\varrho)$ aus $m'$, wie $M(\varrho)$, nach der Vorschrift unter 3) im Satze II, aus $M$ aufgebaut, so liegen nur endlich viele Punkte von $m$ außerhalb $m'(\varrho)$, wie auch $\varrho > 0$ ausfällt; daher ist nach 2) und 1)

$$f\{m'(\varrho)\} \geqq f\{m\},$$

also nach 3) auch

$$f\{m'\} \geqq f\{m\};$$

andererseits ist nach 1)

$$f\{m'\} \leqq f\{m\}.$$

3. Was nun die Richtigkeit von (1) im Falle transfiniter Ordinalzahlen zweiter Art (d. h. für solche $\beta$, die keine unmittelbar vorangehende Zahl besitzen) betrifft, so folgt sie, aus der Definition: $M^{(\beta)}$ = Durchschnitt aller $M^{(\gamma)}$ mit $\gamma < \beta$, für *leeres* $M^{(\beta)}$ ohne weiteres, unter der Annahme, daß das Bestehen von

$$f\{M^{(\gamma)}\} = f\{M\}, \quad \text{falls} \quad \gamma < \beta \tag{2}$$

bereits bewiesen ist, da ja offenbar in diesem Falle für eine gewisse Ordinalzahl $\gamma_0 < \beta$ schon auch $M^{(\gamma_0)}$ leer, also $f\{M^{(\gamma_0)}\} = f\{0\}$ und folglich, wegen (2), $f\{M\} = f\{0\}$ ausfallen muß.

[3]) Die Ordinalzahl einer abzählbaren Menge heiße abzählbar.

4. Um endlich (1), unter der Annahme der Richtigkeit von (2), für transfinite Ordinalzahlen $\beta$ zweiter Art im Falle eines *nichtleeren* $M^{(\beta)}$ zu beweisen, stütze ich mich auf das folgende

Lemma B. *Es sei*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

*eine unendliche Folge von beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmengen, die so beschaffen sind, daß jede von ihnen nicht leer ist und die auf sie folgenden Mengen enthält. Dann ist der Durchschnitt $M$ dieser Punktmengen nicht leer und es gibt zu jedem $\varrho > 0$ ein $n_0$ derart, daß $M_n$ in $M(\varrho)$ enthalten ist, sobald $n \geqq n_0$ besteht.*

(Ich verifiziere dieses Lemma einfach so: $M$ ist nicht leer; denn wählt man nach Belieben aus (nach Voraussetzung nicht leerem) $M_n$ ein Punkt $\Pi_n$, so ist jeder Häufungspunkt $\Pi$ dieser Punkte in jedem $M_n$ enthalten. Gäbe es nun für ein $\varrho > 0$ in $M_{n_\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ einen Punkt $P_{n_\nu}$, der außerhalb $M(\varrho)$ liegt, so müßte jeder Häufungspunkt $P$ dieser Punkte $P_{n_\nu}$ außerhalb $M$ liegen, obzwar er, der Voraussetzungen zufolge, in jedem $M_n$ enthalten sein muß.)

Auf Grund von Lemma B folgere ich (1) in dem jetzt ins Auge gefaßten Falle etwa so:

Ist $M^{(\beta)}$ nicht leer, so kann es als der Durchschnitt einer Folge $M^{(\gamma_1)}, M^{(\gamma_2)}, \ldots, M^{(\gamma_n)}, \ldots$ aufgefaßt werden, wobei alle $M^{(\gamma_n)}$ nicht leer sind und die Ordinalzahlen $\gamma_n$ den Bedingungen $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < \gamma_{n+1} < \ldots < \beta$ genügen[4]). Lemma B, auf diese Folge angewendet, ergibt (wegen der Monotonie, d. h. Eigenschaft 1) der Funktion $f\{M\}$):

$$f\{M^{(\beta)}(\varrho)\} \geqq f\{M^{(\gamma_n)}\}, \tag{3}$$

sobald $n$ genügend groß, d. h. $n \geqq n_0(\varrho)$ ist (hierbei ist $M^{(\beta)}(\varrho)$ aus $M^{(\beta)}$, wie $M(\varrho)$ nach der Vorschrift unter 3) im Satze II aus $M$, aufgebaut); andererseits ist (wegen der Stetigkeit, d. h. Eigenschaft 3) der Funktion $f\{M\}$)

$$f\{M^{(\beta)}(\varrho)\} \leqq f\{M^{(\beta)}\} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \text{ wenn } 0 < \varrho \leqq \varrho_0 = \varrho_0(\varepsilon),$$

folglich gilt, für $n \geqq n_0(\varrho_0)$,

$$\varepsilon + f\{M^{(\beta)}\} \geqq f\{M^{(\gamma_n)}\}$$

und das, verknüpft mit der Annahme (2), liefert

$$\varepsilon + f\{M^{(\beta)}\} \geqq f\{M\}.$$

---

[4]) Vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, 1, Berlin, 1921; Satz XVII, S. 23. — Anstatt die letzterwähnte Tatsache mit Lemma B zu verknüpfen, kann man (1) direkt beweisen, indem man Lemma B in verallgemeinerter Form anwendet, wobei an Stelle einer Folge $M_1, M_2, \ldots$ eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\beta$ von Mengen (mit den oben charakterisierten Eigenschaften) betrachtet wird.

Beachtet man nun, daß (wegen der Monotonie der Funktion $f$)

$$f\{M\} \geqq f\{M^{(\beta)}\}$$

ist, so sieht man sofort, daß $0 \leqq f\{M\} - f\{M^{(\beta)}\} \leqq \varepsilon$; also ist (1), auf Grund transfiniter Induktion, für jedes abzählbare $\beta$ richtig. Damit ist Satz II in allen Stücken bewiesen.

5. Im wichtigen Spezialfalle, wo $M$ eine *abzählbare* beschränkte abgeschlossene Menge ist, ist der perfekte Kern von $M$ leer; folglich besagt dann Satz II:

III. *Die Mengenfunktion $f\{M\}$ mit den Eigenschaften* 1) *bis* 3) *hat den Wert $f\{0\}$, sobald $M$ eine abzählbare beschränkte abgeschlossene Menge ist.*

6. Wie eingangs behauptet, ist Satz I im Satze II enthalten, da doch der transfinite Durchmesser $d\{M\}$ einer beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmenge $M$ die im Satze II für $f\{M\}$ geforderten Eigenschaften 1) bis 3) besitzt. Das folgt aus der Definition [2]) der genannten speziellen Mengenfunktion, wonach

1°. $d\{M\} = 0$, wenn $M$ leer ist;

2°. $d\{M\} = \lim\limits_{n\to\infty} d_n(M)$, wenn $M$ nicht leer ist,

wobei $d_n(M)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $(n \geqq 2)$ den Maximalwert von $\left|\prod\limits_{1\leqq i<k\leqq n}(x_i - x_k)\right|$ bedeutet, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voneinander unabhängig die Menge $M$ durchlaufen ($\lim\limits_{n\to\infty} d_n(M)$ existiert gewiß, da leicht ersichtlich [5]) $d_n(M) \geqq d_{n+1}(M) \geqq 0$ ist).

In der Tat, aus 1° und 2° folgt das Erfülltsein der Bedingung 1) der Monotonie für $f\{M\} \equiv d\{M\}$ augenscheinlich; man bedenke nur, daß $d_n(m) \leqq d_n(M)$, wenn $m$ in $M$ enthalten und nicht leer ist. Das Bestehen von 2) für die leere Menge $M$ folgt aus $d_n(\overline{M}) = 0$, während es sich für nicht leere Mengen $M$ aus der Tatsache folgern läßt, daß entweder

$$d_n(\overline{M}) = d_n(M)$$

oder

$$d_n(M)^{\frac{n(n-1)}{2}} < d_n(\overline{M})^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left|\prod_{k=1}^{n-1}(x_0 - \xi_k) \prod_{1\leqq i<k\leqq n-1}(\xi_i - \xi_k)\right|$$

$$\leqq \left|\prod_{k=1}^{n-1}(x_0 - \xi_k)\right| d_{n-1}(M)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

wobei $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ bestimmte Punkte aus $M$ bedeuten, die, gemeinsam mit $x_0$ (d. h. mit dem dem zu $M$ adjungierten Punkt $P$ entsprechenden komplexen Wert), den Betrag von $\prod\limits_{1\leqq i<k\leqq n}(x_i - x_k)$ maximisieren, während $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Menge $\overline{M}$ durchlaufen.

[5]) Vgl. a. a. O. [2]) S. 230–231.

Endlich hat $d\{M\}$ auch die in 3) charakterisierte Eigenschaft der Stetigkeit. In der Tat, sei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ein solches Punktsystem in $M(\varrho)$, für welches $\left|\prod_{1\leqq i<k\leqq n}(\xi_i-\xi_k)\right| = d_n(M(\varrho))^\nu$ gilt, wobei $\nu = \frac{n(n-1)}{2}$ ist. Dann existiert ein Punktsystem $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ in $M$ (eventuell mit mehrfachen Punkten) und es gibt dazu komplexe Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ vom absoluten Betrage $\leqq 1$, derart, daß für $r = 1, 2, \ldots, n$

$$\xi_r = x_r^* + \vartheta_r \cdot \varrho,$$

folglich gilt

$$\begin{aligned}(4)\quad d_n(M(\varrho))^\nu &= \prod_{1\leqq i<k\leqq n}|x_i^* - x_k^* + \varrho(\vartheta_i - \vartheta_k)| \\ &\leqq \prod_{1\leqq i<k\leqq n}(|x_i^* - x_k^*| + 2\varrho) = \prod_{1\leqq i<k\leqq n}|x_i^* - x_k^*| \\ &\quad + \prod_{1\leqq i<k\leqq n}(|x_i^* - x_k^*| + 2\varrho) - \prod_{1\leqq i<k\leqq n}|x_i^* - x_k^*| \\ &\leqq \prod_{1\leqq i<k\leqq n}|x_i^* - x_k^*| + (D+2\varrho)^\nu - D^\nu \\ &\leqq d_n(M)^\nu + (D+2\varrho)^\nu - D^\nu,\end{aligned}$$

wobei $D$ die Spanne von $M$ bezeichnet (d. h. das Maximum von $|x_1 - x_2|$, wenn $x_1$ und $x_2$ die Menge $M$ durchlaufen).

Daraus will ich folgern, daß man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ finden kann, so daß

$$d\{M(\varrho)\} \leqq d\{M\} + 2\varepsilon$$

besteht. Das beweise ich so:

$d_n(M(\varrho))$ strebt bei ins Unendliche wachsendem $n$ monoton abnehmend[5]) gegen $d\{M(\varrho)\}$, also besteht nach den obigen Ungleichungen (4), bei jedem $\varrho > 0$ und $n \geqq 2$,

$$(5)\qquad d\{M(\varrho)\} \leqq \sqrt[\nu]{d_n(M)^\nu + (D+2\varrho)^\nu - D^\nu}.$$

Andererseits kann $n$ so groß festgesetzt werden, daß

$$d_n(M) \leqq d\{M\} + \varepsilon;$$

folglich gelten, mit Hinsicht auf (5), für solches $n$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}d\{M(\varrho)\} &\leqq \sqrt[\nu]{(d\{M\}+\varepsilon)^\nu + (D+2\varrho)^\nu - D^\nu}, \\ &\leqq (d\{M\}+\varepsilon)\sqrt[\nu]{1 + \frac{(D+2\varrho)^\nu - D^\nu}{\varepsilon^\nu}}.\end{aligned}$$

Daher liefert die Wahl von $\varrho > 0$ gemäß der Ungleichung

$$\sqrt[\nu]{1 + \frac{(D+2\varrho)^\nu - D^\nu}{\varepsilon^\nu}} \leqq 1 + \frac{\varepsilon}{d\{M\}+\varepsilon}$$

das Gewünschte.

7. Der in III formulierte Spezialfall von Satz II lehrt uns die Tatsache, daß der transfinite Durchmesser einer beliebigen *abzählbaren* beschränkten abgeschlossenen linearen Punktmenge den Wert 0 haben muß. Wie bekannt, ist auch das Lebesguesche Maß einer solchen Punktmenge gleich 0. Das eben Gesagte legt die Fragen nahe, *ob eine beschränkte abgeschlossene (nicht abzählbare) lineare Punktmenge, deren transfiniter Durchmesser gleich 0 ist*[6]*, notwendigerweise vom Maße 0 ist, und umgekehrt, jede beschränkte abgeschlossene lineare Punktmenge vom Maße 0 einen transfiniten Durchmesser vom Werte 0 haben muß*?

Die erste Frage beantworten wir mit *Ja*.

In der Tat, ist der transfinite Durchmesser einer Punktmenge $M$ von der charakterisierten Art gleich 0, so kann[7]) man sie mit einer Lemniskatenfläche überdecken, deren transfiniter Durchmesser kleiner ist als die nach Belieben vorgegebene positive Zahl $\varepsilon$. Diese Lemniskatenfläche enthält eine endliche Anzahl von (voneinander getrennten, auf derselben Geraden liegenden) Strecken, die ihrerseits die gegebene Menge enthalten. Die Punkte der Strecken bilden eine Punktmenge $\tilde{M}$ von transfinitem Durchmesser $\leqq \varepsilon$. Daraus folgt, daß die Gesamtlänge $l$ dieser Strecken $\leqq 4\varepsilon$ ist. Denn schiebt man die Strecken, ohne Änderung ihrer Aufeinanderfolge, auf der Gerade, die sie alle enthält, nebeneinander, so erhält man eine einzige Strecke von der Länge $l$, deren transfiniter Durchmesser den transfiniten Durchmeser von $\tilde{M}$ offenbar nur unterbieten kann. Andererseits ist der transfinite Durchmesser einer Strecke[8]) von der Länge $l$ gleich $\frac{l}{4}$. Folglich muß $\frac{l}{4} \leqq \varepsilon$ bestehen. Wir sehen also, daß $M$ sich durch ein System solcher Strecken überdecken läßt, deren Gesamtlänge $\leqq 4\varepsilon$ ist. Daher ist das Lebesguesche Maß von $M$ gleich 0, wie behauptet wurde.

8. Was die zweite Frage betrifft, so müssen wir auf sie mit *Nein* antworten. Man kann nämlich durch ein geeignet konstruiertes Beispiel zeigen, daß es eine beschränkte abgeschlossene lineare Punktmenge vom Maße 0 gibt, deren transfiniter Durchmesser $> 0$ ist[9]):

---

[6]) Die Existenz solcher Punktmengen kann man leicht beweisen, auf Grund der oben bewiesenen Tatsache, daß der transfinite Durchmesser die im Satze II geforderten Eigenschaften 1) bis 3) besitzt.

[7]) Vgl. a. a. O. [2]) Satz II, Satz III, Fußnote [3]) und Fußnote [4]), S. 232–234.

[8]) Vgl. a. a. O. [2]) Satz IX, S. 239.

[9]) Ich verdanke das nachfolgende Beispiel (samt Beweis) einer brieflichen Mitteilung des Herrn J. v. Neumann; dieses Beispiel (in nicht wesentlich verschiedener Form) führte G. Cantor als Beispiel einer perfekten, in keinem Intervall überall dichten linearen Menge an.

Man schneide aus dem Intervalle $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ das mittlere Drittel aus, dann aus beiden übriggebliebenen Dritteln das mittlere Drittel und so weiter, und bilde aus den Punkten $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ und aus den Endpunkten der ausgeschnittenen Intervalle eine Punktmenge $M$. Sie ist beschränkt, abgeschlossen (sogar perfekt) und vom Maße 0. Trotzdem besitzt sie einen positiven transfiniten Durchmesser.

In der Tat, jeder Punkt $x$ von $M$ läßt sich leicht ersichtlich in der Form

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{3^\nu}$$

darstellen, wobei $\varepsilon_\nu = \pm 1$ ist. Betrachten wir diejenigen Punkte $x$, bei denen $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \ldots = 1$ $(n \geqq 1)$ ist. Diese haben die Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu}{3^\nu} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

und ihre Anzahl ist $N = 2^n$.

Teilen wir die aus diesen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_N$ gebildeten Paare in $n$ Klassen ein, so daß in die $k$-te Klasse $(k = 1, 2, \ldots, n)$ diejenigen Paare eingereiht sind, bei welchen die miteinander gepaarten Punkte zuerst in dem $k$-ten $\varepsilon$ voneinander abweichen. Gehört das Paar $(x', x'')$ der $k$-ten Klasse an, so ist

$$|x' - x''| > \frac{2}{3^k} - \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+2}} - \ldots = \frac{1}{3^k};$$

und die Anzahl solcher Paare $(x', x'')$ ist

$$2^{k-1} \cdot 2^{2(n-k)} = 2^{2n-k-1},$$

daher ist

$$\sqrt[\binom{N}{2}]{\left| \prod_{1 \leqq i < j \leqq N} (x_i - x_j) \right|} \geqq \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k}\right)^{2^{2n-k-1}} \right\}^{\frac{1}{2^{n-1}(2^n-1)}} = \left\{ \prod_{k=1}^{n} 3^{-\frac{k}{2^k}} \right\}^{\frac{2^n}{2^n-1}}$$

$$\geqq \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} 3^{-\frac{k}{2^k}} \right\}^{\frac{2^n}{2^n-1}} = \left\{ \frac{1}{9} \right\}^{\frac{2^n}{2^n-1}} = \delta_n$$

und darum

$$d_{2^n}(M) \geqq \delta_n;$$

folglich ist

$$d\{M\} \geqq \lim_{n \to \infty} \delta_n = \frac{1}{9},$$

w. z. b. w.

Jerusalem, Mathematisches Institut der hebräischen Universität, 12. Juni 1929.

(Eingegangen am 3. Juli 1929.)

# Über das asymptotische Verhalten der Taylorkoeffizienten einer gewissen Funktionenklasse[1]).

Von

Ludwig Häusler in Straubing.

## Einleitung.

Es handelt sich im folgenden darum, für die Taylorkoeffizienten gewisser Funktionen asymptotische Entwicklungen herzuleiten, und zwar mit Hilfe der Sattelpunktmethode. In dieser Richtung sind bereits wichtige Vorarbeiten geleistet worden und zwar hauptsächlich von Herrn Perron [„Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe“ im Archiv der Mathematik und Physik 22 (1914), S. 329—341, ferner „Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen“ in den Sitzungsberichten der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse 1917, S. 191—219, und weiter „Über das infinitäre Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbeschränktem Wachstum eines oder mehrerer Parameter“ im Crelleschen Journal 151 (1920), S. 63—79]. Ferner hat dann 1922 Herr G. Faber in den schon erwähnten Sitzungsberichten (S. 285—304) eine zum Teil nach dieser Richtung gehende Arbeit geschrieben („Abschätzung von Funktionen großer Zahlen“). Das Grundprinzip dieser Arbeit ist, wie Faber selbst bemerkt, nicht neu; auch das für uns hauptsächlich in Frage kommende Beispiel (5) ist für den Fall $m = 1$ mit Rücksicht auf die früheren Perronschen Arbeiten nicht etwas völlig Neues; denn im wesentlichen haben die Arbeiten beider Verfasser denselben Grundgedanken, nur daß bei Perron, der bloß den Spezialfall $m = 1$ betrachtet, nicht so leicht die Verallgemeinerung für größere $m$ sichtbar ist, obwohl sie, wie ich aus-

[1]) Die Arbeit hat der Philosophischen Fakultät, II. Sektion, der Universität München als Doktordissertation vorgelegen.

drücklich betonen will, durchaus möglich ist. Der Vollständigkeit halber ist noch zu erwähnen, daß die Fabersche Arbeit etwas knapp ist, ja daß sich sogar Fehler bei ihr eingeschlichen haben; wenn man jedoch alles genau nachprüft, so kann man die Resultate wenigstens bei den Anwendungen verifizieren.

Im folgenden will ich nun einen Fall erledigen, der die von Perron und Faber betrachteten Fälle enthält, über beide aber hinausgeht. Die Methode wird je nach Zweckmäßigkeit teils mit der Perronschen, teils mit der Faberschen Ähnlichkeit besitzen, soweit sie nicht selbständig ist. Um einen möglichst durchsichtigen Beweisgang zu erzielen, habe ich in den §§ 2, 3 und 4 Vorbereitungen erledigt, so daß der mit § 5 beginnende eigentliche Beweis nicht mit allzu vielen Zwischenrechnungen unterbrochen zu werden braucht.

## § 1.

### Problemstellung und Angabe des Resultates.

Es werde

$$\frac{1}{(1-z)^l}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^k f(z)\,e^{P(z)} = Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

gesetzt. Dabei sei

$$P(z) = \frac{x_0}{(1-z)^m} + \frac{x_1}{(1-z)^{m-1}} + \ldots + \frac{x_{m-1}}{1-z} \tag{2}$$

und es seien $l, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ beliebige komplexe Konstanten; $m$ sei eine positive ganze Zahl; $f(z)$ sei eine für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion, und wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, daß

$$f(1) \neq 0. \tag{3}$$

Zur Festlegung der Bedeutung der beiden ersten Faktoren in (1) schneiden wir die $z$-Ebene längs des Halbstrahles $[+1; +\infty]$ auf, und setzen fest:

Erstens:

$$\frac{1}{(1-z)^l} = e^{l\ln\frac{1}{1-z}}. \tag{4}$$

Hierbei soll

$$\ln 1 = 2h\pi i \tag{5}$$

sein, wo $h$ einen beliebigen, aber dann festen der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ haben soll.

Zweitens:

$$\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^k = e^{k\ln\left[\ln\frac{1}{1-z}\right]}. \tag{6}$$

Dabei soll

$$\ln \frac{1}{1-z}\Big|^{z=0} = 2h'\pi i \tag{7}$$

sein, wobei $h'$ einen beliebigen, dann aber festen der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bedeuten soll; ist nun

$$\text{a)}\quad h' \neq 0, \tag{8}$$

so setzen wir für

$$\ln\left[\ln \frac{1}{1-z}\right]^{z=0} = \ln 2h'\pi i$$

einen beliebigen der erlaubten Imaginärteile fest. und dann ist die Funktion (6) eine in der aufgeschnittenen $z$-Ebene mit Ausnahme der Punkte 1 und $\infty$ überall eindeutige und reguläre Funktion, und zwar bei beliebigem komplexem $k$.

Ist aber

$$\text{b)}\quad h' = 0, \tag{9}$$

so dürfen wir für die Konstante $k$ nur einen der Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ zulassen, da sonst die Funktion (6) im Ursprung eine Singularität besitzen würde, wodurch die Entwicklung (1) illusorisch würde. Hat aber $k$ nur einen der eben genannten Werte, so ist eindeutig

$$\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^k = \left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)^k \tag{10}$$

*Das Resultat lautet dann:*

A. *Ist*

$$x_0 = \xi \cdot e^{i\vartheta} \tag{11}$$

*und ist*

$$|x_0| > 0 \tag{12}$$

*und*

$$-\pi < \vartheta < +\pi, \tag{13}$$

*so gilt für die Koeffizienten $c_n$ in (1) die asymptotische Entwicklung:*

$$\begin{aligned} c_{n-1} \sim{}& \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\sqrt[m+1]{\frac{n}{x_0 m}}\right)^l \left(\ln \sqrt[m+1]{\frac{n}{x_0 m}}\right)^k f(1)^{\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}} \frac{1}{\sqrt[m+1]{x_0 m}} \\ &\times \sqrt{\frac{2}{m+1}}\, n^{-\frac{m}{2(m+1)}} e^{y_0 n^{\frac{m}{m+1}} + y_1 n^{\frac{m-1}{m+1}} + \ldots + y_m} \\ &\times \left\{1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^\lambda} P_\lambda\left(\frac{1}{\ln \sqrt[m+1]{\frac{n}{x_0 m}}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

*Dabei ist speziell*

$$y_0 = \frac{m+1}{m} \sqrt[m+1]{x_0 m}, \tag{15}$$

$$y_1 = x_1 (x_0 m)^{\frac{1-m}{1+m}} + \frac{1}{2}(x_0 m)^{\frac{2}{m+1}} \tag{16}$$

*und es bedeutet*

$$\sqrt[m+1]{x_0 m} = \sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}, \tag{17}$$

$$(x_0 m)^{\frac{\nu}{m+1}} = \left(\sqrt[m+1]{x_0 m}\right)^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{18}$$

*Ferner bedeuten der zweite und dritte Faktor auf der rechten Seite von* (14) *jene eindeutigen Zahlenwerte, welche die Funktionen* (4) *bzw.* (6) *für*

$$z = 1 - \sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}$$

*gemäß unseren Festsetzungen besitzen. Die auftretenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen. Die P sind Polynome des angegebenen Argumentes; ist* $k = 0$, *so treten an ihre Stelle lauter Konstanten.*

B. *Ist* $x_0$ *negativ reell, so wird das asymptotische Verhalten der Koeffizienten c dargestellt durch die Summe zweier asymptotischer Reihen; man erhält die beiden, wenn man in* (14) *bis* (18) $\vartheta = \pi$ *bzw.* $\vartheta = -\pi$ *setzt. Dabei werden aber im allgemeinen weder die in beiden Entwicklungen einander entsprechenden Konstanten y (siehe* (15)*), noch die entsprechenden Polynome P beziehungsweise gleich sein.*

Diese Resultate stimmen mit den von Perron in den zitierten Abhandlungen bewiesenen Ergebnissen überein, soweit sie nicht darüber hinausgehen.

Man kann die in (14) auftretenden und nicht ausführlich angegebenen Konstanten $y$ und die Polynome $P$ sukzessive nach einem aus dem folgenden Beweisgang sich ergebenden Rechnungsschema, das wir am Schluß der Arbeit zusammenstellen werden, vollständig angeben.

Um jedoch die Arbeit nicht allzu umfangreich werden zu lassen, will ich den einzigen Fall, daß $x_0$ negativ reell und gleichzeitig $m = 1$ ist, aus der Betrachtung ausschließen. Daß unser Resultat tatsächlich auch in diesem Spezialfalle noch gilt, ja daß sogar das erwähnte Rechnungsschema trotz einer nicht zu umgehenden Abänderung des Beweisganges immer noch genau dasselbe bleibt wie im allgemeinen Fall, behalte ich mir vor, an anderer Stelle zu zeigen. Wenn man übrigens nur die Anfangsglieder der beiden asymptotischen Entwicklungen zu haben wünscht, braucht man nur in der erstzitierten Arbeit von Perron nachzuschlagen. Ich will jedoch den Beweisgang gleich so gestalten, daß er sich zwanglos auch für den eben ausgeschlossenen Fall umarbeiten läßt.

Wir kommen also zum Beweis.

## § 2.

## Die Sattelpunkte.

Nach (1) ist

$$c_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{Q(z)}{z^n}\,dz \tag{19}$$

erstreckt um den Ursprung derart, daß der Weg keine Singularität [also hier den Punkt 1] umschließt oder enthält. Will man dieses Integral nach der Sattelpunktmethode asymptotisch auswerten, so handelt es sich bekanntlich in erster Linie darum, die Sattelpunkte des Integranden der Cauchyschen Formel (19) ausfindig zu machen. Diese Aufgabe ganz genau zu lösen, ist allgemein wegen der nach (1) in $Q(z)$ auftretenden ziemlich beliebigen Funktion $f(z)$ gar nicht möglich, aber auch nicht nötig. Es zeigt sich nämlich, daß es genügt, die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{P(z)}}{z^n}\right) = 0 \tag{20}$$

in die Beweise und Rechnungen einzuführen; ja man könnte sogar diese Werte wieder durch gewisse Näherungswerte ersetzen. [Siehe die Bemerkung ganz am Schluß der Arbeit!]

Aus (20) folgt:

$$\frac{x_0\, m}{(1-z)^{m+1}} + \frac{x_1\,(m-1)}{(1-z)^m} + \ldots + \frac{x_{m-1}}{(1-z)^2} - \frac{n}{z} = 0. \tag{21}$$

Diese algebraische Gleichung $(m+1)$-ten Grades in $z$, welche uns $z$ als Funktion von $n$ liefert, lösen wir folgendermaßen:

Sei

$$x_0 = \xi \cdot e^{i\vartheta}, \tag{22}$$

wo $\vartheta$ ein beliebiger, aber dann fester der für $\arg x_0$ in Frage kommenden Werte sei. Wir setzen dann

$$\sqrt[m+1]{x_0\, m} = \sqrt[m+1]{\xi\, m}\; e^{\frac{i\vartheta}{m+1}} \tag{23}$$

und machen jetzt die Substitution

$$\varepsilon = \frac{\sqrt[m+1]{x_0\, m}}{\sqrt[m+1]{n}}, \tag{24}$$

indem wir vorübergehend $n$ und $\varepsilon$ als komplexe Variable betrachten. Statt $z$ führen wir $\eta$ ein durch:

$$z = 1 - \varepsilon\,\eta. \tag{25}$$

Hierdurch erhalten wir aus (21) die Gleichung

$$[1-\varepsilon\,\eta]\,[x_0\, m + x_1\,(m-1)\,\varepsilon\,\eta + \ldots + x_{m-1}\,\varepsilon^{m-1}\,\eta^{m-1}] - x_0\, m\,\eta^{m+1} = 0. \tag{26}$$

Für $\varepsilon = 0$ [d. h. $n = \infty$] ergibt sich

$$\eta^{m+1} = 1. \tag{27}$$

Da nun in (26) die höchste Potenz von $\eta$ den von 0 verschiedenen Koeffizienten $-x_0 m$ aufweist, so ist der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln anwendbar, d. h. $\eta(\varepsilon)$ hat auch in der Umgebung von $\varepsilon = 0$ überall $m+1$ verschiedene Werte und es gibt dort also $m+1$ verschiedene Potenzentwicklungen für $\eta(\varepsilon)$; eine von ihnen ist

$$\eta_0 = 1 + k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + \cdots. \tag{28}$$

(Bei den andern ist das absolute Glied irgendeine von 1 verschiedene $(m+1)$-te Einheitswurzel.) Dieser (28) entspricht nach (25) als Lösung von (21)

$$z_0 = 1 + \frac{h_1}{\sqrt[m+1]{n}} + \frac{h_2}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2} + \cdots, \tag{29}$$

wobei

$$h_1 = -\sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}. \tag{30}$$

In Wirklichkeit stellt (29) jeden Zweig der Funktion $z(n)$ für genügend große $n$ dar, wenn $n$ nach und nach $(m+1)$-mal das Unendliche umläuft. Da wir uns aber nur für positive (große) $n$ interessieren, formulieren wir unser Ergebnis folgendermaßen in dem

Hilfssatz I. *Setzt man in der formalen Entwicklung*

$$z_0 = 1 + \frac{h_1}{\sqrt[m+1]{n}} + \frac{h_2}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2} + \cdots, \tag{31}$$

$$h_1 = -\sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}, \tag{32}$$

*wobei $\xi = |x_0|$ und $\vartheta$ irgendein beliebiger, dann aber fester der für* $\arg x_0$ *zulässigen Werte sein soll, so lassen sich die nachfolgenden Zahlen $h$ eindeutig so bestimmen, daß die Entwicklung* (31) *die Gleichung* (21) *löst. Die $(m+1)$-te Wurzel aus $n$ denken wir uns, ebenso wie $n$ selbst, positiv. Solcher Entwicklungen gibt es genau $m+1$ verschiedene. Man kann sie nacheinander alle gewinnen, indem man von der bereits vorliegenden ausgeht und überall die $(m+1)$-te Wurzel aus $n$ noch mit einer immer wieder andern $(m+1)$-ten Einheitswurzel multipliziert.*

Zusatz. Aus (31) und (32) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \arg(z_0 - 1) = \pi + \frac{\vartheta}{m+1}. \tag{33}$$

## § 3.

### Einführung einer neuen Veränderlichen $\varphi$.

Wir werden später den Integrationsweg in (19) in mehrere Stücke erlegen. Um nun über so ein Wegstück zu integrieren, werden wir manchnal durch die Substitution

34) $$z = 1 + (z_0 - 1)\, e^{i\varphi}$$

rst eine neue komplexe Variable $\varphi$ einführen. Dadurch ergibt sich dann

35) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(W)} \frac{Q(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-z_0}{(1-z_0)^l}\, e^{P(z_0)}\,\frac{1}{z_0^n}\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k J,$$

obei

36) $$J = -\int_{(\mathfrak{W})} e^{a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots} f(1 + (z_0 - 1)\, e^{i\varphi})\, \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{1-z_0}\, e^{-i\varphi}\right)\right)^k}{\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k}\, \frac{(1-z_0)^l}{[(1-z_0)e^{i\varphi}]^l}\, d\varphi.$$

abei ist

37) $$i\varphi + \frac{x_0}{(1-z_0)^m}[e^{-im\varphi} - 1] + \ldots + \frac{x_{m-1}}{1-z_0}[e^{-i\varphi} - 1] - n \ln\frac{1 + (z_0 - 1)\, e^{i\varphi}}{z_0}$$
$$= a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \ldots$$

esetzt worden. [Daß dies erlaubt ist, werden wir bald zeigen.] In den ormeln (34) bis (37) bedeute $z_0$ irgendeine der im Hilfssatz I auftretenen Funktionen von $n$. Über die Integrationswegstücke $W$ bzw. $\mathfrak{W}$, auf ie wir erst später ausführlich eingehen werden, setzen wir zunächst nur oraus, daß $W$ den Verzweigungsschnitt der $z$-Ebene nicht überschreiten oll, und daß $\mathfrak{W}$ einem beschränkten Gebiete der $\varphi$-Ebene angehört, also wa dem Gebiete

38) $$|\varphi| < q,$$

obei $q$ von $n$ unabhängig sein soll, aber beliebig groß fixiert werden darf. ie Vieldeutigkeiten in (35) und (36) sind schon durch die Festsetzungen § 1 erklärt, so daß dann kommt:

39) $$\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{1-z_0}\, e^{-i\varphi}\right)\right)^k}{\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k} = \left(1 - \frac{i\varphi}{\ln\frac{1}{1-z_0}}\right)^k = 1 + l_1\varphi + l_2\varphi^2 + \ldots,$$

obei

40) $$l_\nu = \frac{(-i)^\nu}{\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^\nu}\binom{k}{\nu}.$$

Die Reihe (39) konvergiert sicher im Gebiete (38), wenigstens für roße $n$; denn nach (31) ist

41) $$\ln\frac{1}{1-z_0} = \ln\left(-\frac{\sqrt[m+1]{n}}{h_1}\right) - \frac{h_2}{h_1\sqrt[m+1]{n}} + \ldots.$$

Wenn also $n$ längs der positiv reellen $n$-Achse ins Unendliche wandert, so nimmt dieser Logarithmus beliebig große absolute Beträge an, in welchem Zweige man ihn auch laufen läßt. (Bei uns ist es ein in § 1 festgesetzter Zweig.) Weiter ist aber

$$(42)\qquad \left|\frac{\left(\ln\left[\frac{1}{1-z_0}e^{-i\varphi}\right]\right)^k}{\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k}\right| \leqq e^{|k|\left|\ln\left(1-\frac{i\varphi}{\ln\frac{1}{1-z_0}}\right)\right|} \leqq e^{|k|M} \leqq M_1$$

bei beliebiger Wahl des Zweiges auch dieses Logarithmen. Weiter ist

$$(43)\qquad \frac{(1-z_0)^l}{[(1-z_0)e^{i\varphi}]^l} = e^{-il\varphi}$$

und im Gebiete (38) ist natürlich

$$(44)\qquad |e^{-il\varphi}| < M_2.$$

Wir setzen endlich

$$(45)\qquad f(1+(z_0-1)e^{i\varphi}) = f_0 + f_1\varphi + f_2\varphi^2 + \ldots.$$

Das ist im Gebiete (38) sicher möglich; denn $|z_0-1|$ geht für wachsendes $n$ nach 0 und $f(z)$ ist für $z=1$ regulär. Ferner gilt im Gebiete (38) sicher (aus denselben Gründen)

$$(46)\qquad |f(1+(z_0-1)e^{i\varphi})| < M_3$$

für genügend große $n$. Übrigens ist

$$(47)\qquad f_0 = f(z_0),$$

$$(48)\qquad f_1 = f'(z_0)(z_0-1)i \quad \text{usw.}$$

Im folgenden wenden wir uns zum Studium der Funktion (37) im Gebiete (38). Dort ist für große $n$ die in (37) angesetzte Entwicklung sicher möglich; denn das Argument des in (37) auftretenden Logarithmen geht in (38) gleichmäßig gegen 1, wenn $n$ sich gegen Unendlich bewegt, so daß in (38) für große $n$ dieser Logarithmus regulär ist. Die übrigen Funktionen in (37) sind nur ganze Funktionen von $\varphi$. Nun ist genauer [wir nehmen wegen der Ganzzahligkeit von $n$ einfach den Hauptwert]:

$$(49)\qquad \begin{aligned} n\ln\frac{1+(z_0-1)e^{i\varphi}}{z_0} &= n\ln\left(1-\frac{(1-z_0)(e^{i\varphi}-1)}{z_0}\right)\\ &= -n\frac{1-z_0}{z_0}(e^{i\varphi}-1)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1-z_0}{z_0}(e^{i\varphi}-1)\right)+\ldots\right\}\\ &= -n\frac{1-z_0}{z_0}(e^{i\varphi}-1)\cdot\{1+\omega(\varphi,n)\}\\ &= -n\frac{1-z_0}{z_0}\left(i\varphi-\frac{1}{2z_0}\varphi^2+\ldots\right)\\ &= -(\xi m)^{\frac{1}{m+1}}n^{\frac{m}{m+1}}e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}[e^{i\varphi}-1][1+\omega_1(\varphi,n)]. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\lim_{n\to\infty}\omega(\varphi,n)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\omega_1(\varphi,n)=0 \tag{50}$$

und zwar beide gleichmäßig in (38). [Die letzte Behauptung in (49) folgt aus der dritten mittels (31)]. Nun ist nach (37) und (49)

$$\begin{aligned} a_1\varphi+a_2\varphi^2+\ldots &= i\varphi+\frac{x_0}{(1-z_0)^m}\Big\{\Big[e^{-im\varphi}-1\Big]+\frac{x_1}{x_0}(1-z_0)\big[e^{-i(m-1)\varphi}-1\big)\\ &\quad+\ldots+\frac{x_{m-1}}{x_0}(1-z_0)^{m-1}\big[e^{-i\varphi}-1\big]\Big\}-n\ln\frac{1+(z_0-1)e^{i\varphi}}{z_0}\\ &= i\varphi+(m\xi)^{\frac{1}{m+1}}n^{\frac{m}{m+1}}G(\varphi), \end{aligned} \tag{51}$$

wobei

$$G(\varphi)=e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\Big[\frac{1}{m}(e^{-im\varphi}-1)+\omega_2(\varphi,n)+(e^{i\varphi}-1)(1+\omega_1(\varphi,n))\Big], \tag{52}$$

wobei auch

$$\lim_{n\to\infty}\omega_2(\varphi,n)=0 \tag{53}$$

und zwar gleichmäßig in (38).

Aus (52), (50) und (53) folgt aber, daß in (38) $G(\varphi)$ gleichmäßig gegen

$$\Phi(\varphi)=e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\Big[\frac{1}{m}(e^{-im\varphi}-1)+(e^{i\varphi}-1)\Big] \tag{54}$$

strebt. Zunächst liefert uns diese Tatsache sehr schnell eine Abschätzung für die $a_\lambda$, die wir brauchen werden: Die in (38) für große $n$ reguläre Funktion $G(\varphi)-\Phi(\varphi)$ konvergiert dort auch gleichmäßig gegen 0. In (38) darf aber $q>1$ gedacht werden. Es konvergiert also $G(\varphi)-\Phi(\varphi)$ z. B. auf dem Einheitskreis gleichmäßig gegen 0, wenn $n$ nach Unendlich geht. Aus dem Cauchyschen Koeffizientensatz folgt daher, daß die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion für $\varphi=0$ lauter Koeffizienten $\varepsilon_\lambda(n)$ hat, so daß für alle $\lambda=1,2,3,\ldots$ gleichzeitig

$$|\varepsilon_\lambda(n)|\leqq\varepsilon_n(>0), \tag{55}$$

wobei ich $\varepsilon_n$ so klein wählen kann wie ich will, falls $n$ groß genug ist. Da nun die Potenzentwicklung von $\Phi(\varphi)$ unmittelbar aus (54) abzulesen ist, so gilt nach (55) und (51), für alle $\lambda\geqq 2$

$$a_\lambda=(m\xi)^{\frac{1}{m+1}}n^{\frac{m}{m+1}}e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\Big\{\frac{(-i)^\lambda m^{\lambda-1}+i^\lambda}{\lambda!}+\varepsilon_\lambda(n)\Big\}, \tag{56}$$

wobei $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_\lambda(n)=0$, gleichmäßig für alle $\lambda=2,3,\ldots$. Die Werte von $a_1$ und $a_2$ gebe ich noch genau an: nach (37)

$$\begin{aligned} a_1 &= i-i(1-z_0)\Big[\frac{m\,x_0}{(1-z_0)^{m+1}}+\frac{(m-1)\,x_1}{(1-z_0)^m}+\ldots+\frac{x_{m-1}}{(1-z_0)^2}-\frac{n}{z_0}\Big]\\ &= i \quad \text{(nach Hilfssatz I)}. \end{aligned} \tag{57}$$

Ferner ist genau

$$(58)\qquad a_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{m^2 x_0}{(1-z_0)^m} + \frac{(m-1)^2 x_1}{(1-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{x_{m-1}}{1-z_0}\right) - \frac{n}{2}\frac{1-z_0}{z_0^2}.$$

Aus (56) folgt für $\lambda = 2$

$$(59)\qquad a_2 = (m\xi)^{\frac{1}{m+1}} n^{\frac{m}{m+1}} e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\left\{-\frac{m+1}{2} + \varepsilon_2(n)\right\}$$

und ganz allgemein ist

$$(60)\qquad |a_\lambda| < N n^{\frac{m}{m+1}},$$

denn die geschweifte Klammer in (56) ist für alle $\lambda$, für genügend große $n$, unterhalb einer festen Schranke.

Aus der bei (54) bemerkten gleichmäßigen Konvergenz von $G(\varphi)$ gegen $\Phi(\varphi)$ werden wir im nächsten Paragraphen wichtige Folgerungen ziehen. Hier aber beweisen wir noch den

Hilfssatz II. *Setzt man*

$$(61)\qquad e^{a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \cdots}\cdot(1 + l_1\varphi + \ldots)(f_0 + f_1\varphi + \ldots)e^{-il\varphi} = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \ldots$$

[*man beachte, daß $a_3\varphi^3$ im Exponenten fehlt; bezüglich der beiden andern Reihen siehe* (39) *und* (45)!], *so ist*

$$(62)\qquad |b_\nu| < N_1\left(N_2 n^{\frac{m}{m+1}\frac{1}{3}}\right)^\nu,$$

*wo $N_1(>0)$ und $N_2(>0)$ von $n$ und $\nu$ unabhängig sind. Die Reihenentwicklung* (61) *hat für genügend große $n$ im Gebiete* (38) *einen Sinn, und wenn das bei* (36) *eingeführte Integrationsstück $\mathfrak{W}$ im Gebiete* (38) *verläuft, so gilt* (*nach* (36), (37), (61))

$$(63)\qquad J = -\int_{(\mathfrak{W})} e^{a_2\varphi^2}(b_0 + b_1\varphi + \ldots)\,d\varphi.$$

*Endlich gilt noch die Beziehung*

$$(64)\qquad \frac{b_{2k}}{a_2^k} = O\left(n^{-\frac{k}{3}\frac{m}{m+1}}\right).$$

Beweis. Daß die Umformung (61) im Gebiete (38) für genügend große $n$ gilt, folgt daraus, daß die vier einzelnen Faktoren der linken Seite von (61) [nach den Bemerkungen zwischen (48) und (49), zwischen (40) und (41) und zwischen (45) und (46)] im Gebiet (38) regulär sind. Daß dann (63) gilt, ist schon bei der Formulierung des Hilfssatzes gezeigt. Es sind also nur noch (62) und (64) zu beweisen. Da wir nun in (38)

$$(65)\qquad |e^{a_1\varphi}| < M_4\,(>0)$$

setzen können, so ist in diesem Gebiete

$$(66)\qquad e^{a_1\varphi}(1 + l_1\varphi + \ldots)(f_0 + f_1\varphi + \ldots)e^{-il\varphi}$$

absolut kleiner als

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = \frac{N_1}{2}$$

(nach (39) und (42); (43) und (44); (45) und (46); (65)). Da wir in (38) $q > 1$ gewählt denken dürfen, so ist also das Maximum des absoluten Betrages der Funktion (66) auf dem Einheitskreis der $\varphi$-Ebene kleiner als $N_1/2$ und mithin gilt dasselbe von jedem Koeffizienten der zu (66) gehörigen Entwicklung nach Potenzen von $\varphi$, d. h. für diese Entwicklung haben wir die Majorante

$$\frac{N_1}{2}(1 + \varphi + \varphi^2 + \ldots). \tag{67}$$

Wir suchen weiter für die Entwicklung von

$$e^{a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \ldots} \tag{68}$$

eine Majorante. Sei nun (siehe (60)!)

$$U = \left(N n^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{69}$$

so strebt $U$ mit $n$ nach Unendlich und demnach ist für große $n$ die Entwicklung von

$$e^{U\varphi + U^2\varphi^2 + U^3\varphi^3 + \ldots} \tag{70}$$

eine Majorante (wegen (60)), um so mehr aber die Entwicklung von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(U\varphi + U^2\varphi^2 + \ldots)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{U\varphi}{1-U\varphi}\right)^\nu = \frac{1}{1 - \frac{U\varphi}{1-U\varphi}} = \frac{1-U\varphi}{1-2U\varphi}. \tag{71}$$

Für die Reihenentwicklung des Produktes aus (66) und (68), d. h. nach (61) für die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \varphi^\nu$$

ist also nach (67) und (71) die Entwicklung von

$$\frac{N_1}{2}\,\frac{1}{1-\varphi}\,\frac{1-U\varphi}{1-2U\varphi} = \frac{N_1}{2}\left[\frac{U}{2U-1}\cdot\frac{1}{1-2U\varphi} + \frac{U-1}{2U-1}\,\frac{1}{1-\varphi}\right] \tag{72}$$

eine Majorante; erst recht ist für große $n$ also die Entwicklung von

$$\frac{N_1}{2}\left[\frac{1}{1-2U\varphi} + \frac{1}{1-\varphi}\right] = N_1[1 + (U+\tfrac{1}{2})\varphi + \ldots + (2^{\nu-1}U^\nu + \tfrac{1}{2})\varphi^\nu + \ldots] \tag{73}$$

eine Majorante; um so mehr ist

$$|b_\nu| \leqq N_1(2U)^\nu \leqq N_1\left(N_2 n^{\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{3}}\right)^\nu \tag{74}$$

(nach (69)); damit ist (62) bewiesen; hieraus aber folgt in Verbindung mit (59) ohne weiteres (64) und damit ist dann der ganze Hilfssatz II bewiesen.

## § 4.

## Abschätzungen für $\Re(a_2\varphi^2+a_3\varphi^3+\ldots)$.

In den Hilfssätzen dieses Paragraphen werden wichtige Abschätzungen für die in der Überschrift genannte Funktion behauptet, welche wir später bei der Abschätzung von Restintegralen brauchen werden. Wir betrachten zunächst (siehe (54))

$$\Re(\Phi(\varphi)). \tag{75}$$

Diese Funktion hat die Periode $2\pi$; wir untersuchen sie nur für reelle $\varphi$. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst jene Kurve, welche erzeugt wird durch die Funktionswerte des Ausdrucks

$$\frac{1}{m}[e^{-im\tau}-1]+[e^{i\tau}-1] \tag{76}$$

(vgl. (54)!), wenn $\varphi$ die reellen Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ durchläuft. Ich behaupte aber, daß diese Kurve eine gemeine $(m+1)$-spitzige Hypozykloide mit dem Zentrum $-\left(1+\frac{1}{m}\right)$ ist, von der eine Spitze $(\varphi=0)$ im Ursprung liegt. (Siehe Fig. 1.) Der Radius des rollenden Kreises ist $\frac{1}{m}$, $\varphi$ ist der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte mit der positiv reellen Achse einschließt. Betrachtet man nämlich den reellen und imaginären Teil von (76), so stellen beide zusammen genau die übliche Parameterdarstellung der zu $R=1+\frac{1}{m}$, $r=\frac{1}{m}$ gehörigen gemeinen Hypozykloide dar, sie ist nur noch um $R=1+\frac{1}{m}$ nach links verschoben. [Vgl. z. B. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, I, 4. Auflage, S. 318; dort steht $u$ statt $\varphi$.]

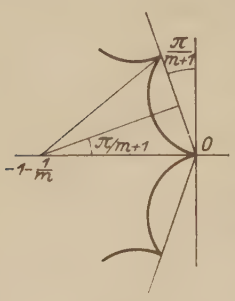


Fig. 1.

Dreht man aber diese Hypozykloide um den Ursprung noch um einen Winkel $\alpha$, der absolut kleiner ist als $\frac{\pi}{m+1}$ [d. h. multipliziert man den Ausdruck (76) noch mit $e^{i\alpha}$], so liegt sie immer noch vollständig links von der imaginären Achse, mit Ausnahme des Punktes $\varphi=0$ [und natürlich der homologen Punkte, die sich um Vielfache von $2\pi$ unterscheiden]. Der Beweis für diese Behauptung geht für $m\geqq 2$ (also mindestens eine dreispitzige Hypozykloide) aus Fig. 1 hervor; im Falle $m=1$ ist die Hypozykloide in die geradlinige Strecke $\left[0;\ -2-\frac{2}{m}\right]$ ausgeartet und die Behauptung ist trivial.

Dreht man aber die Hypozykloide um genau $\pm\frac{\pi}{m+1}$, so kommt im Falle $m=1$ die ganze „Hypozykloide" auf die imaginäre Achse zu liegen,

im Falle $m \geqq 2$ liegt außer dem zu $\varphi = 0$ (und den homologen Werten) gehörigen Kurvenpunkt (= Ursprung) nur noch der zu $\varphi = \mp \frac{2\pi}{m+1}$ (und den homologen) gehörige Kurvenpunkt auf der imaginären Achse; alle übrigen Kurvenpunkte liegen links von ihr.

Diesen Tatsachen entnehmen wir folgendes *vorläufige Resultat*:

a) Ist

(77) $$-\pi < \vartheta < +\pi$$

(so ist also $\alpha = \frac{\vartheta}{m+1}$ absolut kleiner als $\frac{\pi}{m+1}$), so liegt die durch $\Phi(\varphi)$ „dargestellte" Kurve vollständig links von der imaginären Achse, mit Ausnahme des Punktes $\varphi = 0$ und der homologen Punkte, d. h.: $\Re(\Phi(\varphi))$ verschwindet nur für $\varphi = 0$ (und die homologen Werte), und ist sonst überall negativ.

b) Ist

(78) $$\vartheta = \pm\pi$$

und

(79) $$m \geqq 2,$$

so verschwindet $\Re(\Phi(\varphi))$ nur für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \mp \frac{2\pi}{m+1}$ (und die homologen Werte).

c) Ist

(80) $$\vartheta = \pm\pi$$

und

(81) $$m = 1,$$

so ist $\Re(\Phi(\varphi)) = 0$ für jedes reelle $\varphi$. Indes ist dieser letzte Fall gerade der, den wir in § 1 von der Betrachtung ausschlossen und einer andern Arbeit vorbehielten.

Hilfssatz III. *Ist $\varphi$ reell, und ist*

(82) $$-\pi < \vartheta < \pi,$$

*so existiert eine Konstante $\gamma$, so daß*

(83) $$1.\quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{m+1};$$

2. *für alle $\varphi$, welche den abgeschlossenen Intervallen*

(84) $$\left[-\pi - \frac{\pi}{m+1};\ -\gamma\right], \quad \left[+\gamma;\ \pi + \frac{\pi}{m+1}\right]$$

*angehören,*

(85) $$\Re(a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \ldots) < -c\,n^{\frac{m}{m+1}}$$

*ist, wo $c\,(>0)$ noch von $\gamma$ abhängt, aber nicht von $n$.*

3. $\Re(a_2\varphi^2+a_3\varphi^3+\ldots)$ *im abgeschlossenen Intervall* $[-\gamma;+\gamma]$ *seinen größten Wert* 0 *nur bei* $\varphi=0$ *annimmt und von da aus monoton nach beiden Seiten hin abnimmt.*

Beweis. Daß jedenfalls die (im Hilfssatz III gar nicht vorkommende) Funktion $\Re(\Phi(\varphi))$ in den beiden Intervallen (84) überall negativ ist, ergibt sich aus dem Resultat (a) der Vorbetrachtung. Da aber erstens $\Re(\Phi(\varphi))$ von $n$ nicht abhängt, und da zweitens die Intervalle (84) abgeschlossen sind, so gibt es eine von $n$ unabhängige, nur von $\gamma$ abhängige Konstante $\omega>0$, so daß in den Intervallen (84) sicherlich

$$\Re(\Phi(\varphi))<-\omega \tag{86}$$

ist. Diese Intervalle (84) aber liegen in der $\varphi$-Ebene im Gebiete (38) [wenn $q>2\pi$ gedacht wird, was wir annehmen dürfen] und folglich konvergiert auf ihnen [siehe die Bemerkung vor (54)!] $G(\varphi)$ gleichmäßig gegen $\Phi(\varphi)$, und daher ist dort auch

$$\Re(G(\varphi))<-\omega, \tag{87}$$

wenn nur $n$ groß genug ist. Aus (51) folgt also wegen (57), daß in den Intervallen (84)

$$\Re(a_2\varphi^2+a_3\varphi^3+\ldots)<-(m\xi)^{\frac{1}{m+1}}\omega\, n^{\frac{m}{m+1}}=-c\,n^{\frac{m}{m+1}}, \tag{88}$$

wo also $c(>0)$ nur von $\gamma$, nicht von $n$ abhängt. Dieser Beweis gilt für ein beliebig kleines, festes $\gamma>0$, das die Bedingung (83) erfüllt. Wir zeigen jetzt: Man kann $\gamma$ unabhängig von $n$ so klein festlegen, daß

$$\frac{d}{d\varphi}\Re(a_2\varphi^2+\ldots) \tag{89}$$

nur bei $\varphi=0$ verschwindet, während zwischen 0 und $+\gamma$ diese Ableitung überall negativ, zwischen 0 und $-\gamma$ überall positiv ist. Damit wird dann die unter (3) behauptete Monotonie und überhaupt der ganze Hilfssatz III bewiesen sein.

Die Ableitung (89) ist aber gleich

$$2\Re(a_2)\varphi\left[1+\frac{3\Re(a_3)}{2\Re(a_2)}\varphi+\frac{4\Re(a_4)}{2\Re(a_2)}\varphi^2+\ldots\right]. \tag{90}$$

Nun ist aber nach (59)

$$\Re(a_2)=-n^{\frac{m}{m+1}}(m\xi)^{\frac{1}{m+1}}\left\{\cos\frac{\vartheta}{m+1}\left(\frac{m+1}{2}-\Re(\varepsilon_2(n))\right)+\sin\frac{\vartheta}{m+1}J(\varepsilon_2(n))\right\}. \tag{91}$$

Da aber nach (82)

$$-\frac{\pi}{m+1}<\frac{\vartheta}{m+1}<\frac{\pi}{m+1} \tag{92}$$

und da

$$m\geqq 1, \tag{93}$$

so ist die Konstante

$$\cos\frac{\vartheta}{m+1} > 0 \tag{94}$$

und kann daher in (91) vor die Klammer gezogen werden, woraus folgt:

$$\Re(a_2) = -\,n^{\frac{m}{m+1}}(m\,\xi)^{\frac{1}{m+1}}\cos\frac{\vartheta}{m+1}\,\frac{m+1}{2}\,(1+\chi(n)) \tag{95}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty}\chi(n) = 0. \tag{96}$$

Nun ist

$$\left|\frac{\Re(a_\lambda)}{\Re(a_2)}\right| \leqq \frac{|a_\lambda|}{|\Re(a_2)|} < N_3\,(>0). \tag{97}$$

(Nach (60) und (95)); $N_3$ hängt von $n$ nicht ab. Folglich ist

$$\left|\frac{3\,\Re(a_3)}{2\,\Re(a_2)}\varphi + \frac{4\,\Re(a_4)}{2\,\Re(a_2)}\varphi^2 + \ldots\right| \leqq \frac{N_3}{2}\{3|\varphi| + 4|\varphi|^2 + \ldots\}. \tag{98}$$

Man kann also $\gamma$ unabhängig von $n$ so festlegen, daß für $|\varphi| \leqq \gamma$ die rechte Seite der Abschätzung (98) kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Infolgedessen hat dann in dem so festgelegten Intervall $[-\gamma, +\gamma]$ der zweite Faktor in (90) stets das positive Zeichen; der erste Faktor aber ist für $\varphi > 0$ negativ (nach (95), (94), (96)), wenigstens für große $n$, für $\varphi < 0$ positiv, für $\varphi = 0$ verschwindet er. Damit ist der bei (89) behauptete Sachverhalt für große $n$ bewiesen und also damit der ganze Hilfssatz III.

Hilfssatz IV. *Ist $\varphi$ reell und*

$$m \geqq 2 \tag{99}$$

*und ist*

$$\vartheta = +\pi \tag{100}$$

*beziehungsweise*

$$\vartheta = -\pi, \tag{101}$$

*so existiert eine Konstante $\gamma_1$, so daß*

$$1.\quad 0 < \gamma_1 < \frac{\pi}{m+1}; \tag{102}$$

2. *für alle $\varphi$, welche den abgeschlossenen Intervallen*

$$\left[-\frac{3\pi}{2(m+1)};\ -\gamma_1\right];\ [+\gamma_1;\ \pi] \tag{103}$$

*beziehungsweise*

$$\left[\gamma_1;\ \frac{3\pi}{2(m+1)}\right];\ [-\pi;\ -\gamma_1] \tag{104}$$

*angehören,*

$$\Re(a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \ldots) < -\,c_1\,n^{\frac{m}{m+1}} \text{ ist;} \tag{105}$$

3. $\Re(a_2\varphi^2 + \ldots)$ *im abgeschlossenen Intervall* $[-\gamma_1; +\gamma_1]$ *seinen größten Wert* 0 *nur bei* $\varphi = 0$ *annimmt und von da aus monoton nach beiden Seiten hin abnimmt.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\vartheta = +\pi$. Daß in den beiden Intervallen (103) jedenfalls $\Re(\Phi(\varphi))$ überall negativ ist, ergibt sich aus dem Resultat (b) der Vorbetrachtung vor Hilfssatz III; denn die Punkte $\varphi = 0$ und $\varphi = -\frac{2\pi}{m+1}$ oder dazu homologe Punkte liegen ja außerhalb der Intervalle (103). Genau wie beim Beweis des vorangehenden Hilfssatzes III folgert man zunächst die Behauptung (105). Ebenso wie dort beweist man aber auch die behauptete Monotonie; nur ist (92) nicht mehr richtig; das macht jedoch weiter nichts an dem Bestand von (94) aus; denn jetzt ist $m \geqq 2$. (94) bleibt also richtig, und damit geht der Beweis unverändert zu Ende.

## § 5.

## Asymptotische Auswertung des Koeffizientenintegrals im Falle eines nicht negativ reellen $x_0$.

Ist

$$-\pi < \vartheta < +\pi, \tag{106}$$

so wollen wir den Integrationsweg für das Integral (19) folgendermaßen legen: Sei $z_0$ jene aus dem Hilfssatz I sich ergebende Funktion von $n$, die dem durch (106) gekennzeichneten $\vartheta$ entspricht; alsdann integrieren wir in der $z$-Ebene (siehe Fig. 2)

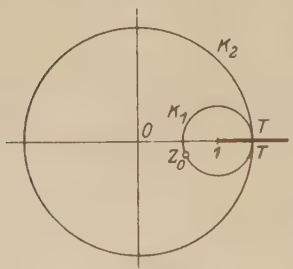


Fig. 2.

1. über den Kreis $K_1$ im negativen Sinn

$$(K_1) \qquad |z-1| = |z_0 - 1|, \tag{107}$$

2. über den Kreis $K_2$ im positiven Sinn

$$(K_2) \qquad |z| = 1 + |z_0 - 1|, \tag{108}$$

und zwar ist der Anfangs- und Endpunkt jedes Weges — mit Rücksicht auf den in der $z$-Ebene schon bei der Problemstellung (siehe zwischen (3) und (4)!) eingeführten Verzweigungsschnitt — der Berührungspunkt $T$ der beiden Kreise; dieser liegt rechts vom Punkt 1 auf der positiv reellen Achse der $z$-Ebene.

Um nun das Integral (19) über $K_2$ im negativen Sinn zu erstrecken, verfahren wir wie zu Beginn des § 3. und wenn

$$\arg(z_0 - 1) = \varphi_0 \tag{109}$$

gesetzt wird — wobei wir

$$0 < \varphi_0 < 2\pi \tag{110}$$

normieren können, wegen (33) und (106) —, so brauchen wir nur $\varphi$ alle reellen Werte von $-\varphi_0+2\pi$ bis $-\varphi_0$ durchlaufen zu lassen. Dies ist dann in unserem Fall der zu Beginn von § 3 mit $\mathfrak{W}$ bezeichnete Integrationsweg, der ersichtlich die Bedingung (38) erfüllt, so daß in unserem Falle der Hilfssatz II und überhaupt alle Formeln des § 3, nämlich (34) bis (74), angewendet werden dürfen. Außerdem sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes III erfüllt, so daß alle Formeln von (82) bis (98) anwendbar sind.

Wie zu Beginn von § 3 kommt also:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-K_1)}\frac{Q(z)\,dz}{z^n}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-z_0}{(1-z_0)^l}\,e^{P(z_0)}\,\frac{1}{z_0^n}\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k J_1, \tag{111}$$

wobei

$$J_1=+\int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0+2\pi} e^{a_1\varphi+a_2\varphi^2+\cdots}\cdot f(1+(z_0-1)\,e^{i\varphi})\,\frac{\left(\ln\left[\frac{1}{1-z_0}\,e^{-i\varphi}\right]\right)^k}{\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k}\,e^{-il\varphi}\,d\varphi. \tag{112}$$

Alle hierzu noch nötigen Bemerkungen stehen in § 3. Das Integral (112) zerlegen wir:

$$J_1=\int_{-\varphi_0}^{-\varphi_0+2\pi}=\int_{-\varphi_0}^{-\gamma}+\int_{-\gamma}^{-\beta}+\int_{-\beta}^{+\beta}+\int_{+\beta}^{+\gamma}+\int_{+\gamma}^{-\varphi_0+2\pi}=J_{11}+J_{12}+J_{13}+J_{14}+J_{15} \tag{113}$$

und wir schätzen hierbei die zwei ersten und die zwei letzten Integrale ab; in (113) soll $\gamma$ die beim Hilfssatz III auftretende Konstante sein, ferner soll

$$\beta=n^{-\frac{m}{m+1}\mu} \tag{114}$$

sein, mit dem Zusatz, daß die Konstante $\mu$ der Bedingung

$$\frac{1}{3}<\mu<\frac{1}{2} \tag{115}$$

genügen soll. Ersichtlich ist

$$\lim_{n\to\infty}\beta=0. \tag{116}$$

Nun kommt also

$$|J_{11}|\leqq\int_{-\pi-\frac{\pi}{m+1}}^{-\gamma} e^{\Re(a_2\varphi^2+a_3\varphi^3+\ldots)}\,M_3\,M_1\,M_2\,d\varphi. \tag{117}$$

Denn nach (109), (33) und (106) ist

$$\varphi_0<\pi+\frac{\pi}{m+1} \tag{118}$$

wenigstens für genügend große $n$. Das Übrige in (117) folgt aus (57), (46), (42), (44) durch bloßes Einsetzen. Nach Hilfssatz III folgt aber aus (117) sofort:

$$|J_{11}|\leqq Pe^{-cn^{\frac{m}{m+1}}} \tag{119}$$

und hierbei sind die Konstanten $P$ und $c$ beide positiv. Ebenso ist

$$|J_{15}| \leqq P e^{-c n^{\frac{m}{m+1}}}. \tag{120}$$

Ebenso wie in (117) ist zunächst auch

$$|J_{12}| \leqq \int_{-\gamma}^{-\beta} e^{\Re(a_2\varphi^2+\ldots)} M_1 M_2 M_3 \, d\varphi. \tag{121}$$

Der Exponent in (121) erreicht aber, falls $\beta < \gamma$ ist — und nach (116) tritt dies für genügend große $n$ sicher ein — wegen der nach Hilfssatz III, 3 herrschenden Monotonie sein Maximum für $\varphi = -\beta$; nun ist aber

$$\Re(a_2)\beta^2 - \Re(a_3)\beta^3 + \ldots = \Re(a_2)\beta^2\left[1 - \frac{\Re(a_3)}{\Re(a_2)}\beta + \ldots\right]. \tag{122}$$

Die hierbei auftretende Klammer nähert sich aber der Zahl 1, wenn $n$ gegen Unendlich geht. (Nach (116) und (97).) Da aber $\Re(a_2)$ nach (95) negativ ist (für große $n$), so folgt für große $n$ aus (122)

$$\Re(a_2)\beta^2 - \Re(a_3)\beta^3 + \ldots \leqq \frac{\Re(a_2)}{2}\beta^2 < -d n^{\frac{m}{m+1}} n^{-2\mu\frac{m}{m+1}} = -d n^{\delta\frac{m}{m+1}}. \tag{123}$$

Hierbei sind beide Konstanten $d$ und $\delta$ positiv; speziell ist ja

$$\delta = 1 - 2\mu > 0 \quad \text{(nach (115))}. \tag{124}$$

Aus (121) und (123) folgt endlich

$$|J_{12}| \leqq P e^{-d n^{\sigma}} \quad (P > 0 \text{ und } \sigma > 0 \text{ und von } n \text{ unabhängig}). \tag{125}$$

Ebenso ist

$$|J_{14}| \leqq P e^{-d n^{\sigma}}. \tag{126}$$

Auf das Integral $J_{13}$ in (113) aber wenden wir den Hilfssatz II an:

$$J_{13} = \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_2\varphi^2}(b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \ldots)\, d\varphi. \tag{127}$$

Nun behaupte ich, daß man eine asymptotische Entwicklung dieses Integrals (127) erhält, wenn man gliedweise zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integriert. Zunächst gilt nämlich identisch:

$$\begin{aligned} J_{13} = &\int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_2\varphi^2}[b_{2k+1}\varphi^{2k+1} + \ldots]\, d\varphi \\ &- \int_{+\beta}^{+\infty} e^{a_2\varphi^2}[b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \ldots + b_{2k}\varphi^{2k}]\, d\varphi \\ &- \int_{-\infty}^{-\beta} e^{a_2\varphi^2}[b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + \ldots + b_{2k}\varphi^{2k}]\, d\varphi \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2\varphi^2}[b_0 + b_1\varphi + \ldots + b_{2k}\varphi^{2k}]\, d\varphi \\ = &\, J_1' + J_2' + J_3' + J_4'. \end{aligned} \tag{128}$$

Dazu bemerken wir, daß für

$$\Re(a_2) < 0 \tag{129}$$

stets gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2\varphi^2}\varphi^\nu d\varphi = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}\,\frac{1}{(-a_2)^k}\,\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}} & \text{für } \nu = 2k \text{ und } \nu = 0, \\ 0 & \text{für ungerade } \nu. \end{cases} \tag{130}$$

Dabei ist die Quadratwurzel mit positivem Realteil zu nehmen. [(130) darf wohl als bekannt angesehen werden.]

Wir schätzen nun ab:

$$|J_1'| \leqq 2\int_0^{\beta} e^{\Re(a_2)\varphi^2} \sum_{\nu=2k+1}^{\infty} |b_\nu|\beta^\nu d\varphi < 2\sum_{\nu=2k+1}^{\infty} |b_\nu|\beta^\nu \int_0^{\infty} e^{\Re(a_2)\varphi^2} d\varphi \tag{131}$$

$$< \sqrt{\frac{\pi}{-\Re(a_2)}}\,\frac{N_1\left(N_2 n^{\left(\frac{1}{3}-\mu\right)\frac{m}{m+1}}\right)^{2k+1}}{1 - N_2 n^{\left(\frac{1}{3}-\mu\right)\frac{m}{m+1}}}.$$

(Nach (62), (114).) Denn nach (115) ist ja

$$\frac{1}{3} - \mu < 0. \tag{132}$$

Aus demselben Grund folgt für große $n$ weiter:

$$J_1' = \sqrt{\frac{\pi}{-\Re(a_2)}}\,O\left(n^{-\left[\mu-\frac{1}{3}\right]\frac{m}{m+1}[2k+1]}\right). \tag{133}$$

Weiter ist

$$|J_2'| = \left|\int_1^{\infty} e^{a_2\beta^2 t^2}(b_0 + b_1\beta t + \ldots + b_{2k}\beta^{2k}t^{2k})\beta\, dt\right| \tag{134}$$

$$\leqq e^{\frac{\Re(a_2)\beta^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} |b_\nu|\beta^{\nu+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\sqrt{-\frac{\beta^2\Re(a_2)}{2}}}$$

$$\leqq e^{-dn^{\delta\frac{m+1}{m}}}(2k+1)N_1\left(N_2 n^{\frac{m}{m+1}\frac{1}{3}}\right)^{2k}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\sqrt{-\Re(a_2)}}.$$

(Nach (123), (62), (114).)

Dieselbe Abschätzung gilt für $J_3'$. Man sieht daraus, daß $J_2'$ und $J_3'$ gegen die Abschätzung von $J_1'$ infinitär klein sind (siehe (133)!), und da wir $J_1'$ nach (130) ohne weiteres gliedweise berechnen können [es sind ja nur endlich viele, nämlich $2k+1$ Glieder], so können wir also nach (128) schreiben:

$$J_{13} = \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}\left\{b_0 + \frac{2!}{1!\,2^2}\,\frac{b_2}{-a_2} + \ldots + \frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}}\,\frac{b_{2k}}{(-a_2)^k} + O\left(n^{-\left(\mu-\frac{1}{3}\right)(2k+1)\frac{m}{m+1}}\right)\right\} \tag{135}$$

Denn

$$\sqrt{\frac{-a_2}{-\Re(a_2)}} = O(1) \tag{136}$$

nach (95) und (60).

Wegen $\mu - \frac{1}{3} > 0$ (nach (115)) besagt (135) folgendes: Will man $J_{13}$ bis auf einen relativen Fehler der vorgeschriebenen Ordnung $n^{-p}$ ($p > 0$ konstant) berechnen, so braucht man nur $k$ so groß zu fixieren, daß

$$\left(\mu - \frac{1}{3}\right)(2k+1)\frac{m}{m+1} \geqq p \tag{137}$$

ist. Das kann man natürlich immer tun; es sei nun bemerkt, daß nach (64)

$$\frac{b_{2\nu}}{(-a_2)^\nu} = O\left(n^{-\frac{\nu}{3}\frac{m}{m+1}}\right). \tag{138}$$

Ich behaupte aber: Um $J_{13}$ bis auf einen relativen Fehler der vorgeschriebenen Ordnung $n^{-p}$ zu berechnen, genügt es, so viele Glieder der Entwicklung (135) zu nehmen, bis alle folgenden von kleinerer Ordnung als $n^{-p}$ sind; denn angenommen, es wäre dann die Ordnung des relativen Fehlers noch nicht $n^{-p}$, so bräuchte ich ja nur noch so viele Glieder hinzuzufügen, bis der Index $(2k)$ des letzten die Bedingung (137) erfüllt. Dann ist, wie wir bewiesen haben, der relative Fehler sicher nur mehr von der Ordnung $n^{-p}$. Diese hinzugefügten endlich vielen Glieder kann ich aber wieder weglassen; denn sie sind von kleinerer Größenanordnung als $n^{-p}$, w. z. b. w.

Aus (119), (120), (125), (126) entnimmt man aber, daß die Integrale $J_{11}, J_{12}, J_{14}, J_{15}$ gegen $J_{13}$ infinitär klein sind. Wir formulieren also das Resultat (nach (113) und (135), sowie den eben gemachten Bemerkungen):

*Für das Integral $J_1$ in* (111) *gilt die asymptotische Darstellung*

$$J_1 \sim \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}\left\{b_0 + \frac{2!}{1!\,2^2}\frac{b_2}{-a_2} + \cdots + \frac{(2\nu)!}{\nu!\,2^{2\nu}}\frac{b_{2\nu}}{(-a_2)^\nu} + \cdots\right\}. \tag{139}$$

*Dabei ist*

$$\frac{b_{2\nu}}{(-a_2)^\nu} = O\left(n^{-\frac{1}{3}\frac{m}{m+1}\nu}\right), \tag{140}$$

*und wenn man sich mit einem relativen Fehler begnügt, der gleichfalls diese Ordnung besitzt, so muß man nur alle Glieder bis zu $\frac{b_{2\nu}}{(-a_2)^\nu}$ einschließlich mitnehmen. Dabei gewinnt man die Koeffizienten $a$ aus* (37), *die $b$ aus* (61) *und $z_0$ hat die in diesem Paragraphen gleich zu Anfang angegebene Bedeutung.*

Setzt man dieses Resultat (139) in (111) ein, so kommt:

$$(141)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(-K_1)}\frac{Q(z)\,dz}{z^n}\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1-z_0}{(1-z_0)^l}\,e^{P(z_0)}\frac{1}{z_0^n}\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k\frac{1}{\sqrt{-a_2}}$$
$$\times\left\{b_0+\frac{2!}{1!\,2^2}\frac{b_2}{-a_2}+\ldots+\frac{(2\nu)!}{\nu!\,2^{2\nu}}\frac{b_{2\nu}}{(-a_2)^\nu}+\ldots\right\}.$$

Diese asymptotische Entwicklung gilt aber, behaupte ich, auch für das Verhalten des Koeffizienten $c_{n-1}$; denn wir werden jetzt beweisen, daß der Wert des Integrals (19), erstreckt über den Kreis $K_2$, gegen (141) infinitär klein ist. Zunächst gilt der

Hilfssatz V. *Ist $z$ irgendein Punkt des Kreises $K_1$ oder $K_2$ (siehe* (107) *und* (108)!), *so ist bei unserer Normierung (siehe* § 1!) *stets*

$$(142)\qquad \frac{1}{p_1}|1-z_0|^{|l|}\leqq\left|\frac{1}{(1-z)^l}\right|\leqq p_1|1-z_0|^{-|l|},$$

$$(143)\qquad \frac{1}{p_2}\left|\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right|^{-|k|}\leqq\left|\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^k\right|\leqq p_2\left|\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right|^{|k|}.$$

*Dabei sind $p_1$ und $p_2$ Konstanten, die nur von der Normierung abhängen.*

Beweis dieses Hilfssatzes. (Man beachte $\lim_{n\to\infty} z_0=1$.) Außer $K_1$ und $K_2$ betrachten wir noch den durch

$$(144)\qquad |z-1|=2+|z_0-1|$$

definierten Kreis $K_3$. Die Fläche des von $K_1$ und $K_3$ gebildeten Kreisrings, der infolge unseres Verzweigungsschnittes (siehe § 1!) einfach zusammenhängend ist, enthält auch die Punkte des Kreises $K_2$. Der ganze Kreisring aber wird durch

$$(145)\qquad w=\ln\frac{1}{1-z}+2h\pi i$$

(siehe (4) und (5)!) abgebildet auf das Rechteck mit den Seiten

$$(146)\qquad \begin{cases} J(w)=2h\pi+\pi \\ J(w)=2h\pi-\pi \\ \Re(w)=\ln\dfrac{1}{|1-z_0|} \\ \Re(w)=\ln\dfrac{1}{2+|z_0-1|} \end{cases}$$

und also ist

$$(147)\qquad |w|\leqq\ln\frac{1}{|1-z_0|}+2|h|\pi+\pi$$

(für große $n$); also kommt:

$$(148)\qquad \left|\frac{1}{(1-z)^l}\right|=|e^{lw}|\leqq e^{|l|\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}+2|h|\pi+\pi\right)}\leqq p_1\frac{1}{|1-z_0|^{|l|}}$$

und

$$\left|\frac{1}{(1-z)^l}\right| = |e^{lw}| = e^{\Re(lw)} \geqq e^{-|l||w|} \geqq \frac{1}{p_1}|1-z_0|^{|l|}. \tag{149}$$

Damit ist die Ungleichung (142) vollständig bewiesen.

Zum Beweis von (143): Die Abbildung

$$w = \ln\frac{1}{1-z} + 2h'\pi i$$

[siehe (6) und (7)!] macht aus dem Kreisring wieder ein Rechteck wie (146), nur ist $h$ durch $h'$ zu ersetzen; also ist für große $n$ diesmal

$$|w| \leqq \ln\frac{1}{|1-z_0|} + 2|h'|\pi + \pi. \tag{151}$$

Ist nun

$$h' \neq 0, \tag{152}$$

so liegt der Punkt $w = 0$ außerhalb des Rechtecks und folglich kann $\arg w$ für alle Punkte des Rechtecks höchstens um $\pi$ schwanken, d. h. wenn $\ln w$ irgendwie normiert wurde (siehe § 1!), so läßt sich für alle Punkte des Rechtecks der Imaginärteil von $\ln w$ zwischen feste Schranken einschließen; hieraus folgt in Verbindung mit (151)

$$|\ln w| \leqq q_1 + \ln\left[\ln\frac{1}{|1-z_0|} + 2|h'|\pi + \pi\right] < q_2 + \ln\ln\frac{1}{|1-z_0|}, \tag{153}$$

also kommt:

$$\left|e^{k\ln\ln\frac{1}{1-z}}\right| \leqq e^{|k|\left(q_2+\ln\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)} = p_2\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^{|k|} \tag{154}$$

und weiter

$$\left|e^{k\ln\ln\frac{1}{1-z}}\right| \geqq e^{-|k|\left|\ln\ln\frac{1}{1-z}\right|} \geqq \frac{1}{p_2}\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^{-|k|}. \tag{155}$$

Für $h' \neq 0$ ist also (143) bewiesen. Ist $h' = 0$, so durfte $k$ nur einen der Werte $0, 1, 2, \ldots$ besitzen; dann aber ist

$$|w^k| = |w|^k \leqq \left(\pi + \ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^k \leqq p_2'\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^k. \tag{156}$$

Da aber jeder der Wege $K_1$ und $K_2$ vom Ursprung der $z$-Ebene für genügend große $n$ einen Abstand besitzt, der beispielsweise größer als $\frac{1}{2}$ ist, und da dem Punkt $z = 0$ jetzt der Punkt $w = 0$ entspricht, so kommen die Bilder der Kreise $K_1$ und $K_2$ für große $n$ dem Ursprung nicht beliebig nahe, d. h. auf ihnen ist

$$|w|^k > \tau > 0, \tag{157}$$

wo $\tau$ eine von $n$ unabhängige Konstante ist. Um so mehr findet also (143) statt. Damit ist Hilfssatz V vollständig bewiesen.

Nun können wir leicht zeigen, daß der Wert des Integrals (19), erstreckt über den Kreis $K_2$ gegen das über $-K_1$, infinitär klein ist. Aus (141), (59) und dem Hilfssatz V folgt:

$$(158)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(-K_1)}\frac{Q(z)\,dz}{z^n}\right| \geqq C_1 |1-z_0|^{|l|+1}\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^{-|k|}\cdot n^{-\frac{m}{2(m+1)}}\,\frac{e^{\Re(P(z_0))}}{|z_0|^n},$$

$$(159)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(K_2)}\frac{Q(z)\,dz}{z^n}\right| \leqq C_2\,\frac{1}{|1-z_0|^{|l|}}\left(\ln\frac{1}{|1-z_0|}\right)^{|k|}\frac{e^{\frac{|x_0|}{|1-z_0|^m}+\frac{|x_1|}{|1-z_0|^{m-1}}+\cdots}}{(1+|z_0-1|)^n}.$$

Wir untersuchen jetzt einfach den Quotienten der rechten Seiten dieser Ungleichungen; dieser lautet bis auf einige Faktoren, von denen wir sogleich sprechen werden:

$$(160)\quad e^{\Re(P(z_0))-\left[\frac{|x_0|}{|1-z_0|^m}+\cdots\right]-n\ln|z_0|+n\ln(1+|z_0-1|)}$$

Nun ist ja nach den Bemerkungen zwischen (106) und (107)

$$(161)\quad z_0 = 1-\sqrt[m+1]{\xi m}\,e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\cdots.$$

also

$$(162)\quad |z_0| = 1-\cos\frac{\vartheta}{m+1}\sqrt[m+1]{\xi m}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\cdots,$$

$$(163)\quad |z_0-1| = \sqrt[m+1]{\xi m}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\cdots,$$

$$(164)\quad \ln|z_0| = -\cos\frac{\vartheta}{m+1}\sqrt[m+1]{\xi m}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\cdots,$$

$$(165)\quad \ln(1+|z_0-1|) = \sqrt[m+1]{\xi m}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\cdots.$$

Also ist der Exponent in (160) gleich

$$(166)\quad \sqrt[m+1]{\xi m}\,n^{\frac{m}{m+1}}\left(\frac{m+1}{m}\cos\frac{\vartheta}{m+1}-\frac{1}{m}+1\right)+O\left(n^{\frac{m-1}{m+1}}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß (160) stärker als jede Potenz von $n$ gegen unendlich geht; denn

$$\cos\frac{\vartheta}{m+1}>0 \quad \text{(nach (106))}$$

und $m\geqq 1$. Demnach wächst nach (158) und (159) auch der Quotient der beiden Koeffizientenintegrale stärker als jede Potenz von $n$ gegen Unendlich; denn die bei der Bildung des Quotienten weggelassenen Faktoren ändern daran nichts. Folglich darf tatsächlich das über $K_2$ erstreckte Koeffizientenintegral vernachlässigt werden, w. z. b. w.

*Es gilt also für $c_{n-1}$ die asymptotische Entwicklung* (141) *mit der zwischen* (139) *und* (141) *stehenden Zusatzbemerkung.* Diesem Resultat geben wir im folgenden die in § 1 behauptete Gestalt.

## § 6.

## Umformung des Resultates.

Die $a_\nu$ sind rationale Funktionen von $z_0$ (nach (37) und (49)); die $b_\nu$ sind ganze rationale Funktionen der $a_\nu$, $l_\nu$, $f_\nu$ sowie der Zahl $l$ [nach (61)].

Zufolge der Festsetzung über die Bedeutung von $z_0$ zu Beginn von § 5 ist:

$$z_0 = 1 - \sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}} + \frac{h_2}{\sqrt[m+1]{n^2}} + \dots . \tag{167}$$

Hierbei ist

$$\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}} = \frac{\sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\pi}{m+1}}}{\sqrt[m+1]{n}}. \tag{168}$$

Für jedes $j$ gilt also

$$(1-z)^j = \left(\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}\right)^j \left[1 - \frac{j h_2}{\sqrt[m+1]{x_0 m}} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \dots\right]. \tag{169}$$

Dabei ist die Bedeutung des ersten Faktors für ganzzahlige, positive oder negative $j$ oder für $j = 0$ auf jeden Fall eindeutig, für $j = l$ aber entnimmt man den zu ihm gehörigen Zahlenwert dem durch die Bemerkungen zwischen (4) und (5) bestimmten Funktionszweig, indem man $z = 1 - \sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}$ einsetzt. Ferner ergibt sich aus (167) und (2) durch bloße Umformungen:

$$P(z_0) = x_0 (x_0 m)^{-\frac{m}{m+1}} n^{\frac{m}{m+1}} + \left(h_2 + x_1 (x_0 m)^{-\frac{m-1}{m+1}}\right) n^{\frac{m-1}{m+1}} + \dots . \tag{170}$$

Hierbei steht auf der rechten Seite eine nach abnehmenden Potenzen von $n^{\frac{1}{m+1}}$ fortschreitende Reihe; das Stück dieser Reihe, welches die nichtnegativen Potenzen enthält, bezeichnen wir mit

$$P_1\left(\sqrt[m+1]{n}\right) \tag{171}$$

und damit kommt:

$$e^{P(z_0)} = e^{P_1\left(\sqrt[m+1]{n}\right)} \left[1 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt[m+1]{n}} + \frac{\varepsilon_2}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2} + \dots\right]. \tag{172}$$

Ferner folgt ebenso aus (58)

$$a_2 = -\frac{m+1}{2} \sqrt[m+1]{x_0 m}\, n^{\frac{m}{m+1}} + \dots . \tag{173}$$

Wieder schreitet dabei die Reihe nach abnehmenden Potenzen fort. Weiter ergibt sich

$$\frac{1}{-a_n} = \frac{2}{m+1}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{x_0 m}}\,n^{-\frac{m}{m+1}}\left[1+\frac{\gamma_1}{\sqrt[m+1]{n}}+\dots\right] \tag{174}$$

und

$$\sqrt{\frac{1}{-a_n}} = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt[m+1]{x_0 m}}}\,n^{-\frac{m}{2(m+1)}}\left[1+\frac{\beta_1}{\sqrt[m+1]{n}}+\dots\right]. \tag{175}$$

Dabei nehmen wir wegen der Bemerkung bei (130) alle Quadratwurzeln mit positivem Realteil. Weiter ist

$$\frac{1}{z_0^n} = e^{-n\ln z_0} = e^{g_0 n^{\frac{m}{m+1}}+g_1 n^{\frac{m-1}{m+1}}+\dots+g_m}\left[1+\frac{p_1}{\sqrt[m+1]{n}}+\dots\right]. \tag{176}$$

Nach (167)) Speziell ist

$$\left\{\begin{aligned} g_0 &= -h_1 && = +\sqrt[m+1]{x_0 m}\\ g_1 &= -h_2+\frac{h_1^2}{2}\\ g_3 &= -h_3+h_1h_2-\frac{h_1^3}{3}\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{177}$$

Weiter kommt nach (41)

$$\left(\ln\frac{1}{1-z_0}\right)^k = \left(\ln\frac{1}{\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}}\right)^k\left(1-\frac{h_2}{h_1}\,\frac{1}{\ln\frac{1}{\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}}}\,\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}+\dots\right)^k \tag{178}$$

$$= \left(\ln\frac{1}{\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}}\right)^k\left(1+\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}\,R_1\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}}}\right)+\dots\right).$$

Hierbei sind die $R_\lambda$ Polynome des angegebenen Argumentes. Die Vieldeutigkeiten werden erklärt aus den Bemerkungen zwischen (6) und (10), wenn man

$$z = 1-\sqrt[m+1]{\frac{x_0 m}{n}}$$

darin einsetzt.

Wir kommen nun zur Betrachtung der $b_\nu$. Die Zahlen $a_\nu$ sind, wie schon erwähnt, rationale Funktionen von $z_0$, also auch von $1-z_0$; sie lassen sich folglich nach absteigenden Potenzen von $n^{\frac{1}{m+1}}$ entwickeln, und nach (60) ist dabei der größte Exponent höchstens $m$.

Weiter sieht man aus (40), daß jedes $l_\nu$ eine Entwicklung genau wie (178) zuläßt [bis auf den Faktor $(-i)^\nu\binom{k}{\nu}$], nur daß $k$ durch $-\nu$ zu ersetzen ist.

Endlich betrachten wir die $f_\nu$; es ist nach (45)

$$(179)\quad f_\nu = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\varphi^\nu} f[1+(z_0-1)e^{i\varphi}]\,|^{\varphi=0} = p_\nu(f(z_0);\ f'(z_0);\ \ldots, f^{(\nu)}(z_0), z_0),$$

wo die $p_\nu$ Polynome der angegebenen Argumente sind. Nun ist aber

$$(180)\qquad f^{(\lambda)}(z_0) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa!}\left.\frac{\partial^\varkappa f^{(\lambda)}(z)}{\partial z^\varkappa}\right|^{z=1} (z_0-1)^\varkappa.$$

Diese Darstellung hat einen Sinn, weil $f(z)$ auch über den Einheitskreis hinaus noch regulär ist; also ist nach (179) $f_\nu$ jedenfalls in eine Potenzreihe nach $(z_0-1)$ entwickelbar, und nach (167) folgt also

$$(181)\qquad f_\nu = f_{\nu 0} + \frac{f_{\nu 1}}{\sqrt[m+1]{n}} + \frac{f_{\nu 2}}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2} + \ldots.$$

Speziell ist

$$(182)\quad f_0 = f(z_0) = f(1) + f'(1)\ (z_0-1) + \ldots = f(1) + \frac{f_{01}}{\sqrt[m+1]{n}} + \ldots.$$

Da nun, wie erwähnt, jedes $b_\nu$ eine ganze rationale Funktion der $a_\nu, l_\nu, f_\nu$ ist, so läßt es sich also in eine Reihe nach absteigenden Potenzen von $n^{\frac{1}{m+1}}$ entwickeln, aber die Koeffizienten sind noch Polynome von

$$(183)\qquad \frac{1}{\ln \sqrt[m+1]{\frac{x_0\, m}{n}}}.$$

Dasselbe gilt nach (174) auch von jeder Zahl

$$(184)\qquad \frac{b_{2k}}{(-a_2)^k},$$

und zwar ist nach (64) der höchste Exponent nicht größer als

$$-\frac{mk}{3}.$$

Man kann also die semikonvergente Reihe in (141) auch in der Form schreiben:

$$(186)\qquad f(1) + \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}}\, S_1\left(\frac{1}{\ln \sqrt[m+1]{\frac{x_0\, m}{n}}}\right) + \ldots,$$

wobei die $S_\lambda$ Polynome des angegebenen Argumentes sind; setzt man endlich (186) sowie (169) [für $j=l$ und $j=-1$], ferner (172), (176), (178), (175) in (141) ein, und multipliziert man alle Reihen aus, so erhält man für die Taylorkoeffizienten tatsächlich die in § 1 behauptete asymptotische Darstellung; denn man kann $f(1) \neq 0$ vor die Klammer ziehen.

## § 7.

## Asymptotische Auswertung des Koeffizientenintegrals im Falle eines negativen reellen $x_0$ für $m \geqq 2$.

In diesem Fall legen wir den Integrationsweg folgendermaßen (Fig. 3):

Sei $z_0$ jene aus dem Hilfssatz I sich ergebende Funktion von $n$, die man für $\vartheta = \pi$ erhält, also

$$z_0 = 1 - \sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\pi}{m+1}} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \dots \tag{187}$$

und ferner $z_1$ jene, die sich für $\vartheta = -\pi$ ergibt, also

$$z_1 = 1 - \sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{-\frac{i\pi}{m+1}} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \dots . \tag{188}$$

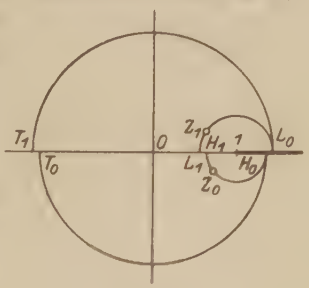



Fig. 3.

Dann zerlegen wir das Koeffizientenintegral (19) in die Summe von sechs anderen Integralen, $J_1'$ bis $J_6'$, und zwar erstrecken wir

$J_1'$ im negativen Sinn über den Halbkreis $H_0 H_1$

$$|z-1| = |z_0 - 1|; \quad J(z) \leqq 0. \tag{189}$$

$J_2'$ im negativen Sinn über den Halbkreis $L_1 L_0$

$$|z-1| = |z_1 - 1|; \quad J(z) \geqq 0. \tag{190}$$

$J_3'$ im positiven Sinn über den Halbkreis $T_0 H_0$

$$|z| = 1 + |z_0 - 1|; \quad J(z) \leqq 0. \tag{191}$$

$J_4'$ im positiven Sinn über den Halbkreis $L_0 T_1$

$$|z| = 1 + |z_1 - 1|; \quad J(z) \geqq 0. \tag{192}$$

$J_5'$ über die geradlinige Strecke $H_1 L_1$.

$J_6'$ über die geradlinige Strecke $T_0 T_1$.

Für $z_0$ und $z_1$ gelten, wenn man $\vartheta = \pi$ bzw. $\vartheta = -\pi$ setzt, alle Überlegungen und Ergebnisse der §§ 2 und 3, ferner der Hilfssatz IV.

Um nun $J_1'$ zu bilden, verfahren wir völlig ebenso wie zu Beginn von § 5, integrieren aber nur von $-\varphi_0 + 2\pi$ bis $-\varphi_0 + \pi$. Dabei ist

$$\varphi_0 = \arg(z_0 - 1) \tag{193}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{m+1} \quad \text{(nach (33))}. \tag{194}$$

Es kommt so wie dort:

$$J_1' = \frac{1}{2\pi i} \int_{(H_0 H_1)} \frac{Q(z)\,dz}{z^n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-z_0}{(1-z_0)'} e^{P(z_0)} \frac{1}{z_0^n} \left(\ln \frac{1}{1-z_0}\right)^k J_1'', \tag{195}$$

wobei

$$J_1'' = \int_{-\varphi_0+\pi}^{-\varphi_0+2\pi} \tag{196}$$

mit genau demselben Integranden wie in (112), nur daß $z_0$ jetzt eine andere Bedeutung hat. Analog wie in (113) schreiben wir jetzt:

$$J_1'' = \int_{-\varphi_0+\pi}^{-\gamma_1} + \int_{-\gamma_1}^{-\beta} + \int_{-\beta}^{+\beta} + \int_{+\beta}^{+\gamma_1} + \int_{+\gamma_1}^{-\varphi_0+2\pi} = J_{11}' + J_{12}' + J_{13}' + J_{14}' + J_{15}' \tag{197}$$

Dabei soll $\beta$ wieder die Bedeutung von (114) haben; $\gamma_1$ soll die im Hilfssatz IV auftretende Konstante sein. Nun ist:

$$|J_{11}'| \leqq \int_{-\frac{3}{2}\frac{\pi}{m+1}}^{-\gamma_1} e^{\Re(a_2\varphi^2+\dots)} M_3 M_1 M_2 \, d\varphi \quad \text{(wie (117), (118))}. \tag{198}$$

Denn für große $n$ ist nach (194)

$$\varphi_0 - \pi < \frac{3}{2}\frac{\pi}{m+1} \tag{199}$$

Nach Hilfssatz IV ($\vartheta = +\pi$) ergibt sich aus (198)

$$|J_{11}'| \leqq P' e^{-c_1 n^{\frac{m}{m+1}}}. \tag{200}$$

Ebenso ist

$$|J_{15}'| \leqq P' e^{-c_1 n^{\frac{m}{m+1}}}. \tag{201}$$

Weiter ist genau wie bei (121) bis (126) [nur daß statt Hilfssatz III, 3 Hilfssatz IV, 3 in Anwendung kommt]:

$$|J_{12}'| \leqq P' e^{-d_1 n^{\sigma_1}} \tag{202}$$

$$|J_{14}'| \leqq P' e^{-d_1 n^{\sigma_1}}. \tag{203}$$

Auf das Integral $J_{13}'$ in (197) wenden wir den Hilfssatz II an und von jetzt an ist alles wörtlich wie zwischen (128) und (166) einschließlich. Es ergibt sich so, daß die Summe der Integrale $J_1'$ und $J_3'$ [ebenso wie früher die Summe der Integrale über $K_1$ und $K_2$] die asymptotische Entwicklung besitzt:

$$J_1' + J_3' \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1-z_0}{(1-z_0)'} e^{P(z_0)} \frac{1}{z_0''} \left(\ln \frac{1}{1-z_0}\right)^k \frac{1}{\sqrt{-a_2}} \times \left\{ b_0 + \frac{2!}{1!\,2^2}\frac{b_2}{-a_2} + \frac{4!}{2!\,2^4}\frac{b_4}{(-a_2)^2} + \dots \right\} \tag{204}$$

denn es bleibt auch die an (166) geknüpfte Bemerkung [die jetzt besagt, daß $J_3'$ infinitär klein gegen $J_1'$ ist] richtig, weil diesmal $m \geqq 2$ ist, so daß für $\vartheta = \pi$ der Ausdruck

$$\frac{m+1}{m}\cos\frac{\vartheta}{m+1} - \frac{1}{m} + 1 \tag{205}$$

positiv ist.

Eine Bemerkung ist noch nachzutragen: Wir behaupteten soeben, daß alle Überlegungen wie zwischen (128) und (166) erhalten bleiben. Dabei ist aber natürlich Hilfssatz V, den wir seinerzeit mit Rücksicht auf $K_1$ und $K_2$ ausgesprochen haben, entsprechend umzuändern, was keine Schwierigkeit mit sich bringt und wohl übergangen werden darf; man zeigt dann das Folgende bis zur Behauptung (204) in entsprechender Weise wie früher ohne weiteres.

Ganz analog zeigt man, daß für die Summe der Integrale $J_2'$ und $J_4'$ eine ebensolche Entwicklung wie (204) existiert, nur daß überall $z_0$ durch $z_1$ zu ersetzen ist, was natürlich die Werte der $a$ und $b$ beeinflußt; also schreiben wir:

$$J_2' + J_4' \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1-z_1}{(1-z_1)^{\prime}} e^{P(z_1)} \frac{1}{z_1^n} \left(\ln \frac{1}{1-z_1}\right)^k \frac{1}{\sqrt{-a_2^*}} \times \left\{ b_0^* + \frac{2!}{1!\,2^2} \frac{b_2^*}{-a_2^*} + \frac{4!}{2!\,2^4} \frac{b_4^*}{(-a_2^*)^2} + \cdots \right\}. \tag{206}$$

Die beiden Integrale über die geradlinigen Strecken $H_1 L_1$ und $T_0 T_1$ kann man gegen die Entwicklung (204) oder auch (206) weglassen.

Beweis. Es ist nach (187) bzw. (188)

$$|z_0 - 1| = \sqrt[m+1]{\xi m} \cos\frac{\pi}{m+1} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \cdots, \tag{207}$$

$$|z_1 - 1| = \sqrt[m+1]{\xi m} \cos\frac{\pi}{m+1} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \cdots. \tag{208}$$

Dabei ist

$$\cos\frac{\pi}{m+1} > 0 \quad (\text{weil } m \geqq 2). \tag{209}$$

Daher lassen sich alle Punkte zwischen $H_1$ und $L_1$ in der Form schreiben:

$$z = 1 - \sqrt[m+1]{\xi m} \cos\frac{\pi}{m+1} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + O\left(\frac{1}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2}\right). \tag{210}$$

und zwar ist $z$ reell. An all diesen Stellen gilt nun:

$$\left| \frac{e^{-\frac{\xi}{(1-z)^m} + \cdots}}{z^n} \right| \leqq \frac{e^{-\sqrt[m+1]{\xi m}\, n^{\frac{m}{m+1}} \frac{1}{m\cos^m\left(\frac{\pi}{m+1}\right)} + O\left(n^{\frac{m-1}{m+1}}\right)}}{\left(1 - \sqrt[m+1]{\xi m} \cos\frac{\pi}{m+1} \frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \cdots\right)^n} = e^{\sqrt[m+1]{\xi m}\, n^{\frac{m}{m+1}} \left[ -\frac{1}{m\cos^m\left(\frac{\pi}{m+1}\right)} + \cos\frac{\pi}{m+1} \right] + O\left(n^{\frac{m-1}{m+1}}\right)} \tag{211}$$

Von dieser Ordnung also ist, abgesehen von einigen Faktoren, von denen wir sogleich sprechen werden, auch das Integral $J_5'$. Dagegen ist, ebenfalls bis auf gewisse Faktoren, nach (204) die Summe der Integrale $J_1' + J_3'$ mindestens von der Ordnung

$$e^{\frac{m+1}{m}\sqrt[m+1]{\xi m}\cos\frac{\pi}{m+1}\,n^{\frac{m}{m+1}}+O\left(n^{\frac{m-1}{m+1}}\right)} \tag{212}$$

[wie die Umformungen (172) und (176) des § 6 erkennen lassen].

Hieraus und aus (211) folgt aber, daß $J_5'$ gegen (204) vernachlässigt werden darf; denn die nicht betrachteten Faktoren lassen Abschätzungen zu, die zu (142) und (143) analog sind und sich wie beim Beweis des Hilfssatzes V unter Rücksichtnahme auf (210) beweisen lassen.

Noch um so mehr darf $J_6'$ vernachlässigt werden; denn die Punkte zwischen $T_0$ und $T_1$ lassen sich nach (207) und (208) in der Form

$$z = -1 - \sqrt[m+1]{\xi m}\cos\frac{\pi}{m+1}\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + O\left(n^{-\frac{2}{m+1}}\right) \tag{213}$$

schreiben, und zwar ist $z$ reell. Es ist dann

$$\left|\frac{e^{-\frac{\xi}{(1-z)^m}+\cdots}}{z^n}\right| < 1, \tag{214}$$

wenn $n$ groß genug ist; das ist im Vergleich zu (204) wegen (212) zu vernachlässigen; denn wieder spielen die nichtbetrachteten Faktoren keine Rolle.

Damit ist endlich gezeigt, *daß man für die Koeffizienten $c_{n-1}$ eine asymptotische Darstellung erhält, wenn man die beiden Entwicklungen* (204) *und* (206) *addiert.*

Bringt man nun noch die Umformungen des § 6 in Anwendung, sind alle Behauptungen in § 1, B für $m \geqq 2$ bewiesen.

## § 8.

## Das zur Herstellung der Entwicklung dienliche Rechenschema. Schlußbemerkungen.

Es sei also eine Funktion $Q(z)$ [siehe (1)!] vorgegeben, und zwar sei sie normiert wie in § 1. Um nun die asymptotische Entwicklung der Koeffizienten ihrer Taylorentwicklung um $z = 0$ zu finden, unterscheiden wir zwei Fälle:

A) Ist $x_0 = \xi e^{i\vartheta}$ und $|x_0| > 0$ und $-\pi < \vartheta < +\pi$, so gibt es nach Hilfssatz I genau eine Entwicklung der Form

$$z_0 = 1 - \sqrt[m+1]{\xi m}\, e^{\frac{i\vartheta}{m+1}}\frac{1}{\sqrt[m+1]{n}} + \frac{h_2}{\left(\sqrt[m+1]{n}\right)^2} + \cdots, \tag{215}$$

welche die Gleichung (21) löst; diese Entwicklung denken wir uns gefunden. (Wir kommen darauf noch zurück.) Alsdann stelle man sich gemäß (37) die Zahlen $a$ und gemäß (61) die Zahlen $b$ her [um bloß ein endliches Stück der gesuchten Entwicklung zu finden, genügt die Kenntnis endlich vieler $a$ und $b$]. Man erhält dann sofort das Resultat:

$$c_{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1-z_0}{(1-z_0)^{\prime}} e^{P(z_0)} \frac{1}{z_0^n} \left(\ln \frac{1}{1-z_0}\right)^k \frac{1}{\sqrt{-a_2}} \tag{216}$$
$$\times \left\{ b_0 + \ldots + \frac{(2\lambda)!}{\lambda!\, 2^{2\lambda}} \frac{b_{2\lambda}}{(-a_2)^\lambda} + \ldots \right\}.$$

Hierbei ist $\sqrt{-a_2}$ mit positivem Realteil zu nehmen. $P(z)$ ist durch (1) und (2) erklärt. Bricht man beim Glied mit $b_{2\lambda}$ ab, so ist der relative Fehler von der Ordnung

$$O\left(n^{-\frac{\lambda}{8}\frac{m}{m+1}}\right). \tag{217}$$

Dieses Resultat formt man dann nach den in § 6 angegebenen Methoden um.

B) Ist $x_0$ negativ reell, so führe man genau dieselben Rechnungen wie bei A) einmal für $\vartheta = +\pi$, und einmal für $\vartheta = -\pi$ aus und addiere alsdann die beiden entstehenden Entwicklungen.

Ich bemerke aber noch, daß es in Wahrheit gar nicht nötig ist, die volle Entwicklung (215) zu kennen, sondern daß die Kenntnis der $m$ ersten Glieder genügt. Man findet, behaupte ich, mit dem so verstümmelten Wert von $z_0$ (bzw. $z_1$) ebenso die Entwicklung (14) wie bisher, wenn man einfach mit diesem neuen Wert von $z_0$ dieselben schematischen Rechnungen ausführt. (Natürlich ändern sich dadurch die Werte der $a$ und $b$.) Den Beweis will ich nur mehr skizzieren: Die einzige Stelle unseres insgesamten Beweises, an der wirklich die volle Entwicklung von $z_0$ benutzt wird, ist (57); setzt man nun dort unser verstümmeltes $z_0$ ein, so ergibt sich für $a_1$ im allgemeinen freilich nicht mehr $i$, aber immerhin $0(1)$ [und das ist die Hauptsache; denn damit lassen sich dann alle Abschätzungen und Behauptungen ohne wesentliche Änderungen ganz genau wie bisher durchführen; auf die Einzelheiten gehe ich nicht mehr ein]. In der Tat: Setzt man in (57) das genaue $z_0$ ein, so entsteht eine nach fallenden Potenzen von $n^{\frac{1}{m+1}}$ fortschreitende Reihe; die höchste Potenz hierbei ist die $m$-te. Andererseits aber verschwinden ja alle Koeffizienten dieser Entwicklung — abgesehen vom konstanten Glied $i$ —, weil $z_0$ die Gleichung (21) löst. Die Koeffizienten der $m$ ersten Potenzen setzen sich aber nur aus den $m$ ersten Koeffizienten der Entwicklung von $z_0$, sowie natürlich aus den Konstanten der Gleichung (21) zusammen; diese $m$ ersten Koeffizienten verschwinden also auch noch für unser verstümmeltes $z_0$,

d. h. setzt man dieses in (57) ein, so kommen keine positiven Potenzen von $n^{\frac{1}{m+1}}$ vor, d. h. $a_1 = 0\,(1)$, w. z. b. w.

Dieser Umstand, daß man die ganzen Rechnungen auch mit dem verstümmelten Wert von $z_0$ ausführen kann, ist für die praktische Berechnung vielleicht nicht unbedeutend. Im Falle $m = 1$ z. B. genügt es,

$$z_0 = 1 - \sqrt{\frac{\xi}{n}}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}}$$

zu verwenden (im Falle A). Das hat Perron bei seinen Arbeiten immer getan.

Für den Fall $m = 1$ und $x_0$ negativ habe ich den Beweis für die Behauptung, daß seine schematische Berechnung wie im Falle $m \geqq 2$ verläuft, noch nachzubringen. Das behalte ich einer anderen Arbeit vor.

(Eingegangen am 27. Juli 1929.)

# Zwei Sätze über Fourierkoeffizienten.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg i. Pr.

Unter gleichem Titel hat Herr Alexits[1]) eine Verallgemeinerung einiger Ergebnisse von Csillag[2]), Neder[3]) und Steinhaus[4]) gegeben.

$f(x)$ sei eine Lebesgue-integrierbare Funktion der Periode $2\pi$,

$$f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k x + \beta_k \sin k x) \tag{1}$$

ihre Fourierreihe. Die Sätze von Alexits lauten:

Satz I[5]). *Hat $f(x)$ in $\langle 0, 2\pi \rangle$ höchstens hebbare Unstetigkeiten und gilt*

$$k\alpha_k \to \alpha, \quad k\beta_k \to \beta \qquad (k \to \infty), \tag{2}$$

*so ist*

$$\alpha = \beta = 0. \tag{3}$$

Satz II. *Gilt umgekehrt* (2) *und* (3) *und existieren überall $f(x+0)$ und $f(x-0)$, so hat $f(x)$ höchstens hebbare Unstetigkeiten.*

Ich will nun im folgenden die Bedeutung der Voraussetzung (2) für das Verhalten von $f(x)$ noch deutlicher, als es in diesen Sätzen geschieht, ins Licht setzen.

Zunächst nämlich ist der Satz I (wegen Fejérs Theorem über die $C_1$-Summierung der Fourierreihe an Sprungstellen) reichlich in den beiden folgenden Aussagen enthalten:

---

[1]) G. Alexits, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 65.

[2]) P. Csillag, Math. és phys. lapok 27 (1918), S. 301 (ungarisch).

[3]) L. Neder, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 270.

[4]) H. Steinhaus, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 320.

[5]) Der Beweis von Satz I ist bei Herrn Alexits nicht einwandfrei, da aus seinen Formeln (7) und (8) unter 1. wohl $b = 0$, aber nicht $a = 0$ geschlossen werden kann.

Satz Ia. *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (*d. i. im wesentlichen die Reihe* (1) *für* $x=0$) $C_1$*-summierbar, so folgt aus*

$$k a_k \to \alpha \qquad (k \to \infty), \tag{2a}$$

*daß* $\alpha = 0$ *ist.*

Eines Beweises bedarf es nicht; es genügt sogar, statt (2a) etwa $C_1\text{-}\lim_{x\to\infty}(k a_k) = \alpha$ vorauszusetzen.

Satz Ib. *Aus*

$$\lim_{x\to+0}(f(x) - f(-x)) = D \tag{4}$$

*und*

$$k \beta_k \to \beta \tag{2b}$$

*folgt* $\beta = \frac{D}{\pi}$.

Beweis. Aus (4) folgt nach Lukács[6])

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\log(n+1)} \to \frac{D}{\pi} \qquad (n \to \infty), \tag{5}$$

so daß die Behauptung wegen $\beta_k = \frac{\beta}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ unmittelbar klar ist; es genügte sogar wieder, statt (2b) etwa $C_1\text{-}\lim_{k\to\infty}(k\beta_k) = \beta$ vorauszusetzen.

Der Satz II endlich läßt sich, wie folgt, wesentlich verschärfen zu dem

Satz IIa. *Aus* (2b) *folgt*

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_0^h (f(t) - f(-t))\,dt = \pi\beta. \tag{6}$$

*Gilt überdies* (2a), *so ist für alle* $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t) - f(x-t))\,dt = 0. \tag{7}$$

Zum Beweise beachte man die für $h > 0$ durch (bekanntlich erlaubte) gliedweise Integration von (1) folgende Formel

$$\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t) - f(x-t))\,dt = 2\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k \cos kx - \alpha_k \sin kx)\frac{1-\cos kh}{kh}. \tag{8}$$

Angewandt auf $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ bzw. $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ liefert sie

$$\begin{aligned} 2\lim_{h\to+0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}\frac{1-\cos kh}{kh} &= \frac{\pi}{0} \quad \text{für} \quad x \overset{\equiv}{\not\equiv} 0 \pmod{2\pi}, \\ \lim_{h\to+0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\frac{1-\cos kh}{kh} &= 0, \end{aligned} \tag{8a}$$

[6]) F. Lukács, Journ. f. Math. **150** (1920), S. 107. Auch Herr Alexits benutzt, allerdings recht umständlich, diese Formel beim Beweise seiner beiden Sätze.

woraus, weil der Faktor $1-\cos kh \geqq 0$ ist, die Behauptung wegen $\alpha_k = \frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$, $\beta_k = \frac{\beta}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ unmittelbar folgt.

Man beachte noch die interessante Folgerung:

Sind $\alpha_k, \beta_k$ bzw. $A_k, B_k$ Fourierkoeffizienten von $f(x)$ bzw. $F(x)$ und sind sie von der Größenordnung $O\left(\frac{1}{k}\right)$, ist endlich

$$\alpha_k \sim A_k, \quad \beta_k \sim B_k \qquad (k \to \infty), \tag{9}$$

so gilt

$$\lim_{h \to +0} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x-t))\, dt - \frac{1}{h} \int_0^h (F(x+t) - F(x-t))\, dt \right\} = 0, \tag{10}$$

d. h. die beiden Grenzwerte links existieren für jedes $x$ einzeln gleichzeitig (zum selben Werte) bei beiden Funktionen oder existieren nicht.

Ersichtlich läßt sich die Beweismethode von Satz IIa auf den allgemeineren Fall übertragen, wo statt (2) Voraussetzungen der Form

$$C_k \alpha_k \to \alpha, \quad C_k \beta_k \to \beta \qquad (k \to \infty) \tag{11}$$

gegeben sind, wenn nur die $C_k > 0$ sind und man die mit diesen $C_k$ gebildeten (8a) analogen Relationen beherrscht. So gilt z. B. der folgende den Satz IIa enthaltende

Satz IIb. *Es sei* $0 < \delta \leqq 2$. *Aus*

$$k^\delta \beta_k \to \beta \qquad (k \to \infty) \tag{12a}$$

*folgt bei* $h \to +0$ *für* $\beta \neq 0$

$$\int_0^h (f(t) - f(-t))\, dt \sim \begin{cases} 2^{2-\delta} \beta h^\delta \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^{\delta+1}}\, dt & 0 < \delta < 2 \\ \beta h^2 \log \frac{1}{h} & \delta = 2 \end{cases} \quad \text{für} \tag{13}$$

*während für* $\beta = 0$

$$\int_0^h (f(t) - f(-t))\, dt = \begin{cases} o(h^\delta) & 0 < \delta < 2 \\ o\left(h^2 \log \frac{1}{h}\right) & \delta = 2 \end{cases} \quad \text{für} \tag{13a}$$

*folgt.*

*Gilt überdies*

$$k^\delta \alpha_k \to \alpha \qquad (k \to \infty), \tag{12b}$$

*so ist für* $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$\int_0^h (f(x+t) - f(x-t))\, dt = \begin{cases} o(h^\delta) & 0 < \delta < 2 \\ o\left(h^2 \log \frac{1}{h}\right) & \delta = 2 \end{cases} \quad \text{für} \tag{14}$$

Zum Beweise genügt es, da bei $h \to +0$ und festem $k$ der Faktor $1 - \cos kh = o(h^2)$, also von kleinerer Größenordnung als die Ausdrücke

rechts in (15) ist, bei $h \to +0$ die speziellen Formeln $(x \not\equiv 0 \pmod{2\pi})$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kh}{k^{\delta+1}} \sim \begin{cases} 2^{2-\delta}h^{\delta}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{\delta+1}} & 0<\delta<2 \\ h^2\log\frac{1}{h} & \delta=2 \end{cases} \quad \text{für},$$

(15)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin}{\cos}\frac{kx}{k^{\delta+1}}(1-\cos kh) = \begin{cases} o(h^{\delta}) & 0<\delta<2 \\ o\left(h^2\log\frac{1}{h}\right) & \delta=2 \end{cases} \quad \text{für}$$

zu begründen.

Für $0<\delta<2$ ist nun bei festem $m$ gleichmäßig in den $0<h<1$

$$\frac{1}{h^{\delta}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kh}{k^{\delta+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} h\frac{1-\cos kh}{(kh)^{\delta+1}} = \sum_{kh\leqq m}+\sum_{kh>m}$$

(a)

$$= \int_0^{m}\frac{1-\cos t}{t^{\delta+1}}\,dt + o(1) + O\left(\frac{1}{h^{\delta}}\sum_{kh>m}\frac{1}{k^{\delta+1}}\right)$$

$$= 2^{1-\delta}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{\delta+1}}\,dt + o(1) + O\left(\frac{1}{m^{\delta}}\right),$$

woraus mit $h \to +0$ und sodann $m \to \infty$ die Behauptung folgt.

Ferner ist $(\delta = 2)$

$$\text{(b)}\quad 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kh}{k^3} = h^2\sum_{kh\leqq 1}\frac{1}{k} + O\left(h^4\sum_{kh\leqq 1}k\right) + O\left(\sum_{kh>1}\frac{1}{k^3}\right) \sim h^2\log\frac{1}{h},$$

wie behauptet.

Es sei jetzt $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der $\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin}{\cos}kx$ (bei festem $x$) ergibt partielle Summierung

$$\text{(c)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin}{\cos}\frac{kx}{k^{\delta+1}}(1-\cos kh) = O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1-\cos kh}{k^{\delta+1}} - \frac{1-\cos(k+1)h}{(k+1)^{\delta+1}}\right|\right).$$

Nun ist für ein festes $\tau > 0$

$$\sum_{(k+1)h>\tau}\left|\frac{1-\cos kh}{k^{\delta+1}} - \frac{1-\cos(k+1)h}{(k+1)^{\delta+1}}\right|$$

$$\text{(d)}\quad = O\left(\sum_{(k+1)h>\tau}\left(\frac{1}{k^{\delta+1}} - \frac{1}{(k+1)^{\delta+1}}\right) + \sum_{(k+1)h>\tau}\frac{|\cos(k+1)h - \cos kh|}{(k+1)^{\delta+1}}\right)$$

$$= O(h^{\delta+1}) + O(h\cdot h^{\delta}) = O(h^{\delta+1}) = o(h^{\delta}).$$

Andererseits ist die Funktion $\varphi(t) = \frac{1-\cos t}{t^{\delta+1}}$ für $0 < \delta < 1$ in einem Intervall $0 < t \leqq \tau = \tau_3$ monoton wachsend, für $\delta \geqq 1$ aber in dem Intervall $0 < t \leqq \tau = 1$ monoton abnehmend. Daher ist für $0 < \delta < 1$ und diese $\tau$

$$\text{(e)} \qquad \sum_{(k+1)h \leqq \tau} \leqq \frac{1-\cos\tau}{\tau^{\delta+1}} h^{\delta+1} = o(h^{\delta})$$

und für $\delta \geqq 1$

$$\text{(f)} \qquad \sum_{(k+1)h \leqq \tau} \leqq 1 - \cos h = O(h^2),$$

womit alles bewiesen ist.

Daß der Satz für $\delta > 2$ nicht mehr gilt, zeigt die wie in (b) beweisbare Formel

$$\text{(15a)} \qquad 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos kh}{k^{\delta+1}} \sim h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\delta-1}} \qquad (\delta > 2),$$

die für alle $\delta > 2$ die gleiche Größenordnung $h^2$ liefert.

(Eingegangen am 26. Oktober 1929.)

# Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Von

Vojtěch Jarník in Prag und Arnold Walfisz in Warschau.

Es sei $x > 0$, $r \geqq 4$ ganz;

$$Q(u) = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma \qquad (a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho})$$

eine positiv definite quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten und der Determinante $D$.

$$A_Q(x) = \sum_{0 \leqq Q \leqq x} 1$$

stellt dann die Anzahl aller Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leq x$ dar. Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$J_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} x^{\frac{r}{2}}$$

approximiert. Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x).$$

Sind die Koeffizienten $a_{\varrho\sigma}$ von $Q$ rational (oder, was auf dasselbe hinauskommt, rationale Vielfache einer reellen Zahl $a$), so nennen wir die Form $Q$ *rational*, anderenfalls aber *irrational*.

Bei rationalen $Q$ gilt nach E. Landau für $r = 4$ [1])

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^3 x) \quad [2]) \tag{1}$$

---

[1]) E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Zeitschrift 21 (1924), S. 126—132.

[2]) In einer z. Zt. nicht publizierten Arbeit hat Walfisz diese Abschätzung zu

$$\mathsf{P}(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log\log x}\right) \tag{1a}$$

verschärft („Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung" — erscheint in der Mathematischen Zeitschrift). Vordem hatte er dasselbe Restglied für die vierdimensionale Kugel

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leqq x$$

erzielt; vgl. seine „Teilerprobleme", Mathematische Zeitschrift 26 (1927), S. 66—88, § 6.

und für $r \geqq 5$ [3])

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right). \tag{2}$$

Ferner ist nach Jarník [4])

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right) \tag{3}$$

und, insbesondere für die vierdimensionale Kugel, nach Walfisz [5])

$$P(x) = \Omega(x \log\log x). \tag{4}$$

Ein Vergleich von (1) oder (1a) und (2) mit (3) und (4) zeigt, daß für $r \geqq 5$-dimensionale rationale Ellipsoide die Gitterrestordnung vollständig bestimmt ist, während bei vierdimensionalen nur noch eine logarithmische Spanne übrigbleibt.

Bei irrationalen Formen liegen die Verhältnisse, wie Untersuchungen von Walfisz [6]) und von Jarník [7]) gezeigt haben, ganz anders. Wir erwähnen hier vor allem folgenden Satz Jarníks (loc. cit. [7]), 1):

*Es sei*

$$Q = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2. \tag{5}$$

*Dann ist für fast alle positiven Wertsysteme der* $\alpha$ [8]) *und jedes feste* $\varepsilon > 0$

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right).$$

---

[3]) E. Landau, loc. cit. [1]). Den Fall $k \geqq 8$ hatte vorher Walfisz „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307, behandelt.

[4]) Bei E. Landau „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Zeitschrift **24** (1925), S. 299—310. Seitdem ist das $\Omega$-$\Omega_R$-$\Omega_L$-Problem für rationale $Q$ in einer Reihe von Abhandlungen durch Landau, Müntz, Petersson, Jarník und Walfisz behandelt worden.

[5]) loc. cit. [2]), § 7.

[6]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Dritte Abhandlung", Mathematische Zeitschrift **27** (1927), S. 245—268.

[7]) **1.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Annalen **100** (1928), S. 699—721; **2.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung", Mathematische Annalen **101** (1929), S. 136—146; **3.** „O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech", Rozpravy 2. třídy české Akademie **37** (1928), Nr. 27, S. 1—19; **4.** „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions", Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, S. 1—10; **5.** „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", The Tôhoku Mathematical Journal **30** (1929), S. 354—371.

[8]) „Fast alle" bedeutet: alle bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null im $r$-dimensionalen Raume der $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Im folgenden werden wir uns nur mit *irrationalen Formen der Gestalt* (5) beschäftigen. Für diese ist nach Jarník (loc. cit. [7]), 2), sofern $r \geqq 6$

$$P(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right). \tag{6}$$

Der Anblick von (2) und (4) legt nun die Vermutung nahe, daß (6) zwar noch für $r = 5$, aber nicht mehr für $r = 4$ zutrifft. Wir werden in der Tat zeigen:

I. *Für* $r = 5$ *ist*

$$P(x) = o\left(x^{\frac{3}{2}}\right). \tag{7}$$

II. *Es sei* $\varphi(x)$ *für* $x > 0$ *definiert und positiv,* $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. *Dann ist für ein geeignetes irrationales quaternäres* $Q(u) = Q(u; \varphi)$

$$P(x) = \Omega(x\varphi(x)\log\log x). \tag{8}$$

(7) ergibt sich bereits durch eine geringfügige Modifikation der Jarníkschen Methode und ist, ebenso wie (6), unverbesserlich, indem es zu jedem $\varphi(x)$ der oben genannten Art ein geeignetes $Q$ mit

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{3}{2}}\varphi(x)\right) \quad \text{bzw.} \quad \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\varphi(x)\right)$$

gibt [9]).

## § 1.

## Beweis von (7).

Bis zur Formel (17) der oben erwähnten Jarníkschen Arbeit (loc. cit. [7]), 2, S. 136—144) gelten alle Überlegungen unverändert auch für $r = 5$. Wir haben also nur den Schlußteil jener Arbeit entsprechend zu modifizieren. Hierbei schicken wir einige Formeln und Definitionen voraus (alles gleich für $r = 5$ spezialisiert), welche zum Verständnis des folgenden notwendig sind.

1. Vorbemerkungen. Wir setzen

$$A = \mathrm{Max}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_5}\right).$$

Weil die Zahlen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_5}{\alpha_1}$ nicht alle rational sind, gibt es eine für $x > 0$ definierte positive Funktion $f(x)$ mit $\lim_{x=\infty} f(x) = \infty$, so daß aus

$$\left|\frac{h_j}{k_j}\frac{1}{\alpha_j} - \frac{h_1}{k_1}\frac{1}{\alpha_1}\right| \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}};$$

$$j = 1, \ldots, 5; \quad h_j,\ k_j > 0 \text{ und ganz}$$

folgt

$$\mathrm{Max}\,(h_1, \ldots, h_5;\ k_1, \ldots, k_5) > f(x).$$

[9]) A. Walfisz, loc. cit. [6]), Satz 2.

Wir setzen

$$z = z(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$$

und bezeichnen mit $c$ unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ und $z$ abhängen. Ferner setzen wir

$$\Theta(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 w} \quad \text{für} \quad \Re(w) > 0,$$

$$s = \frac{1}{x} + it \qquad (t \gtrless 0).$$

(7) wird dann bewiesen sein, wenn es gelingt zu zeigen, daß

$$\int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right) \tag{9}$$

ist.

Wir legen nun, bei gegebenem $x > 1$, auf die Achse $-\infty < t < \infty$ alle Fareybrüche $\frac{h}{k}$ mit $h \gtrless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und fügen auch die zugehörigen Medianten $\frac{h+h'}{k+k'}$ hinzu. Jeder Bruch $\frac{h}{k}$ bestimmt dann ein linksseitig abgeschlossenes, rechtsseitig offenes Intervall, das von ihm bis zu den beiden nächsten Medianten reicht. Dieses Intervall nennen wir $\mathfrak{B}_{h,k}$. Je zwei solche Intervalle sind punktfremd und in ihrer Gesamtheit bedecken sie lückenlos die ganze $t$-Achse. Dasselbe gilt demnach von jeder der 5 Intervallserien

$$\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h,k}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_5}\mathfrak{B}_{h,k}.$$ [10])

Zu jedem $t \geqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$ gehören eindeutig 10 ganze positive Zahlen

$$h_1, \ldots, h_5; \qquad k_1, \ldots, k_5,$$

so daß $t$ im Durchschnitt $\mathfrak{C}_{h,k}$ der 5 Intervalle

$$\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}, \ \ldots, \ \frac{2\pi}{\alpha_5}\mathfrak{B}_{h_5,k_5}$$

liegt. $M(h; k) = M(h_1, \ldots, h_5; k_1, \ldots, k_5)$ bedeute die durch $t \geqq \frac{2\pi A}{\sqrt{x}}$ charakterisierte Teilmenge von $\mathfrak{C}_{h,k}$. Jedes $M(h; k)$ ist dann entweder leer oder ein halboffenes Intervall. Für $x > c$ ist $M(h; k)$ höchstens dann

[10]) Wenn $\beta < \gamma$, $\delta > 0$ und $J$ das Intervall $\beta \leqq u < \gamma$ ist, so bedeute $\delta J$ das Intervall $\delta\beta \leqq u < \delta\gamma$.

nicht leer, wenn entweder

$$\text{Max}(k_1, \ldots, k_5) > z^{-2}, \tag{10}$$

oder

$$\text{Min}(k_1, \ldots, k_5) > c z^{-2} \tag{11}$$

ist. Aus (9) folgt demnach, daß es genügt

$$\sum_{h;k}{}' \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \,\text{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} = o\left(x^{\frac{3}{4}} z\right) \tag{12}$$

zu beweisen, wobei den Zahlenquintupeln $h; k$ in $\sum'$ die Beschränkungen (10) oder (11) auferlegt werden.

Für $\Theta$-Abschätzungen diene uns hierzu noch die Ungleichung

$$|\Theta(\alpha s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha k}\right)^2}}, \tag{13}$$

welche erfüllt ist, wenn $\alpha$ einen der 5 Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ annimmt und $t$ in dem entsprechenden Intervall $\frac{2\pi}{\alpha} \mathfrak{B}_{h,k}$ liegt.

2. Beweis von (7). Wir betrachten zunächst den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (12), bei welchen (10) gilt. Aus Symmetriegründen dürfen und wollen wir uns hierbei auf die $M(h; k)$ mit $k_1 > z^{-2}$ beschränken. Auf solchen $M(h; k)$ ist nach (13)

$$|\Theta(\alpha_1 s)| < c x^{\frac{1}{4}} k_1^{-\frac{1}{2}} < c x^{\frac{1}{4}} z,$$

also ist

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{\substack{h;k \\ k_1 > z^{-2}}} \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s)\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \,\text{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} \\ &\leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_1 s)|^{\frac{1}{2}} |\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \,\text{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} \quad [11] \\ &\leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{5} \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{2}{5}} \,\text{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

---

[11]) An dieser Stelle weichen wir von der Jarníkschen Arbeit ab. Dort steht

$$\leqq c x^{\frac{1}{2}} z \int_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s)| \,\text{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2};$$

es wird also der ganze Faktor $\Theta(\alpha_1 s)$ abgespalten. Das Integral hat hier die Form (9), nur daß es für ein $(r-1)$-dimensionales Ellipsoid gebildet wird. Dies schadet nichts, sobald $r \geqq 6$, da dann $r - 1 \geqq 5$. Im vorliegenden Falle käme man aber auf die so unangenehme vierte Dimension, die durch den obigen Kunstgriff auf die „$4\frac{1}{2}$"-te erhöht wird.

Es ist

$$I_j(x) = \int\limits_{\frac{2\pi A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{\substack{h,k \\ h>0}} \int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}.$$

Wenn $t$ in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ liegt $(h > 0)$, so ist $\left|t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}}$, also ist $c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$ für $x > c$. Wegen (13) hat man mithin für $h > 0$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta(\alpha_j s)|^{\frac{9}{2}} \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2} < c\frac{k}{h} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k}\right)^2\right)^{\frac{9}{8}}}$$

$$= \frac{c}{h k^{\frac{5}{4}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) x^{\frac{5}{4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{9}{8}}} = \frac{c}{h k^{\frac{5}{4}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right) x^{\frac{5}{4}}.$$

Hieraus folgt

$$I_j(x) \leqq c x^{\frac{5}{4}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}} \operatorname{Min}\left(z, \frac{k}{h}\right)$$

$$= c x^{\frac{5}{4}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \sum_{k \leqq hz} \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}} + z \sum_{k > hz} \frac{1}{k^{\frac{5}{4}}}\right)$$

$$\leqq c x^{\frac{5}{4}} z^{\frac{3}{4}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{5}{4}}} = c x^{\frac{5}{4}} z^{\frac{3}{4}},$$

$$I(x) \leqq c x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}} = c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{4}{4}}$$

$$= o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right).$$

Nun bleibt uns noch übrig, den Beitrag derjenigen $M(h; k)$ zu der Summe in (12) abzuschätzen, für welche (11) gilt. Es ist

$$\sum_{\substack{h;k \\ \operatorname{Min} h > cz^{-2}}} \int\limits_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s) \ldots \Theta(\alpha_5 s)| \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{5} \sum_{\substack{h;k \\ \operatorname{Min} h > cz^{-2}}} \int\limits_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_j s)|^5 \operatorname{Min}(zt, 1) \frac{dt}{t^2}.$$

Aus Symmetriegründen dürfen wir uns auf das Glied mit $j = 1$ beschränken. Die Mengen $M(h; k)$ sind paarweise punktfremd, und $M(h; k)$ liegt in $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}$; also ist

$$\sum_{\substack{h;k \\ \mathrm{Min}\, h > c z^{-2}}} \int_{M(h;k)} |\Theta(\alpha_1 s)|^5 \,\mathrm{Min}\,(z t, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq \sum_{\substack{h_1, k_1 \\ h_1 > c z^{-2}}} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1, k_1}} |\Theta(\alpha_1 s)|^5 \,\mathrm{Min}\,(z t, 1) \frac{dt}{t^2}$$

$$\leqq c \sum_{\substack{h_1, k_1 \\ h_1 > c z^{-2}}} \frac{1}{h_1 k_1^{\frac{5}{2}}} \mathrm{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi h_1}{\alpha_1 k_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{4}}}$$

$$= c x^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{h_1 k_1 \\ h_1 > c z^{-2}}} \frac{1}{h_1 k_1^{\frac{3}{2}}} \mathrm{Min}\left(z, \frac{k_1}{h_1}\right)$$

$$\leqq c x^{\frac{3}{2}} \sum_{h_1 > c z^{-2}} \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \sum_{k_1 \leqq h_1 z} \frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}} + z \sum_{k_1 > h_1 z} \frac{1}{k_1^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\leqq c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} \sum_{h_1 > c z^{-2}} \frac{1}{h_1^{\frac{3}{2}}} \leqq c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} z$$

$$= c x^{\frac{3}{2}} z^{\frac{3}{2}} = o\left(x^{\frac{3}{2}} z\right).$$

Damit ist (12), also auch (7), bewiesen.

## § 2.

## Beweis von (8).

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

*Für ganze $n, p, q > 0$ sei $r_{p,q}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von $n$ durch die Form*

$$q^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + p^2 u_4^2. \tag{14}$$

*Dann gibt es eine positive absolute Konstante $a$, so daß*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n)}{n \log\log n} > \frac{a}{p^2 q^2}.$$

Beweis. Jeder Darstellung von $n$ durch die Form $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ entspricht eine Darstellung von $n p^2 q^2$ durch die Form (14), nämlich

$$n p^2 q^2 = q^2 ((p u_1)^2 + (p u_2)^2 + (p u_3)^2) + p^2 (q u_4)^2.$$

Also ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n)}{n \log\log n} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{p,q}(n p^2 q^2)}{n p^2 q^2 \log\log (n p^2 q^2)} \geqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n p^2 q^2 \log\log (n p^2 q^2)}$$

$$= \frac{1}{p^2 q^2} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n \log\log n}.$$

Nun ist aber

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r_{1,1}(n)}{n \log\log n} > 0, \quad ^{12})$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Beweis von (8). Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varphi(x)$ monoton abnimmt und

$$\lim_{x=\infty} x\,\varphi(x) \log\log x = \infty$$

ist. Aus dem obigen Hilfssatz folgt, daß wir drei Folgen von ganzen positiven Zahlen

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots,$$
$$q_1 < q_2 < q_3 < \ldots,$$
$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$$

so wählen können, daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

15) $$r_{p_n, q_n}(t_n) > \frac{a}{p_n^2 q_n^2} t_n \log\log t_n > \frac{t_n}{q_n^2} \varphi\left(\frac{t_n}{2 q_n^2}\right) \log\log\left(\frac{t_n}{q_n^2}\right);$$

16) $$t_n > q_n^3 (\geqq n);$$

17) $$0 < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 < \frac{1}{2^{t_n}}.$$

Aus (16) und (17) folgt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = \alpha$$

existiert und die Ungleichung

18) $$0 < \alpha - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 < \frac{1}{2^{t_n}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{2}{2^{t_n}} < \frac{2}{2^{q_n}}$$

erfüllt. Also ist $\alpha > 0$ *irrational*.

Für die Form

$$Q(u) = Q(u; \varphi) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \alpha u_4^2$$

werden wir die Behauptung (8) nachweisen.

Die Gleichung

$$q_n^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + p_n^2 u_4^2 = t_n,$$

d. h. die Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 u_4^2 = \frac{t_n}{q_n^2}$$

hat nach (15), wenn wir $\frac{t_n}{q_n^2} = x_n$ und für spätere Zwecke

$$\frac{t_n}{q_n^2} - \frac{2 t_n}{2^{t_n}} = y_n, \qquad \frac{t_n}{q_n^2} + \frac{2 t_n}{2^{t_n}} = z_n$$

---

12) A. Walfisz, loc. cit. 5).

setzen, für mehr als

$$x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n \tag{19}$$

Gitterpunkte $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ erfüllt. Für alle diese Gitterpunkte ist $u_4^2 \leqq t_n$, also nach (18)

$$0 \leqq \left(\alpha - \frac{p_n^2}{q_n^2}\right) u_4^2 < \frac{2t_n}{2^{t_n}}$$

und somit

$$y_n < x_n \leqq Q(u) < z_n.$$

Wegen (19) ist ferner

$$A_Q(z_n) - A_Q(y_n) > x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n.$$

Andererseits ist für wachsendes $n$

$$J_Q(z_n) - J_Q(y_n) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\alpha}}(z_n^2 - y_n^2) = O\left(x_n \frac{t_n}{2^{t_n}}\right) = O\left(\frac{t_n^2}{q_n^2 2^{t_n}}\right) = o(1).$$

Für hinreichend große $n$ hat man daher

$$\mathsf{P}(z_n) - \mathsf{P}(y_n) > \frac{1}{2} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n.$$

Wegen $\frac{z_n}{x_n} \to 1$, $\frac{y_n}{x_n} \to 1$ ist also für alle großen $n$ mindestens eine von den beiden folgenden Ungleichungen erfüllt: entweder

$$\mathsf{P}_Q(z_n) > \frac{1}{4} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n > \frac{1}{5} z_n \varphi(z_n) \log\log z_n,$$

oder

$$\mathsf{P}_Q(y_n) < -\frac{1}{4} x_n \varphi\left(\frac{x_n}{2}\right) \log\log x_n < -\frac{1}{5} y_n \varphi(y_n) \log\log y_n.$$

Wegen $y_n \to \infty$, $z_n \to \infty$ ist damit (8) bewiesen.

Prag und Warschau, im November 1929.

(Eingegangen am 9. November 1929.)

# Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist.

Von

Gottfried Köthe in Göttingen.

---

## Verzeichnis der zitierten Arbeiten:

E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. d. math. Seminars d. Universität Hamburg 5 (1927), S. 251 ff., zitiert als A.

L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie (1927), zitiert als D.

W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschrift 23 (1925), S. 161 ff., zitiert als K.

E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschrift 30 (1929), S. 641, zitiert als $N_1$.

E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96, S. 26 ff., zitiert als $N_2$.

O. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Zeitschrift 29 (1928), S. 34 ff., zitiert als S.

## Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, gewisse aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme bekannte Strukturs\"atze auf allgemeinere nichtkommutative Ringe zu übertragen. Es liegen schon Arbeiten in dieser Richtung vor, in erster Linie A und $N_1$. In A werden die Ringe, die den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllen, mit idealtheoretischen Methoden untersucht. Das Hauptresultat ist folgendes: Jeder primäre Ring mit Haupteinheit, der den Doppelkettensatz erfüllt, läßt sich auffassen als Matrizenring endlichen Grades in einem vollständig primären Ring.

In $N_1$ dagegen wird mit den Begriffen der allgemeinen Gruppentheorie, die auf die Ideale in einem Ring angewendet werden, die Struktur der vollständig reduziblen Ringe ohne nilpotentes Ideal untersucht. Es gilt der Satz: Ein vollständig reduzibler und zweiseitig einfacher Ring mit Haupteinheit ist ringisomorph einem Matrizenring endlichen Grades in einem Körper, der isomorph dem Automorphismenkörper der einfachen Rechtsideale des Ringes ist.

Auf die Frage, ob auch im allgemeinen primären Fall der vollständig primäre Ring Automorphismenring der direkt unzerlegbaren Rechtsideale ist, hat mich Fräulein Emmy Noether hingewiesen, der ich an dieser Stelle für die Anregung und viele Ratschläge zu der vorliegenden Arbeit danken möchte.

Es lag nun nahe, die Voraussetzung des Doppelkettensatzes fallen zu lassen und zu versuchen, die unter dieser Voraussetzung gewonnenen Resultate auf allgemeinere Ringe auszudehnen. Es zeigte sich, daß die Bedingung, unter der das möglich ist, die folgende ist: Jedes reguläre Rechtsideal des Ringes $\mathfrak{o}$ umfaßt ein minimal reguläres und jede Kette $e_1\mathfrak{o} \subset e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} \subset \ldots$, $e_i e_k = 0$ für $i < k$, $e_i^2 = e_i$, bricht nach endlich vielen Gliedern ab; die $e_i\mathfrak{o}$ sind als minimal reguläre Rechtsideale vorausgesetzt, also sind die einzelnen Glieder der Kette direkte Summen von minimal regulären Rechtsidealen. Dabei verstehen wir unter einem regulären Ideal ein Ideal, das nicht nur nilpotente Elemente enthält, unter einem minimal regulären ein solches, das kein echtes reguläres Unterideal besitzt.

Für Ringe, die dieser Bedingung genügen, gelten nun tatsächlich die beiden folgenden Strukturs ätze (vgl. §§ 6 und 7):

Jeder primäre Ring mit Haupteinheit ist ringisomorph einem Matrizenring endlichen Grades in einem vollständig primären Ring, der mit dem Automorphismenring der direkt unzerlegbaren Rechtsideale isomorph ist.

Ein beliebiger, unsere Bedingung erfüllender Ring hat die folgende Struktur: Er besitzt ein Radikal $\mathfrak{c}$, der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist vollständig reduzibel, und wenn $\mathfrak{o}/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1^* + \mathfrak{a}_2^* + \ldots + \mathfrak{a}_s^*$ die Zerlegung in zweiseitig einfache Ideale ist, dann läßt sich $\mathfrak{o}$ darstellen als $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathfrak{o}\, m_i + \mathfrak{n}$. Die Summe ist direkt, die $m_i \mathfrak{o}\, m_i$ sind primäre Ringe mit der Haupteinheit $m_i$, $\mathfrak{n}$ ist eine additive Gruppe von Elementen aus dem Radikal.

Daß unsere Bedingung die weiteste ist, unter der die beiden Strukturs ätze gelten, folgt aus dem Satze (§ 4), daß die Ringe, die ihr genügen, identisch sind mit den Ringen, die ein Radikal besitzen und deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, zwei Voraussetzungen, die für beide Sätze notwendig sind. Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, erweist sich also als durchaus gleichartig mit der Struktur der hyperkomplexen Systeme.

Ein weiteres wichtiges Resultat über die Struktur unserer Ringe ist Satz 14 (§ 7), in dem gezeigt wird, daß die Anzahl der Klassen von operatorisomorphen direkt unzerlegbaren regulären Rechtsidealen in $\mathfrak{o}$ dieselbe ist wie in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, also gleich der Anzahl der zweiseitig einfachen Ideale in einer direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$.

Die Methoden, mit denen wir unsere Resultate gewinnen, sind die Methoden der allgemeinen Gruppen- und Idealtheorie. Von den Teilresultaten, die wir zur Durchführung der Theorie benötigen, möchte ich vor allem die beiden Sätze erwähnen, daß jedes minimale reguläre Rechtsideal eines beliebigen Ringes ein Idempotent enthält (Satz 7) und daß ein Ring, in dem jedes reguläre Rechtsideal ein Idempotent enthält, ein Radikal besitzt (Satz 8).

Ein anderes immer angewandtes Hilfsmittel ist die einseitige Peircesche Zerlegung (Hilfssatz 1). An einigen Stellen wird auch die gewöhnliche Peircesche Zerlegung (§ 5) verwendet.

Schließlich sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Bevorzugung der Rechtsideale eine rein willkürliche ist und daß natürlich jeder Satz einen dualen hat, der sich statt auf Rechts-, auf Linksideale bezieht.

## § 1.

## Begriffe und Sätze der allgemeinen Gruppentheorie.

Die wichtigsten Begriffe und Sätze, die wir im Laufe der Untersuchung verwenden werden, sollen in diesem Paragraphen zusammengestellt werden.

W. Krull hat den Begriff der *Gruppe mit Operatorenbereich* eingeführt[1]): Es sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben und ein Bereich von Operatoren $\Theta, \mathsf{H}, \ldots$, die jedem Element $a$ aus $\mathfrak{G}$ Elemente $\Theta a, \mathsf{H}a, \ldots$ zuordnen, die wieder in der Gruppe $\mathfrak{G}$ liegen. Es wird außerdem verlangt, daß die Operatoren das distributive Gesetz erfüllen: $\Theta(ab) = \Theta a \cdot \Theta b$.

Als *zulässige Untergruppe* (wir wollen im folgenden kurz von *Untergruppen* sprechen, da wir es nur mit zulässigen zu tun haben werden) bezeichnet man eine Untergruppe $\mathfrak{H}$, die den Operatorenbereich gestattet, für die also $\Theta\mathfrak{H} \leq \mathfrak{H}$ ist.

Unter der *Operatorhomomorphie* $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$ (gewöhnlich kurz als *Homomorphie* bezeichnet) zweier Gruppen mit Operatorenbereich versteht man einen gewöhnlichen Gruppenhomomorphismus, der noch die Eigenschaft hat, daß aus der Zuordnung $a \sim \bar{a}$ die Zuordnung $\Theta a \sim \Theta \bar{a}$ folgt, wenn $\Theta$ einen beliebigen Operator bedeutet.

Von den Sätzen der allgemeinen Gruppentheorie seien die folgenden hervorgehoben[2]):

1. Homomorphiesatz. *Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ homomorphes Abbild von $\mathfrak{G}$ und ist* n *die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{G}$, denen das Einheitselement von*

[1]) Vgl. K und die Übertragung auf nicht-Abelsche Gruppen bei S.

[2]) Vgl. $N_1$ bezüglich der Beweise und näherer Ausführungen.

*$\overline{\mathfrak{G}}$ zugeordnet ist, so ist* $\mathfrak{n}$ *Normalteiler*[3]) *von* $\mathfrak{G}$ *und* $\overline{\mathfrak{G}}$ *isomorph zur Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{n}$: $\overline{\mathfrak{G}} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{n}$.

2. Die beiden Isomorphiesätze. a) *Wenn* $\overline{\mathfrak{G}}$ *homomorphes Abbild von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{n}$ *ein Normalteiler von* $\overline{\mathfrak{G}}$ *und* $\mathfrak{n}$ *die Gesamtheit der Elemente von* $\mathfrak{G}$, *denen Elemente aus* $\overline{\mathfrak{n}}$ *zugeordnet sind, so ist* $\mathfrak{n}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *und es gilt* $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{n}} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{n}$.

b) *Wenn* $\mathfrak{H}$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist,* $\mathfrak{n}$ *ein Normalteiler, so ist* $[\mathfrak{H}, \mathfrak{n}]$ *Normalteiler und es gilt* $(\mathfrak{H}, \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{H}/[\mathfrak{H}, \mathfrak{n}]$.

Besonders wichtig für unsere Untersuchungen sind die folgenden Bedingungen:

Wir sagen, eine Gruppe erfüllt die *Maximalbedingung für Untergruppen, wenn es in jeder Menge von Untergruppen eine maximale gibt, also eine, die nicht echte Untergruppe einer anderen Untergruppe der Menge ist.*

Analog sagen wir: *eine Gruppe erfüllt die Minimalbedingung für Untergruppen, wenn es in jeder Menge von Untergruppen eine minimale gibt, also eine, die nicht echte Obergruppe einer anderen Untergruppe der Menge ist.*

Aus der Maximalbedingung folgt der Teilerkettensatz: *Jede aufsteigende Kette* $\mathfrak{H}_1 < \mathfrak{H}_2 < \mathfrak{H}_3 < \dots$ *von Untergruppen, wobei* $\mathfrak{H}_{n+1}$ *echte Obergruppe von* $\mathfrak{H}_n$ *ist, bricht nach endlich viel Gliedern ab.* Ebenso folgt aus der Minimalbedingung der Vielfachenkettensatz: *Jede Kette* $\mathfrak{H}_1 > \mathfrak{H}_2 > \dots$ *von Untergruppen bricht nach endlich viel Gliedern ab.* Umgekehrt folgt mit Hilfe des Auswahlpostulates aus dem Teilerkettensatz die Maximalbedingung und aus dem Vielfachenkettensatz die Minimalbedingung.

Erfüllt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ Teiler- und Vielfachenkettensatz, so sagen wir, in $\mathfrak{G}$ gelte der Doppelkettensatz.

Schließlich erwähnen wir noch

Satz 3[4]). *Die Darstellung einer Gruppe, die den Doppelkettensatz erfüllt, als direktes Produkt von direkt unzerlegbaren Gruppen ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

Ist die Gruppe direktes Produkt von endlich vielen einfachen Gruppen, so heißt die Gruppe *vollständig reduzibel.* Da eine solche Gruppe eine endliche Kompositionsreihe besitzt, ist Satz 3 mit dem Satz von Jordan-Hölder identisch. Außerdem erfüllt die Gruppe den Doppelkettensatz (vgl. $N_1$, S. 653).

---

[3]) „Normalteiler" ist dabei natürlich im Sinne von zulässigem Normalteiler zu verstehen.

[4]) Vgl. S, S. 39 und K, S. 186.

## § 2.

## Die Theorie der vollständig reduziblen Ringe.

Die Anwendung der allgemeinen Gruppentheorie auf die Ringtheorie wird durch folgende Auffassung der Ideale eines Ringes möglich[5]):

Die Ideale in einem (nicht als kommutativ vorausgesetzten) Ring $\mathfrak{o}$ werden zu zulässigen Untergruppen, wenn wir $\mathfrak{o}$ als Gruppe mit Operatorenbereich auffassen. Gruppenverknüpfung ist die Addition im Ring, Operatoren sind ebenfalls die Elemente des Ringes, und zwar definiert jedes Element zwei Operatoren, je nachdem ich das Produkt $xa$ oder $ax$ bilde. Beschränke ich mich auf Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit den Elementen des Ringes, so bekomme ich als zulässige Untergruppen die Rechts- bzw. Linksideale von $\mathfrak{o}$, lasse ich beide Operationen zu, so bekomme ich die zweiseitigen Ideale.

Durch diese Deutung der Ideale geht jeder der Sätze des vorigen Paragraphen in einen Satz über die Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitigen Ideale eines Ringes über.

*Ein Ideal in einem Ring, das nur nilpotente Elemente enthält*, bezeichnen wir als *Nilideal. Ein Ideal, das kein Nilideal ist, also mindestens ein nicht nilpotentes Element enthält*, nennen wir *regulär.*

Es ist durchaus nicht notwendig, daß in allgemeinen Ringen jedes Nilideal nilpotent ist. Ein Beispiel dafür ist der folgende Ring $\mathfrak{R}$: Es seien abzählbar viele $r_i$ gegeben, die folgenden Relationen genügen: $r_i^2 = r_{i-1}$, $r_1^2 = 0$, $2r_i = 0$. Der Ring $\mathfrak{R}$ ist kommutativ, jedes Element ist nilpotent, keine Potenz von $\mathfrak{R}$ verschwindet. Weil $\mathfrak{R}$ keine endliche Basis besitzt, so erfüllt $\mathfrak{R}$ nicht die Maximalbedingung für Rechtsideale und wie die absteigende, nicht abbrechende Kette der Hauptideale $(r_1) \supset (r_1 r_2) \supset (r_1 r_2 r_3) \supset \ldots$ zeigt, auch nicht die Minimalbedingung.

Ob es Ringe gibt, die — ohne nilpotent zu sein — nur nilpotente Elemente enthalten und einen der beiden Kettensätze erfüllen, ist eine offene Frage.

Die Bedingung, die wir im folgenden den Ringen auferlegen werden und die sich als identisch mit der Forderung herausstellen wird, daß der Ring ein Radikal besitzt und daß der Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, ist folgende:

*Jedes reguläre Rechtsideal des Ringes* $\mathfrak{o}$ *umfaßt ein minimales reguläres, d. h. ein reguläres Rechtsideal, das kein echtes reguläres Unter-*

[5]) Vgl. $N_1$, S. 646.

*ideal*[6]) *besitzt, und jede Kette* $e_1\mathfrak{o} \subset e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} \subset \ldots$, $e_i e_k = 0$ *für* $i < k$, $e_i^2 = e_i$, *bricht nach endlich vielen Gliedern ab, die* $e_i\mathfrak{o}$ *als minimal regulär vorausgesetzt.*

Wir bezeichnen diese Bedingung im folgenden kurz als Bedingung I.

In Übereinstimmung mit den Begriffen in § 1 definieren wir:

Ein Ring $\mathfrak{o}$ heißt *„vollständig reduzibel", wenn er direkte Summe von endlich vielen einfachen Rechtsidealen, ebenso Linksidealen ist, also* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \ldots + \mathfrak{l}_m$. *Ein „einfaches" Rechtsideal ist dabei ein solches, das kein echtes Unterideal besitzt.* Es gilt nun

Satz 4. *Erfüllt ein Ring* $\mathfrak{o}$ *die Bedingung I und enthält* $\mathfrak{o}$ *kein Rechtsnilideal, so ist* $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel und enthält eine Haupteinheit.*

Beweis[7]). Wir leiten zuerst ab den

Hilfssatz 1 (einseitige Peircesche Zerlegung). *Enthält ein Rechtsideal* $\mathfrak{r}$ *eines beliebigen Ringes* $\mathfrak{o}$ *ein Idempotent* $e$, *so wird* $\mathfrak{r}$ *direkte Summe zweier Rechtsideale* $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}^{(1)}$.

Für jedes $r$ aus $\mathfrak{r}$ gilt die Gleichung $r = er + (r - er)$. Sowohl die Gesamtheit aller $er$, sowie die aller $(r - er)$ bildet ein Rechtsideal $\mathfrak{r}_1$ bzw. $\mathfrak{r}^{(1)}$. Also $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}^{(1)})$[8]). Diese Summe ist aber direkt, weil aus $0 = ea + (b - eb)$ durch Multiplikation mit $e$ von links folgt, daß $ea = 0$, also auch $(b - eb) = 0$. Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß $er^{(1)} = 0$ für jedes $r^{(1)}$ aus $\mathfrak{r}^{(1)}$.

Wir zeigen nun, daß ein minimalreguläres Rechtsideal $\mathfrak{r}$ unseres Ringes ein Idempotent enthält. Es sei $r$ ein Element aus $\mathfrak{r}$, für das $r\mathfrak{r} \neq 0$. Ein solches Element muß es geben, da sonst gegen die Voraussetzung $\mathfrak{r}^2 = 0$ wäre. $r$ ist kein linker Nullteiler von $\mathfrak{r}$, da die sämtlichen von $r$ annullierten Elemente von $\mathfrak{r}$ ein echtes Unterideal von $\mathfrak{r}$ bilden würden, $\mathfrak{r}$ ist aber einfach, da es nur ein Nilideal als Unterideal enthalten könnte, $\mathfrak{o}$ aber keine Nilideale enthält. Es ist daher sogar $r\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$. Es gibt daher ein Element $c$ in $\mathfrak{r}$, für das $rc = r$. Da weiter $r(c^2 - c) = 0$ und $r$ kein linker Nullteiler ist, so ist $c^2 = c$, also $c$ das gesuchte Idempotent und zugleich $c\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$.

---

[6]) Unter dem „Unterideal" eines Ideals $\mathfrak{r}$ verstehen wir dabei ein Ideal in $\mathfrak{o}$, dessen Elemente sämtlich im mengentheoretischen Sinn in $\mathfrak{r}$ vorkommen, also in der gruppentheoretischen Auffassung eine zulässige Untergruppe von $\mathfrak{r}$ in bezug auf $\mathfrak{o}$ als Multiplikatorenbereich.

[7]) Der Beweis ist fast genau derselbe wie in $N_1$, S. 663; wir bringen ihn deswegen so ausführlich, weil gewisse Teilüberlegungen später an anderer Stelle verwendet werden.

[8]) Allgemein bedeutet $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ die *Summe* der beiden Ideale, d. h. das aus den Summen der Elemente beider Ideale abgeleitete Ideal, auch *Vereinigungsideal* genannt; wenn $[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2] = 0$, sprechen wir von *direkter Summe* und verwenden das Pluszeichen.

Wir konstruieren uns nun unter Verwendung der einseitigen Peirceschen Zerlegung eine Linkseinheit des Ringes $\mathfrak{o}$ und zeigen zugleich, daß $\mathfrak{o}$ direkte Summe von einfachen Rechtsidealen ist.

Wir gehen aus von einem beliebigen minimalen regulären Rechtsideal $\mathfrak{r}_1$, das einfach ist und eine Linkseinheit $e_1$ besitzt, also $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{o}$. Daraus folgt nach Hilfssatz 1 eine Zerlegung $\mathfrak{o} = e_1\mathfrak{o} + \mathfrak{o}^{(1)}$. Aus der Menge der Unterideale von $\mathfrak{o}^{(1)}$ greifen wir ein minimal reguläres $\mathfrak{r}_2$ heraus und konstruieren uns ein Idempotent, das Linkseinheit von $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$ ist. Es sei $t$ eine Linkseinheit von $\mathfrak{r}_2$. Wir setzen $e_2 = t - te_1$. Da $e_1 t = 0$, so ist $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$, $e_2^2 = e_2$. Das gesuchte Idempotent ist dann $e_1 + e_2$. Man bestätigt leicht die Relationen $(e_1 + e_2)^2 = e_1 + e_2$, $(e_1 + e_2)\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$.

Dieses Verfahren denken wir uns fortgesetzt, indem wir statt $e_1$ das Idempotent $e_1 + e_2$ der obigen Konstruktion zugrunde legen. Das Verfahren ist nach endlich vielen Schritten zu Ende, da die Kette

$$\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 \subset \dots$$

wegen Bedingung I nach endlich vielen Gliedern abbricht. Da andererseits das Verfahren so lange fortsetzbar ist, bis das von dem durch $n$ Schritte konstruierten Idempotent $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ annullierte Ideal $\mathfrak{r}^{(n)}$ das Nullideal ist, so ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \dots + \mathfrak{r}_n = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} + \dots + e_n\mathfrak{o}$ und $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ die gesuchte Linkseinheit von $\mathfrak{o}$. Die $\mathfrak{r}_i$ sind einfach.

Wir haben noch zu zeigen, daß $e$ Haupteinheit und $\mathfrak{o}$ auch direkte Summe von einfachen Linksidealen ist.

Hilfssatz 2. *Wenn ein Ring $\mathfrak{o}$ kein nilpotentes Rechtsideal besitzt, so besitzt er auch kein nilpotentes Linksideal.*

Es sei $\mathfrak{l}^\varrho = 0$ für ein Linksideal $\mathfrak{l}$. Dann ist das zweiseitige Ideal $\mathfrak{a} = (\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\mathfrak{o})$ ebenfalls nilpotent gegen die Voraussetzung. Denn $\mathfrak{a}^\varrho$ ist Vereinigungsideal von Produkten $\dots \mathfrak{l}\mathfrak{o}\mathfrak{l}\mathfrak{l}\dots$, in denen mindestens $\varrho$-mal $\mathfrak{l}$ vorkommt; da $\mathfrak{o}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}$, ist jedes dieser Produkte Null.

Es sei nun $e$ nicht die Haupteinheit von $\mathfrak{o}$, also nach Hilfssatz 1 angewandt auf Linksideale $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e + \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} \neq 0$, aber $\mathfrak{l}e = 0$. Da $e$ Linkseinheit ist, so ist $e\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}e \cdot \mathfrak{l} = 0$. $\mathfrak{l}$ wäre also im Widerspruch zu Hilfssatz 2 ein nilpotentes Linksideal.

Daß $\mathfrak{o}$ direkte Summe von einfachen Linksidealen ist, folgt sofort aus

Satz 5. *Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \dots + \mathfrak{r}_n$, $\mathfrak{r}_i$ einfach, und ist $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ die dazugehörige Zerlegung der Haupteinheit, so ist die entsprechende Linkszerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \dots + \mathfrak{o}e_n$ ebenfalls eine direkte Summenzerlegung in einfache Linksideale $\mathfrak{o}e_i$* (Beweis siehe $N_1$, S. 658).

Es gilt: *Ein vollständig reduzibler Ring $\mathfrak{o}$ ohne Nilideal erfüllt den Doppelkettensatz und besitzt eine Haupteinheit.* Denn am Schlusse von § 1

wurde darauf hingewiesen, daß eine vollständig reduzible Gruppe den Doppelkettensatz erfüllt, und da der Doppelkettensatz eine stärkere Voraussetzung ist als I, so folgt die Existenz der Haupteinheit sofort nach Satz 4.

Einige weitere Eigenschaften der vollständig reduziblen Ringe seien noch ohne Beweis angeführt.

Ein vollständig reduzibler Ring mit Haupteinheit ist auch direkte Summe von zweiseitig einfachen Idealen: $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_m$, wobei $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = 0$. Diese Zerlegung ist eindeutig, d. h. wenn $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1' + \mathfrak{a}_2' + \ldots + \mathfrak{a}_{m'}'$, eine zweite Zerlegung ist, so ist $m = m'$ und bei geeigneter Reihenfolge $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a}_i$. Die $\mathfrak{a}_i$ selbst sind zweiseitig einfache, vollständig reduzible Ringe ohne Nilideal.

Gehen wir zur Zerlegung in einseitige Rechtsideale über, so zerfällt jedes $\mathfrak{a}_i$ weiter in gewisse Rechtsideale: $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{r}_1^{(i)} + \mathfrak{r}_2^{(i)} + \ldots + \mathfrak{r}_{n_i}^{(i)}$.

Die Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$ ist im allgemeinen nicht eindeutig, wohl aber ist nach Satz 3 die Anzahl $n$ der einfachen Rechtsideale in einer solchen Zerlegung eine Invariante. Es gilt ferner, daß zwei einfache Rechtsideale $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_k'$, die bei beliebigen einseitigen Zerlegungen desselben $\mathfrak{a}_i$ entstehen, immer operatorisomorph in bezug auf Rechtsmultiplikation mit den Elementen des Ringes sind; dagegen sind Rechtsideale aus verschiedenen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ niemals operatorisomorph. Es gibt also genau $m$ Klassen operatorisomorpher einfacher Rechtsideale, wenn $m$ die Anzahl der $\mathfrak{a}_i$ ist.

Vollen Aufschluß über die Struktur gibt schließlich

Satz 6. *Jeder vollständig reduzible und zweiseitig einfache Ring* $\mathfrak{o}$ *mit Haupteinheit ist ringisomorph dem Matrizenring n-ten Grades in einem Körper* $\mathfrak{K} \leq \mathfrak{o}$, *wobei* $\mathfrak{K}$ *isomorph dem Automorphismenkörper der einfachen Rechtsideale von* $\mathfrak{o}$ *und n deren Anzahl in einer direkten Summenzerlegung von* $\mathfrak{o}$ *ist.*

## § 3.

## Der Idempotentsatz und die Existenz des Radikals.

Beim Beweise von Satz 4 haben wir gezeigt, daß ein einfaches reguläres Rechtsideal ein Idempotent enthält. Es gilt nun der allgemeinere

Satz 7. *Jedes minimale reguläre Rechtsideal* $\mathfrak{r}$ *eines beliebigen Ringes enthält ein Idempotent.*

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz 3[9]). *Enthält ein Ideal* $\mathfrak{r}$ *eines beliebigen Ringes ein nicht*

[9]) Der Grundgedanke dieses Beweises findet sich z. B. bei D, S. 123.

*nilpotentes Element $c$, das der Gleichung*

$$c^2 - c = t \tag{1}$$

*genügt, $t^n = 0$, so enthält* $\mathfrak{r}$ *ein Idempotent.*

Es ist $c$ mit $t$ vertauschbar, wie durch Multiplikation der Gleichung (1) mit $c$ von rechts und links folgt. Wir setzen $c_1 = c - 2ct + t$. (Falls im Ring Addition modulo 2 gilt, so setzen wir $c_1 = c + t$.) $c_1$ ist wieder ein nicht nilpotentes Element aus $\mathfrak{r}$. Denn $c_1^m = c^m - ta$, $a$ mit $t$ vertauschbar. $ta$ ist nilpotent, also $c^m \neq ta$, daher $c_1^m \neq 0$.

Es gilt wegen (1) für $c_1$ die Gleichung $c_1^2 - c_1 = t^2 b = t_1$, wobei $b$ mit $t$ vertauschbar ist und daher $t_1$ einen niedrigeren Exponenten wie $t$ hat. Setzen wir das Verfahren fort, bilden wir also $c_2 = c_1 - 2c_1 t_1 + t_1$ usw., so bekommen wir nach endlich vielen Schritten ein Element $c_r$, das der Gleichung $c_r^2 - c_r = 0$ genügt, also das gesuchte Idempotent ist.

Wir gehen nun zum Beweise von Satz 7: $r$ sei ein nicht nilpotentes Element aus $\mathfrak{r}$. Dann gilt

$$r\mathfrak{r} = \mathfrak{r}, \tag{2}$$

da sonst $r\mathfrak{r}$ ein echtes reguläres Unterideal von $\mathfrak{r}$ wäre, gegen die Voraussetzung, daß $\mathfrak{r}$ minimal regulär. Wenn $r$ linker Nullteiler von $\mathfrak{r}$ ist, dann bildet die Gesamtheit der von $r$ annullierten Elemente aus $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{r}$. Wir zeigen, daß dann entweder $\mathfrak{r}$ ein Idempotent enthält oder $\mathfrak{t}$ regulär sein muß. Letzteres ist, da $\mathfrak{t}$ echtes Unterideal von $\mathfrak{r}$ ist, unmöglich, also der Satz bewiesen.

Es gibt nach (2) ein Element $r_1$, so daß $rr_1 = r$. Daraus folgt, daß $r(r_1^2 - r_1) = 0$ und $r_1$ nicht nilpotent ist. $t = r_1^2 - r_1$ ist Element von $\mathfrak{t}$. Wir können $t \neq 0$ annehmen, da sonst $r_1$ schon das gesuchte Idempotent wäre. Ist nun $t$ nilpotent, so enthält $\mathfrak{r}$ nach Hilfssatz 3 ein Idempotent, ist $t$ nicht nilpotent, dann ist $\mathfrak{t}$ regulär.

Wir definieren: *Ein Ideal* $\mathfrak{c}$ *heißt das „Radikal" des Ringes* $\mathfrak{o}$, *wenn* $\mathfrak{c}$ *das einzige maximale zweiseitige Nilideal von* $\mathfrak{o}$ *ist und außerdem alle rechts- und linksseitigen Nilideale umfaßt*[10]).

Um die Existenz des Radikals in den im nächsten Paragraphen betrachteten Ringen beweisen zu können, brauchen wir

[10]) Dieses so definierte Radikal fällt in dem bisher ausschließlich betrachteten Fall der Ringe, die den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllen (siehe A), mit dem maximalen nilpotenten Ideal $\bar{\mathfrak{c}}$ zusammen, das man auch als Radikal zu bezeichnen pflegt. Denn der Restklassenring $\mathfrak{o}/\bar{\mathfrak{c}}$ ist vollständig reduzibel und ohne nilpotentes Ideal, also jedes Ideal in $\mathfrak{o}/\bar{\mathfrak{c}}$ regulär (vgl. $N_1$, S. 662). Einem nicht nilpotenten Nilideal $\mathfrak{s}$ müßte aber in $\mathfrak{o}/\bar{\mathfrak{c}}$ das Ideal $(\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{c}})/\bar{\mathfrak{c}} \neq 0$ entsprechen, das nur nilpotente Elemente enthielte.

Satz 8. *Jeder Ring* $\mathfrak{o}$, *in dem jedes reguläre Rechtsideal ein Idempotent enthält, besitzt ein Radikal.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß es ein eindeutig bestimmtes, maximales zweiseitiges Nilideal gibt. Wir betrachten das Vereinigungsideal $\mathfrak{c}$ aller zweiseitigen Nilideale und zeigen, daß es nur nilpotente Elemente enthält.

Dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß die Summe zweier Elemente aus verschiedenen Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wieder nilpotent ist:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b', \quad b' \text{ in } \mathfrak{b}; \quad (a+b)^3 = a^3 + b''$$

usw. Es wird daher, wenn $n$ der Exponent von $a$ ist, $(a+b)^n$ Element in $\mathfrak{b}$, also nilpotent. Durch Induktion folgt dasselbe für $n$ Summanden. $\mathfrak{c}$ ist also das gesuchte maximale Nilideal.

Damit $\mathfrak{c}$ das Radikal ist, haben wir noch zu zeigen, daß $\mathfrak{c}$ auch alle rechts- und linksseitigen Nilideale umfaßt. Es genügt den Beweis für die Rechtsideale zu führen. Wir beweisen, daß $\mathfrak{o}\mathfrak{r} = (\ldots x_i \mathfrak{r} \ldots)$ zweiseitiges Nilideal, wenn $\mathfrak{r}$ Rechtsnilideal.

$x_i r$ ist nilpotent, weil $r x_i$ nilpotent ist. Wir haben also noch zu zeigen, daß auch ein Element $\sum x_j r_j$ nilpotent ist. Dazu beweisen wir, daß das Vereinigungsideal $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ Nilideale, kein Idempotent enthält, woraus durch Induktion dasselbe für $n$ Summanden folgt. Da $\sum x_j r_j$ in der endlichen Summe $(\ldots x_j \mathfrak{r} \ldots)$ vorkommt, folgt dann aus der Voraussetzung, daß $(\ldots x_j \mathfrak{r} \ldots)$ Nilideal, also $\sum x_j r_j$ selbst nilpotent.

Es sei für $r_1$ aus $\mathfrak{r}_1$, $r_2$ aus $\mathfrak{r}_2$, $r_1 + r_2 = e$, $e$ idempotent. Dann ist auch $r_1 e + r_2 e = r_1' + r_2' = e$. Daraus folgt, daß $r_1' e = r_1'^2 + r_1' r_2' = r_1'$. Wenn $n$ der Exponent von $r_1'$ und $m$ der von $r_2'$, so folgt $r_1'^{n-1} r_2' = r_1'^{n-1} \to r_1'^{n-1} r_2'^{m} = 0 = r_1'^{n-1}$, also ein Widerspruch. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{o}\mathfrak{r}$ Nilideal.

Wenn wir noch zeigen, daß das zweiseitige Ideal $(\mathfrak{o}\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) \geq \mathfrak{r}$ Nilideal ist, ist alles bewiesen. Das folgt aber genau so, wie oben das Vereinigungsideal aller zweiseitigen Nilideale wieder ein Nilideal ist.

## § 4.

## Äquivalenz der Bedingung I mit der Existenz des Radikals und der vollständigen Reduzibilität des Restklassenringes nach dem Radikal.

Wir setzen von nun an für die zu untersuchenden Ringe die Bedingung I voraus (vgl. § 2).

Satz 9. *Ein Ring* $\mathfrak{o}$, *der* I *erfüllt, läßt sich als direkte Summe von Rechtsidealen darstellen*:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{s}, \tag{3}$$

*so daß die* $\mathfrak{r}_i$ *direkt unzerlegbar und minimal regulär, ferner* $\mathfrak{s}$ *Nilideal ist.*

Wir gehen, falls $\mathfrak{o}$ nicht selbst Nilideal, von einem minimal regulären Rechtsideal $\mathfrak{r}_1$ in $\mathfrak{o}$ aus, das es wegen I geben muß. Nach Satz 7 enthält es ein Idempotent $e_1$, so daß $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{o}$. Nach Hilfssatz 1 (einseitige Peircesche Zerlegung) existiert eine direkte Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}^{(1)}$. Suchen wir wieder, falls $\mathfrak{r}^{(1)}$ regulär, in der Menge der Unterideale von $\mathfrak{r}^{(1)}$ ein minimal reguläres $\mathfrak{r}_2$ auf, so bekommen wir eine Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}^{(2)}$ usw. Nach endlich vielen Schritten müssen wir wegen I auf ein $\mathfrak{r}^{(n)}$ kommen, das nicht mehr regulär, also Nilideal ist.

Nach Satz 8 und 7 besitzt jeder Ring, der I erfüllt, ein Radikal $\mathfrak{c}$. Aus der Zerlegung (3) des obigen Satzes und der Ringhomomorphie $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ folgt eine Zerlegung $\mathfrak{o}/\mathfrak{c} = \mathfrak{r}_1^* + \mathfrak{r}_2^* + \ldots + \mathfrak{r}_n^*$, wobei die $\mathfrak{r}_i^*$ einfach sind, da die $\mathfrak{r}_i$ minimal regulär sind (§ 6 Hilfssatz 4). *Es ist also* $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *ein vollständig reduzibler Ring ohne Nilideal.*

Wir beweisen nun die wichtige Umkehrung: *Ein Ring* $\mathfrak{o}$, *der ein Radikal* $\mathfrak{c}$ *besitzt und dessen Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, erfüllt* I, *die Bedingung* I *ist also mit der Forderung identisch, daß* $\mathfrak{o}$ *ein Radikal* $\mathfrak{c}$ *besitzt und daß* $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *vollständig reduzibel ist.*

Der Beweis verläuft folgendermaßen: Wir zeigen zuerst, daß jedes reguläre Rechtsideal ein minimal reguläres umfaßt. Wir können uns auf Rechtsideale $\mathfrak{r}$ beschränken, deren Restklassenideal $\mathfrak{r}^* = (\mathfrak{r}, \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$ einfach ist. Nach Hilfssatz 3 (§ 3) enthält $\mathfrak{r}$ ein Idempotent $e_1$, da ein beliebiges Element aus $\mathfrak{r}$, das in einer idempotenten Restklasse von $\mathfrak{r}^*$ liegt, die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt.

Es sei $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{o}$. Das zugehörige Restklassenideal ist wieder $\mathfrak{r}^*$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{r}_1$ minimal regulär ist. Es gebe ein $\mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}_1$, dessen Restklassenideal wieder $\mathfrak{r}^*$ ist. Dann enthält $\mathfrak{r}_2$ ebenso ein Idempotent $e_2$ und es gilt die einseitige Peircesche Zerlegung $\mathfrak{r}_1 = e_2\mathfrak{o} + \mathfrak{s}$. Es ist also $e_1 = e_2 e_1 + (e_1 - e_2 e_1) = e_2 e_1 + s$. Es gilt $s^2 = s$, denn wegen $e_1 e_2 = e_2$ wird $s^2 = (e_1 - e_2 e_1)(e_1 - e_2 e_1) = e_1 - e_2 e_1 - (e_1 e_2) e_1 + e_2 (e_1 e_2) e_1 = e_1 - e_2 e_1 - e_2 e_1 + e_2 e_1 = s$.

Wäre $s \neq 0$, so wäre $\mathfrak{s}$ regulär, also $\mathfrak{r}_1$ direkte Summe zweier regulärer Ideale, was unmöglich ist, da dann $\mathfrak{r}^*$ nicht einfach sein könnte. Wegen $s = 0$ ist $e_1 = e_2 e_1$, woraus $\mathfrak{r}_1 = e_1\mathfrak{o} = e_2 e_1\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{r}_2$ folgt, also $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$, jedes Rechtsideal von $\mathfrak{o}$ umfaßt also ein minimal reguläres.

Den zweiten Teil unserer Behauptung, daß nämlich jede Folge $\mathfrak{r}_1\mathfrak{o} \subset e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} \subset \ldots$, $e_i e_k = 0$ für $i < k$, $e_i^2 = e_i$, $e_i\mathfrak{o}$ minimal regulär, nach endlich vielen Gliedern abbricht, beweist man folgendermaßen: Es ist $[(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}), (\mathfrak{r}_k, \mathfrak{c})]$ Nilideal, denn aus einer Gleichung $r_i = r_k + c$, $r_i$ bzw. $r_k$ aus $\mathfrak{r}_i$ bzw. $\mathfrak{r}_k$, aber nicht im Radikal, folgt durch Multiplikation mit $e_i$ der Widerspruch $r_i = e_i c$, $e_i c$ im Radikal, also $[\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}, \mathfrak{r}_k/\mathfrak{c}] = 0$. (Wir verstehen dabei der Kürze halber unter $\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}$ das Ideal $(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$). Da $\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c} \neq 0$

und die Kette $\mathfrak{r}_1/\mathfrak{c} \subset \mathfrak{r}_1/\mathfrak{c} + \mathfrak{r}_2/\mathfrak{c} \subset \ldots$ wegen der Gültigkeit des Doppelkettensatzes in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ abbricht, folgt sofort die Behauptung.

Aus der nun bewiesenen Umkehrung folgt, daß wir in der Bedingung I auch wirklich die weiteste Voraussetzung haben, unter der wir Ringe mit einer den hyperkomplexen Systemen analogen Struktur bekommen. Erstens bildet in den folgenden Ableitungen der Strukturs̈ätze die Voraussetzung der Existenz des Radikals $\mathfrak{c}$ überall einen wesentlichen Bestandteil, zweitens tritt in der Formulierung des Hauptsatzes 15 die Existenz von $\mathfrak{c}$ und die vollständige Reduzibilität von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ auf, drittens ist ein Matrizenring in einem vollständig primären Ring (Hauptsatz 12) nur dann primär, wenn er ein Radikal besitzt und also auch $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ als Matrizenring in einem Körper vollständig reduzibel ist (nähere Ausführung unter Zusatz 2 in § 6).

Man könnte versuchen, die Bedingung I durch andere zu ersetzen, wir wollen sie mit zwei anderen vergleichen und dabei zwei Beispiele für Ringe, die dem Doppelkettensatz nicht genügen, anführen.

Diese zwei Bedingungen sind die *Minimalbedingung nur für die regulären Rechtsideale des Ringes* und die sogenannte *Durchschnittsminimalbedingung für die regulären Rechtsideale*, worunter wir folgendes verstehen: *Jede in bezug auf Durchschnittsbildung von Idealen abgeschlossene Menge* $\mathfrak{M}$ *von Rechtsidealen des Ringes, die mindestens ein reguläres Ideal enthält, enthält auch ein in* $\mathfrak{M}$ *minimal reguläres Ideal.*

Setzen wir eine Wohlordnung der Ideale des Ringes voraus, so ist, wie unschwer zu zeigen ist, diese Bedingung äquivalent mit dem Durchschnittsvielfachenkettensatz: *Jede wohlgeordnete Kette von regulären Rechtsidealen* $\mathfrak{r}_1 \supset \mathfrak{r}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{r}_\alpha \supset \mathfrak{r}_{\alpha+1} \supset \ldots$ *hat einen Durchschnitt, der ebenfalls reguläres Rechtsideal ist.*

Wir wollen uns über die Tragweite dieser Bedingungen unterrichten. Aus der Minimalbedingung für reguläre Rechtsideale und der Durchschnittsminimalbedingung folgt, daß I erfüllt ist. Daß jedes reguläre Rechtsideal ein minimal reguläres umfaßt, ist trivial, daß jede Kette $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 \subset \ldots, \mathfrak{r}_i$ minimal regulär, im Endlichen abbricht, sieht man folgendermaßen: Es gebe eine Kette, die nicht abbreche, $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \ldots$ sei das Vereinigungsideal abzählbar vieler $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, dann haben wir in der Kette $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \ldots \supset \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \ldots \supset \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_4 + \ldots \supset \ldots$ eine sowohl der Minimal- wie der Durchschnittsminimalbedingung widersprechende Kette.

Wir wollen noch zeigen, daß die Bedingung I, die Durchschnittsminimalbedingung und die Minimalbedingung für die regulären Rechtsideale verschieden stark sind, und zwar so, daß in der eben angegebenen Reihenfolge die stärkere der schwächeren folgt.

Daß die Minimalbedingung für die regulären Rechtsideale eine weitere Voraussetzung ist als die Minimalbedingung für beliebige Rechtsideale,

ieht man sofort an dem Beispiel eines vollständig primären (vgl. § 5) Ringes, mit einem Radikal, das der Minimalbedingung nicht genügt vgl. etwa das Beispiel aus § 2).

Das folgende Beispiel zeigt, daß es Ringe gibt, die die Durchschnittsminimalbedingung, nicht aber die Minimalbedingung für reguläre Rechtsideale erfüllen.

Wir haben in § 2 ein Beispiel für einen Ring $\mathfrak{R}$ gegeben, der nur nilpotente Elemente enthält, aber weder die Minimal- noch die Maximalbedingung für Rechtsideale erfüllt. $\mathfrak{R}$ ist aus den Elementen $r_i$ aufgebaut. Wir betrachten einen zu $\mathfrak{R}$ isomorphen Ring $\mathfrak{R}'$, der aus den Elementen $s_i$ aufgebaut sei. Es sei $r_i s_k = 0 = s_k r_i$ für alle $i$ und $k$. Schließlich nehmen wir noch zwei Idempotente $e_1$ und $e_2$ hinzu, für die die Relationen $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$, $e_1 r_i = r_i e_1 = r_i$, $e_1 s_i = s_i e_1 = 0$, $e_2 r_i = r_i e_2 = 0$, $e_2 s_i = s_i e_2 = s_i$ gelten sollen. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ und $e_1$, $e_2$ erzeugen, wenn wir noch $2x = 0$ für jedes Element verlangen, einen Ring $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ erfüllt die Durchschnittsminimalbedingung, weil entweder das minimal reguläre Rechtsideal $e_1 \mathfrak{S}$ oder $e_2 \mathfrak{S}$ von jedem regulären Rechtsideal umfaßt werden. Dagegen haben wir in der Folge von Rechtsidealen $(e_1\mathfrak{S}, s_1\mathfrak{S}) \supset (e_1\mathfrak{S}, s_1 s_2 \mathfrak{S}) \supset (e_1\mathfrak{S}, s_1 s_2 s_3 \mathfrak{S}) \supset \ldots$ eine der Minimalbedingung für reguläre Rechtsideale widersprechende Folge.

Schließlich geben wir ein Beispiel dafür, daß auch die Durchschnittsminimalbedingung stärker ist als I. Der Ring $\mathfrak{T}$ sei aufgebaut aus einem Idempotent $e$ und einer abzählbaren Menge von Elementen $c_i$. $\mathfrak{T}$ habe die Charakteristik 2, d. h. $2x = 0$ gelte für jedes Element aus $\mathfrak{T}$, die Multiplikation der Elemente sei durch folgende Relationen definiert: $c_i^2 = 0$, $c_i c_k = c_k c_i = 0$, $e c_i = 0$, $c_i e = c_i$. $\mathfrak{T}$ erfüllt I, da es das aus den $c_i$ aufgebaute Radikal besitzt und der Restklassenring nach dem Radikal aus einem einfachen Ideal besteht. Die Elemente $e + c_i$ sind idempotent. Die Rechtsideale $\mathfrak{r}_1 = \{(e+c_1)\mathfrak{T}, (e+c_2)\mathfrak{T}, \ldots\} \supset \mathfrak{r}_2 = \{(e+c_2)\mathfrak{T}, (e+c_3)\mathfrak{T}, \ldots\} \supset \ldots$ bilden eine Folge von regulären Rechtsidealen. Der Durchschnitt dieser Folge ist Null. Daß $\mathfrak{r}_{i-1} \supset \mathfrak{r}_i$ sieht man so ein: Sämtliche Elemente aus $\mathfrak{r}_i$ haben die Gestalt $n e + \sum_{k=1}^{n+2m} c_{j_k}$, wobei $n$ die Werte 0 oder 1 annehmen kann, $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet und die $j_k$ nur die Werte $j_k \geqq i$ durchlaufen. Also ist $e + c_{i-1}$ jedenfalls nicht in $\mathfrak{r}_i$ enthalten.

## § 5.

## Übertragung der Bedingung I auf Unterringe, die durch ein Idempotent erzeugt werden.

Satz 10. *Ist $e_i$ ein beliebiges Idempotent aus dem Ring $\mathfrak{o}$, der* I *erfüllt, und ist $\mathfrak{r}_i = e_i \mathfrak{o}$, $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{o} e_i$, dann gilt* I *auch im Ring $\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_i = e_i \mathfrak{o}^2 e_i$ $\mathfrak{A}_{ii}$ ist der durch $e_i$ „erzeugte" Unterring von $\mathfrak{o}$).*

Zum Beweise benötigen wir die sogenannte *Peircesche Zerlegung* von $\mathfrak{o}$ nach dem Idempotent $e_i$.

Wir bekommen sie sofort, wenn wir alle Elemente $x$ von $\mathfrak{o}$ zuerst nach der Gleichung $x = e_i x + (x - e_i x)$ von Hilfssatz 1, dann die beiden Summanden weiter nach der symmetrischen Gleichung $x = x e_i + (x - x e_i)$ zerlegen. Dadurch erhalten wir

$$(4) \qquad x = e_i x e_i + (e_i x - e_i x e_i) + (x e_i - e_i x e_i) + (x - e_i x - x e_i + e_i x e_i) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 .$$

Die Gesamtheit der Bestandteile $x_k$ aller $x$ aus $\mathfrak{o}$ bildet eine additive Gruppe $\mathfrak{m}_k$, also

$$(5) \qquad \mathfrak{o} = e_i \mathfrak{o} e_i + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_k = e_i \mathfrak{o} e_i + \mathfrak{m}.$$

Da ich die Zerlegung (4) sukzessive durch die Zerlegung von $x$ nach Hilfssatz 1 und die zu ihr symmetrische bekomme, folgt sofort, daß die Summe in (5) direkt ist, d. h. daß die $\mathfrak{m}_k$ keine Elemente gemeinsam haben. Man sieht weiter leicht ein, daß $e_i a e_i = 0$ für $a$ aus $\mathfrak{m}$.

Wir zeigen nun zuerst, daß wir verschiedenen Rechtsidealen $\mathfrak{r}'$ in $\mathfrak{A}_{ii}$ verschiedene Rechtsideale $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{o}$ zuordnen können, so daß einem regulären Ideal in $\mathfrak{A}_{ii}$ ein reguläres in $\mathfrak{o}$ entspricht.

Es ist $\mathfrak{A}_{ii} = e_i \mathfrak{o}^2 e_i = e_i \mathfrak{o} e_i$. Denn in $\mathfrak{o} e_i$ kommt $e_i$ vor, also $e_i \mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} e_i \geq e_i \mathfrak{o} e_i$. Einem Rechtsideal $\mathfrak{r}'$ in $e_i \mathfrak{o} e_i$ entspreche das Ideal $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}', \mathfrak{r}' \mathfrak{o})$ in $\mathfrak{o}$, dessen Elemente $r$ nach (5) die Zerlegung $r = e_i r e_i + r_2$ gestatten, $r_2$ in $\mathfrak{m}$. Wir zeigen, daß $e_i r e_i = r_1$ immer Element in $\mathfrak{r}'$ ist, so daß wir $\mathfrak{r}'$ aus $\mathfrak{r}$ zurückgewinnen können als $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{r}, e_i \mathfrak{o} e_i]$.

Wir brauchen dazu nur zu beweisen, daß die Komponente $r_1$ eines Elementes $r' a$, $r'$ aus $\mathfrak{r}'$, $a$ aus $\mathfrak{o}$, in $\mathfrak{r}'$ gelegen ist. Das folgt aber dann wenn ein Element $r' a$, $a$ aus $\mathfrak{m}$, die Komponente Null in $e_i \mathfrak{o} e_i$ hat. Nun ist $r' a = r' \cdot e_i a$. Wenn $r' a$ eine Komponente in $e_i \mathfrak{o} e_i$ hätte, müßte $r' a e_i \neq 0$ sein, also $r' e_i \cdot a e_i \neq 0$, $e_i a e_i$ ist aber nach der Bemerkung zu der Peirceschen Zerlegung Null.

Wir können also $\mathfrak{r}'$ aus $\mathfrak{r}$ zurückgewinnen, es entsprechen also verschiedenen $\mathfrak{r}'$ auch verschiedene $\mathfrak{r}$, und da $\mathfrak{r}$ regulär ist, wenn $\mathfrak{r}'$ regulär ist, auch verschiedenen regulären Rechtsidealen in $\mathfrak{A}_{ii}$ verschiedene reguläre in $\mathfrak{o}$.

Wir zeigen jetzt, daß jedes reguläre Rechtsideal in $\mathfrak{A}_{ii}$ ein minimal reguläres umfaßt. Dazu beweisen wir, daß bei der Zuordnung $\mathfrak{r}' \to \mathfrak{r}$ auch $\mathfrak{r}'$ regulär ist, wenn $\mathfrak{r}$ es ist. Da $\mathfrak{r}$ regulär ist, enthält es ein Idempotent $t$. Es sei $t = c + d$ die Zerlegung nach (5), $c$ in $e_i \mathfrak{o} e_i$, $d$ in $\mathfrak{m}$.

Es gilt, weil $\mathfrak{r} \leq e_i \mathfrak{o}$, $e_i d = d$. Daher ist $d^2 = e_i d e_i \cdot d = 0$. Ferner ist $(c+d)^2 = c^2 + cd + dc + d^2 = c^2 + d'$, $d'$ in $\mathfrak{m}$, weil $cd$ und $dc$ nach einer oben durchgeführten Überlegung die Komponente Null in $e_i \mathfrak{o} e_i$ haben. Da $(c+d)^2 = c^2 + d' = c + d$ und die Zerlegung (5) eine direkte Summenzerlegung ist, so ist $c^2 = c$, also $c$ Idempotent. Da ferner $(c+d) e_i = c$ ebenfalls in $\mathfrak{r}$ liegt und $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{r}]$ ist, so liegt $c$ auch in $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}'$ ist also regulär.

Ein beliebiges Rechtsideal $\mathfrak{r}'$ in $\mathfrak{A}_{ii}$ sei gegeben. Dann umfaßt das zugeordnete $\mathfrak{r}$ ein minimal reguläres Rechtsideal $\mathfrak{r}_1$ in $\mathfrak{o}$. Dieses enthält ein Idempotent, nach dem Obigen ist aber auch $\mathfrak{r}_1' = [\mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{r}_1]$ regulär, es ist $\mathfrak{r}_1' \leq \mathfrak{r}'$ und minimal regulär, denn es ist $\mathfrak{r}_1 \leq (\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_1' \mathfrak{o})$, also $\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_1' \mathfrak{o})$, und einem regulären $\mathfrak{r}_2' < \mathfrak{r}_1'$ würde ein reguläres $\mathfrak{r}_2 < \mathfrak{r}_1$ zugeordnet sein, was unmöglich ist.

Wenn wir noch zeigen, daß für $\mathfrak{s}_n' = e_1 \mathfrak{A}_{ii} + e_2 \mathfrak{A}_{ii} + \ldots + e_n \mathfrak{A}_{ii}$, $e_j \mathfrak{A}_{ii}$ minimal regulär in $\mathfrak{A}_{ii}$, $e_k e_l = 0$ für $k < l$ die Beziehung $\mathfrak{s}_n/\mathfrak{c} > \mathfrak{s}_{n-1}/\mathfrak{c}$ folgt, so ist die Übertragung von I auf $\mathfrak{A}_{ii}$ vollständig bewiesen, denn $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ erfüllt den Doppelkettensatz, die Kette $\mathfrak{s}_1/\mathfrak{c} < \mathfrak{s}_2/\mathfrak{c} < \ldots$ muß daher nach endlich vielen Gliedern abbrechen. Wir verstehen dabei der Kürze halber unter $\mathfrak{s}_n/\mathfrak{c}$ das Ideal $(\mathfrak{s}_n, \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$.

$\mathfrak{s}_n/\mathfrak{c} > \mathfrak{s}_{n-1}/\mathfrak{c}$ gilt, wenn wir die Unmöglichkeit von $(\mathfrak{s}_n, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{s}_{n-1}, \mathfrak{c})$ bewiesen haben. Es sei $(\mathfrak{s}_n, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{s}_{n-1}, \mathfrak{c})$. Dann ist auch $(\mathfrak{s}_n', \mathfrak{c}') = (\mathfrak{s}_{n-1}', \mathfrak{c}')$, da ja für jedes Ideal $\mathfrak{r}'$ aus $\mathfrak{A}_{ii}$ die Beziehung $\mathfrak{r}' = [(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}' \mathfrak{o}), \mathfrak{A}_{ii}]$ gilt, also auch $(\mathfrak{s}_n', \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}' = (\mathfrak{s}_{n-1}', \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}'$. Andererseits ist aber $(e_k \mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}' \neq 0$ und $[(e_k \mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}', (e_l \mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}'] = 0$, was genau so folgt wie beim Beweis der Umkehrung in § 4, also $(\mathfrak{s}_n', \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}' > (\mathfrak{s}_{n-1}', \mathfrak{c}')/\mathfrak{c}'$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Zuordnung $\mathfrak{r}' \to \mathfrak{r}$, bei der ja verschiedenen $\mathfrak{r}'$ auch verschiedene $\mathfrak{r}$ zugeordnet werden, nichts anderes bedeutet, als daß sich die Kompositionsreihen von $\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{A}_{ii}$ übertragen. Unter einer *Kompositionsreihe* von $\mathfrak{o}$ ist dabei eine geordnete Menge von Rechtsidealen zu verstehen, wobei von zwei beliebigen Idealen das eine echtes Oberideal oder Unterideal des anderen ist; die Ordnung wird durch die Bezeichnung Oberideal-Unterideal gegeben, ferner muß $\mathfrak{o}$ selbst und das Nullideal in der Menge vorkommen und es darf kein Ideal in $\mathfrak{o}$ geben, das zu der Menge hinzugefügt werden kann, so daß es zu jedem Ideal der Menge entweder Oberideal oder Unterideal ist. Ich bekomme also aus einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}$: $\ldots \mathfrak{r} > \ldots > \mathfrak{s} > \ldots > \mathfrak{t} > \ldots$ eine von $\mathfrak{A}_{ii}$ durch die Durchschnittsbildung $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{r}, \mathfrak{A}_{ii}]$, wenn ich nur die verschiedenen unter den $\mathfrak{r}'$ betrachte.

Wir definieren: *Ein Ring $\mathfrak{o}$ heißt primär, wenn er kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes reguläres zweiseitiges Ideal enthält.*

*Ein Ring* $\mathfrak{o}$ *heißt rechtsseitig vollständig primär, wenn er kein von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenes reguläres Rechtsideal enthält*[11]).

Der Zusatz „rechtsseitig" ist berechtigt, da folgendes Beispiel zeigt, daß ein Ring rechtsseitig vollständig primär sein kann, ohne es auch linksseitig zu sein:

Wir betrachten das hyperkomplexe System mit der Multiplikationstafel

| | $e$ | $u$ |
|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $u$ |
| $u$ | 0 | 0 |

in einem Körper $K$.

Das einzige Rechtsideal außer $\mathfrak{o}$ und $\{0\}$ ist $uK$, das Radikal des Ringes, während ein reguläres Linksideal, nämlich $eK$ existiert.

Satz 11. *Ist in einem Ring* $\mathfrak{o}$, *der* I *erfüllt,* $\mathfrak{r}_i = e_i\,\mathfrak{o}$ *direkt unzerlegbar, so ist* $\mathfrak{A}_{ii} = e_i\,\mathfrak{o}\,e_i$ *rechtsseitig vollständig primär.*

Denn wäre dies nicht der Fall, so enthielte $\mathfrak{A}_{ii}$ ein reguläres Rechtsideal $\mathfrak{r}_i' \subset \mathfrak{A}_{ii}$. $\mathfrak{r}_i$ ist ein minimales reguläres Ideal, was aus Satz 7 und Hilfssatz 1 folgt. Nach den Überlegungen zum Beweis von Satz 10 ist wegen $\mathfrak{r}_i = (\mathfrak{A}_{ii}, \mathfrak{A}_{ii}\,\mathfrak{o})$ das Ideal $(\mathfrak{r}_i', \mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{o}) \subset \mathfrak{r}_i$ und regulär, was unmöglich ist.

## § 6.

## Die Struktur der primären Ringe mit Haupteinheit.

Für Ringe mit Haupteinheit gelten die folgenden Tatsachen[12]):

a) Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$ eine direkte Summenzerlegung in Rechtsideale und dabei $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, $e_i$ in $\mathfrak{r}_i$, so ist $e_i \neq 0$, $e_i^2 = e_i$, $e_j e_k = 0$ für $i \neq k$ und $\mathfrak{r}_i = e_i\,\mathfrak{o}$.

b) Aus einer Rechtszerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n = e_1\,\mathfrak{o} + e_2\,\mathfrak{o} + \ldots + e_n\,\mathfrak{o}$ folgt eine Linkszerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \ldots + \mathfrak{l}_n = \mathfrak{o}\,e_1 + \mathfrak{o}\,e_2 + \ldots + \mathfrak{o}\,e_n$.

Wir gehen nun an den Beweis von

Hauptsatz 12. *Jeder primäre Ring* $\mathfrak{o}$, *der* I *erfüllt und eine Haupteinheit* $e$ *besitzt, ist ringisomorph einem Matrizenring in einem vollständig primären Ring* $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{o}$, *der mit dem Automorphismenring der direkt unzerlegbaren Rechtsideale von* $\mathfrak{o}$ *ringisomorph ist*[13]).

---

[11]) Diese Definitionen sind sinngemäße Erweiterungen der Definitionen, wie sie in A zu finden sind.

[12]) Vgl. $N_1$, S. 657.

[13]) Spezialfälle dieses Satzes sind bewiesen in A, S. 259, $N_1$, S. 666.

Nach Satz 9 hat $\mathfrak{o}$ eine Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{z}$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ minimal regulär sind. Nach a) hat jedes dieser Ideale, auch $\mathfrak{z}$, die Form $e_i\mathfrak{o}$, also ist $\mathfrak{z} = 0$. Wir bekommen also die Zerlegung $\mathfrak{o} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} + \ldots + e_n\mathfrak{o}$. Aus dieser Rechtszerlegung folgt nach b) die Linkszerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 + \ldots + \mathfrak{o}e_n = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \ldots + \mathfrak{l}_n$.

$\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i = \mathfrak{o}$, weil $\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i$ zweiseitiges Ideal, das das nicht nilpotente Element $e_i$ enthält und weil $\mathfrak{o}$ primär ist. Wir setzen $\mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_k$. Dann ist $\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n)(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \ldots + \mathfrak{l}_n) = (\ldots, \mathfrak{A}_{ik}, \ldots)$. Diese Summe ist direkt, weil aus $0 = \sum_{i,j} a_{ij}$, wegen $a_{ij} \subset \mathfrak{r}_i$, $\sum_j a_{ij} = 0$ folgt; weiter ist $a_{ij} = 0$, da $a_{ij} \subset \mathfrak{l}_j$.

Ferner gilt

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_j\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_i, \quad \text{also} \quad \mathfrak{A}_{ij} \neq \mathfrak{o}. \tag{6}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{j'k} = \begin{cases} \mathfrak{A}_{ik} & \text{für } j = j', \\ \mathfrak{o} & \text{für } j = j', \end{cases} \quad \text{weil} \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jk} = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_j\mathfrak{r}_j\mathfrak{l}_k = \mathfrak{r}_i\mathfrak{o}\mathfrak{l}_k = \mathfrak{A}_{ik}, \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{j'k} = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_{j'}\mathfrak{l}_k = \mathfrak{o}. \end{matrix} \tag{7}$$

Nach Satz 11 ist $\mathfrak{A}_{ii}$ vollständig primär. Wir zeigen, daß $\mathfrak{A}_{ii}$ isomorph dem Automorphismenring des Rechtsideales $\mathfrak{r}_i$ ist.

Es gibt mindestens ein $a_{ij}$ in $\mathfrak{A}_{ij}$, so daß $a_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i$. Denn ist $a_{ij}\mathfrak{r}_j \subset \mathfrak{r}_i$, so enthält es nur nilpotente Elemente und wäre nach Satz 8 im Radikal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{o}$ enthalten. Da $\mathfrak{r}_i = (\ldots, a_{ij}\mathfrak{r}_j, \ldots)$, wäre $\mathfrak{r}_i \leqq \mathfrak{c}$, wenn für alle $a_{ij}$ aus $\mathfrak{A}_{ij}$ $a_{ij}\mathfrak{r}_j \subset \mathfrak{r}_i$. Das ist aber unmöglich, denn $\mathfrak{r}_i$ enthält das Idempotent $e_i$. Es gibt also ein $a_{ij}$, so daß $a_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i$.

Durch $r_j \to a_{ij}r_j$ ist offenbar ein Operatorhomomorphismus $\mathfrak{r}_j \sim \mathfrak{r}_i$ gegeben. Wir zeigen, daß $\mathfrak{r}_j$ und $\mathfrak{r}_i$ sogar operatorisomoph sind.

Da $a_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i$, so gibt es ein $a_{ji}$ aus $\mathfrak{A}_{ji}$, so daß $a_{ij}a_{ji} = e_i$ ist, dann ist aber $a_{ij}a_{ji}\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i$ der identische Automorphismus von $\mathfrak{r}_i$, also $a_{ji}$ kein linker Nullteiler von $\mathfrak{r}_i$. Es ist $a_{ji}\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j' \leqq \mathfrak{r}_j$. Wenn wir noch das Gleichheitszeichen beweisen, ist die Operatorisomorphie von $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_j$ gezeigt.

Wenn $\mathfrak{r}_j' \subset \mathfrak{r}_j$, dann enthielte $\mathfrak{r}_j'$ nur nilpotente Elemente, also $\mathfrak{r}_j' \leqq \mathfrak{c}$, dann wäre aber auch, da $\mathfrak{c}$ zweiseitig ist, $a_{ij}\mathfrak{r}_j' = \mathfrak{r}_i \leqq \mathfrak{c}$, was widerspricht. Damit ist bewiesen, daß zwei beliebige Rechtsideale $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_j$ unserer Zerlegung operatorisomorph sind.

Wir zeigen weiter[14]), daß jeder Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{r}_j$ und $\mathfrak{r}_i$ durch Elemente aus $\mathfrak{A}_{ij}$ vermittelt werden kann. Wenn $e_j$ aus $\mathfrak{r}_j$ dem Element $a_{ij}$ aus $\mathfrak{r}_i$ zugeordnet ist, so folgt $e_j^2 \to a_{ij}e_j$, also $a_{ij} = a_{ij}e_j$, $a_{ij} \subset \mathfrak{A}_{ij}$, ferner für beliebiges $r_j$ aus $\mathfrak{r}_j$: $r_j = e_jr_j \to a_{ij}r_j$, q. e. d.

Dem Produkt zweier Elemente $a_{ij}$ und $a_{kl}$ aus $\mathfrak{A}_{ij}$ bzw. $\mathfrak{A}_{kl}$ entspricht das Produkt der durch sie vermittelten Homomorphismen und der Summe

[14]) Von hier ist der Beweis derselbe wie in $N_1$, S. 666.

die Summe. Insbesondere ist also $\mathfrak{A}_{ii}$ isomorph dem Automorphismenring[15]) von $\mathfrak{r}_i$. Denn verschiedene $a_{ij}$ aus $\mathfrak{A}_{ij}$ liefern verschiedene Homomorphismen, weil dabei $e_j$ in $a_{ij}$ übergeht und alle Homomorphismen werden durch Elemente aus $\mathfrak{A}_{ij}$ geliefert.

Da die $\mathfrak{r}_i$ isomorph sind, sind auch ihre Automorphismenringe ringisomorph. Die Angabe von Isomorphismen zwischen ihnen wird sich sofort aus den weiteren Konstruktionen ergeben.

Wir gehen nun zur Konstruktion der Matrizeneinheiten über. Wir wählen aus den Isomorphismen $\Gamma_{1i}$, die $\mathfrak{r}_i$ in $\mathfrak{r}_1$ überführen, $\Gamma_{1i}$, $i \neq 1$, beliebig, für $\Gamma_{11}$ den identischen Automorphismus. Zu jedem $\Gamma_{1i}$ gibt es das inverse $\Gamma_{i1}$. Ferner definieren wir $\Gamma_{ik} = \Gamma_{i1}\Gamma_{1k}$.

Diese Isomorphismen erfüllen die Relationen $\Gamma_{ij}\Gamma_{jk} = \Gamma_{ik}$. Daher auch die Elemente $c_{ik}$ aus $\mathfrak{A}_{ik}$, durch die die $\Gamma_{ik}$ vermittelt werden, da sich die $c_{ik}$ und $\Gamma_{ik}$ eineindeutig entsprechen. Nach (7) erfüllen die $c_{ik}$ die Relationen $c_{ij}c_{j'k} = c_{ik}$ für $j = j'$, $c_{ij}c_{j'k} = 0$ für $j \neq j'$. Insbesondere ist $c_{ii} = e_i$, da das zugeordnete $\Gamma_{ii}$ den identischen Automorphismus erzeugt. Damit haben wir ein System von Matrizeneinheiten gefunden.

Wir konstruieren nun einen mit $\mathfrak{A}_{ii}$ isomorphen, mit allen $c_{ik}$ vertauschbaren Ring $\mathfrak{t} \leqq \mathfrak{o}$. Wir bilden zu jedem Element $a_{11}$ aus $\mathfrak{A}_{11}$ sein konjugiertes $a_{ii} = c_{i1}a_{11}c_{1i}$ in $\mathfrak{A}_{ii}$. Das ist eine Ringisomorphie zwischen $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{A}_{ii}$, denn aus $a_{ii}$ bekommen wir $a_{11}$ wieder zurück: $c_{1i}a_{ii}c_{i1} = c_{1i}c_{i1}a_{11}c_{1i}c_{i1} = e_1 a_{11} e_1 = a_{11}$.

Wir bilden die Gesamtheit der Elemente $\alpha = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Diese Gesamtheit bildet einen Ring $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{A}_{ii}$. Beweis: Aus $\alpha = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, $\beta = b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}$ folgt $\alpha + \beta = (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn})$; $\alpha\beta = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{nn}b_{nn}$, also ist die Zuordnung $\alpha \to a_{ii}$ ein Isomorphismus. Ferner gilt: $c_{ik}\alpha = c_{ik}a_{kk} = c_{ik}c_{k1}a_{11}c_{1k} = c_{i1}a_{11}c_{1k}$; $\alpha c_{ik} = a_{ii}c_{ik} = c_{i1}a_{11}c_{1i}c_{ik} = c_{i1}a_{11}c_{1k}$, also jedes $\alpha$ mit allen $c_{ik}$ vertauschbar. Weiter folgt $c_{ik}\mathfrak{t} = c_{ik}\mathfrak{A}_{kk} = c_{ik}\mathfrak{r}_k\mathfrak{l}_k = \mathfrak{A}_{ik}$, $\mathfrak{o} = \sum_{i,k} c_{ik}\mathfrak{t}$.

Wenn man jedes Element von $\mathfrak{o}$ in der Form $\sum_{i,k} c_{ik}\alpha_{ik}$ darstellt und ihm die Matrix $(\alpha_{ik})$ zuordnet, so ist diese Zuordnung der im Satz behauptete Isomorphismus. Daß $\mathfrak{t}$ vollständig primär ist, folgt aus $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{A}_{ii}$.

Unser Satz wird vollständig bewiesen sein, wenn wir noch zeigen, daß $\mathfrak{A}_{ii}$, der Automorphismenring der Rechtsideale der *festen* Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$, die unseren Ableitungen zugrunde liegt, auch der Automorphismenring der Rechtsideale einer *beliebigen* Zerlegung in direkt unzerlegbare Rechtsideale ist. Das folgt aber unmittelbar aus

---

[15]) Unter „Automorphismen" wollen wir die Homomorphismen des Ideals $\mathfrak{r}_i$ mit sich selbst verstehen, unter „eigentlichen Automorphismen" die Isomorphismen.

Zusatz 1. *Zwei direkt unzerlegbare Rechtsideale* $\mathfrak{r}_i$ *und* $\mathfrak{r}_j'$ *aus rschiedenen Zerlegungen eines primären Ringes* $\mathfrak{o}$ *mit Einheitselement:* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \ldots + \mathfrak{l}_n$ *und* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2' + \ldots + \mathfrak{r}_{n'}'$ $= \mathfrak{l}_1' + \mathfrak{l}_2' + \ldots + \mathfrak{l}_{n'}'$ *sind operatorisomorph.*

Das beweist man durch Modifikation der Überlegung zum Beweise n Satz 12. Wir bezeichnen $\mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_j' = \mathfrak{A}_{ij}'$, $\mathfrak{r}_i' \mathfrak{l}_j = \mathfrak{A}_{ij}''$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{ij}' \mathfrak{r}_j' = \mathfrak{r}_i$. an schließt analog, daß es ein $a_{ij}'$ geben muß, so daß $a_{ij}' \mathfrak{r}_j' = \mathfrak{r}_i$. eiter beweist man analog, daß durch ein der Gleichung $a_{ij}' a_{ji}'' = e_i$ nügendes Element $a_{ji}''$ aus $\mathfrak{A}_{ji}''$ ein Operatorisomorphismus zwischen $\mathfrak{r}_i$ nd $\mathfrak{r}_j'$ vermittelt wird.

Wird Doppelkettensatz vorausgesetzt, so folgt dieses Resultat schon us Satz 3.

Zusatz 2. Der Beweis der Umkehrung von Satz 12 ist mir nur r den folgenden Fall gelungen: *Der Matrizenring* $\mathfrak{o}$ *n-ten Grades in nem rechtsseitig vollständig primären Ring* $\mathfrak{t}$ *mit Einheitselement, der e Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt, ist primär und erfüllt enfalls die Minimalbedingung für Rechtsideale.* $\mathfrak{t}$ *ist isomorph dem utomorphismenring der direkt unzerlegbaren Rechtsideale in* $\mathfrak{o}$.

Wir setzen $\mathfrak{r}_i = \sum_k c_{ik} \mathfrak{t}$. Dann ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n$. Wir zeigen erst unabhängig von jeder Kettenbedingung, daß die $\mathfrak{r}_i$ direkt unzerleg- ar sind, wenn nur $\mathfrak{t}$ rechtsseitig vollständig primär ist. Es sei $x = \sum_k c_{ik} \alpha_{ik}$ n Element aus $\mathfrak{r}_i$. Dann ist $x^n = \sum_k \alpha_{ii}^{n-1} \alpha_{ik} c_{ik}$. Wenn also $\alpha_{ii}$ nil- otent ist, so auch $x$. Ferner sieht man, wenn $x$ ein Rechtsideal $\mathfrak{r}_i' \leq \mathfrak{r}_i$ $\mathfrak{o}$ durchläuft, so bilden die Komponenten $\alpha_{ii}$ der $x$ ein Rechtsideal $\mathfrak{t}'$ $\mathfrak{t}$. Da $\mathfrak{t}$ vollständig primär ist, so gibt es für $\mathfrak{t}'$ nur die Möglich- eiten $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{t}'$ Nilideal. Ist $\mathfrak{t}'$ Nilideal, so ist auch $\mathfrak{r}_i'$ Nilideal, ist $= \mathfrak{t}$, so gibt es ein Element $x = c_{ii} + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} c_{ik}$ in $\mathfrak{r}_i'$, also liegt auch $c_{ii} = c_{ii}$ in $\mathfrak{r}_i'$, daher ist $\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i$.

Wäre nun $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i' + \mathfrak{r}_i''$ eine direkte Zerlegung, so sind $\mathfrak{r}_i'$ und $\mathfrak{r}_i''$ Nil- eale. Nun ist aber nach einer Überlegung im Beweise von Satz 8 in der umme zweier Rechtsnilideale kein Idempotent enthalten, $\mathfrak{r}_i$ enthält aber nes, also ein Widerspruch. Daher ist $\mathfrak{r}_i$ direkt unzerlegbar.

Wir betrachten zweiseitige Unterideale $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$. Wieder bilden die omponenten $\alpha_{ik}$ sämtlicher Elemente $x = \sum_{ik} \alpha_{ik} c_{ik}$ von $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges eal $\mathfrak{a}_{ik} \leq \mathfrak{t}$. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{o}$ primär ist, müssen wir beweisen, daß des zweiseitige Unterideal Nullideal ist. $\mathfrak{o}$ ist also dann und nur dann imär, wenn das alle echten zweiseitigen Unterideale von $\mathfrak{o}$ umfassende

Ideal $\bar{c}$, das aus allen Elementen $x = \sum_{ik} \alpha_{ik} c_{ik}$ besteht, $\alpha_{ik}$ beliebiges Ele ment aus dem Radikal c von t, Nilideal ist. Damit ist die Behauptun in § 4 bewiesen, daß ein Matrizenring endlichen Ranges in einem vollstän dig primären Ring nur dann primär ist, wenn er ein Radikal besitzt.

Um zu zeigen, daß o primär ist, können wir nicht so wie bei de einseitigen Idealen schließen, denn wenn auch die Komponentenideale $a_i$ Nilideale sind, so braucht deswegen a selbst nicht Nilideal zu sein.

Dagegen führt folgender Gedankengang, der allerdings die Minimal bedingung für die Rechtsideale von t voraussetzt, zum Ziel. Da alle $a_i$ Nilideale, so enthält a als direkte Summe der Nilideale $\sum_k a_{ik} c_{ik}$ jedenfall kein Idempotent. Es überträgt sich nun, wie wir gleich beweisen werden die Minimalbedingung für Rechtsideale von t auf o. Da ein Ring, der di Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt, auch I erfüllt, muß a ein Idem potent enthalten, da in Ringen, die I erfüllen, jedes reguläre Rechtsidea ein Idempotent enthält, also o primär.

Daß sich die Minimalbedingung überträgt (ebenso auch die Maximal bedingung), sieht man so ein[16]):

Es ist $\mathfrak{o} = \sum_{ik} c_{ik} t$. Die $c_{ik}$ seien in folgender Weise fortlaufend numeriert: $c_{11} = c_1$, $c_{12} = c_2$, ..., $c_{1n} = c_n$, $c_{21} = c_{n+1}$, ..., $c_{nn} = c_{n^2}$. Ein Element $x$ aus o heiße von der „Länge“ $i$, wenn es eine Darstellung $x = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \ldots + c_i t_i$ zuläßt, aber keine durch $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$. Jeden Rechtsideal r in o seien nun in folgender Weise $n^2$ Rechtsideale in t zu geordnet. Es sei $\mathfrak{R}_i$ das System aller Elemente in r, die die Länge haben. Das System $\mathfrak{r}_i$ aller Koeffizienten von $c_i$ in $\mathfrak{R}_i$ bildet, wenn ich noch die Null hinzunehme, ein Ideal in t, da wegen der Anordnung de $c_{ik}$ mit $x = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \ldots + c_i t_i$ auch jedes Element $x \cdot c_i t$, $t$ beliebi in t, in r vorkommt und die Länge $i$ hat und der $i$-te Koeffizient zu $t_i$ wird. Damit sind jedem Rechtsideal r $n^2$ Ideale $\mathfrak{r}_i$ in t zugeordnet. Is nun $\mathfrak{s} < \mathfrak{r}$, so gilt auch für mindestens eines der zugeordneten Ideale in die Beziehung $\mathfrak{s}_i < \mathfrak{r}_i$: Unter den Elementen von r muß es Elemente geben die nicht in $\mathfrak{s}$ vorkommen, also auch solche kleinster Länge $i$, z. B $r = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \ldots + c_i t_i$. Dann ist aber $\mathfrak{s}_i < \mathfrak{r}_i$. Denn käme de Koeffizient $t$ von $r$ auch in $\mathfrak{s}$ vor, so gäbe es ein von $r$ verschiedene Element $s$ mit demselben Koeffizienten $t_i$ auch in $\mathfrak{s}$, das nicht in vorkommende Element $r - s$ hätte eine kleinere Länge als $r$, also ei Widerspruch.

---

[16]) Der Beweis ist analog der Überlegung zum Beweise des Modulsatzes in N S. 34.

Erfüllt nun t die Minimalbedingung und ist $\mathfrak{r}^{(1)} \supset \mathfrak{r}^{(2)} \supset \ldots$ eine abeigende Kette von Rechtsidealen in o, so brechen die zugeordneten ketten $\mathfrak{r}_i^{(1)} \supset \mathfrak{r}_i^{(2)} \supset \ldots$ nach endlich viel Gliedern ab. Es gibt also einen beren Index $\mu$, so daß sämtliche folgenden $\mathfrak{r}_i^{(\mu+n)} = \mathfrak{r}_i^{(\mu)}$. Dann ist aber uch $\mathfrak{r}^{(\mu+n)} = \mathfrak{r}^{(\mu)}$, also erfüllt auch o die Minimalbedingung.

Für den Beweis von Zusatz 2 bleibt noch zu zeigen, daß t isomorph em Automorphismenring der unzerlegbaren Rechtsideale $\mathfrak{r}_i = \sum_k c_{ik}\mathfrak{t}$ ist. Nun füllt aber o die Voraussetzungen von Satz 12, wie wir gerade gezeigt aben, also ist der Automorphismenring isomorph $\mathfrak{A}_{ii}$, weiter $\mathfrak{A}_{ii} = [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{l}_i]$ $= c_{ii}\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}$, also die Umkehrung vollständig bewiesen.

Zusatz 3. o *sei ein primärer Ring, der* I *erfüllt und eine Haupteinheit besitzt. Die Matrizeneinheiten* $c_{ik}$ *und der Ring* $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{o}$ *einer Darstellung von* o *als Matrizenring n-ten Grades* $\mathfrak{o} = \sum_{ik} c_{ik}\mathfrak{t}$ *sind bis auf nen inneren Automorphismus von* o *eindeutig bestimmt*[17]).

Es sei $\mathfrak{o} = \sum_{ik} c'_{ik}\mathfrak{t}'$ eine andere Darstellung von o als Matrizenring '-ten Grades. Wir zeigen zuerst, daß $n' = n$. Nach den Überlegungen on Zusatz 2 sind die unzerlegbaren Rechtsideale $\mathfrak{r}_i = \sum_k c_{ik}\mathfrak{t}$, bzw. $= \sum_k c'_{ik}\mathfrak{t}'$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{r}'_2 + \ldots + \mathfrak{r}'_{n'}$.

Es gilt Hilfssatz 4: o *sei ein beliebiger* I *erfüllender Ring. Eine erlegung von* o *nach Satz 9 sei* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{s}$. *Dann ist* $\mathfrak{c} = \mathfrak{r}_1/\mathfrak{c} + \mathfrak{r}_2/\mathfrak{c} + \ldots + \mathfrak{r}_n/\mathfrak{c}$ *eine direkte Summenzerlegung von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *in nfache Rechtsideale.*

$\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}$ ist dabei hier und im folgenden eine Abkürzung für $(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$. ach dem zweiten Isomorphiesatz (§ 1) ist $(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c})/\mathfrak{c} \simeq \mathfrak{r}_i/[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$. Wäre nun /c also auch $\mathfrak{r}_i/[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$ nicht einfach, so hätte $\mathfrak{r}_i$ ein reguläres Unterideal, as unmöglich ist.

Nach diesem Hilfssatz sind also $\mathfrak{o}/\mathfrak{c} = \mathfrak{r}_1/\mathfrak{c} + \mathfrak{r}_2/\mathfrak{c} + \ldots + \mathfrak{r}_n/\mathfrak{c}$ $= \mathfrak{r}'_1/\mathfrak{c} + \mathfrak{r}'_2/\mathfrak{c} + \ldots + \mathfrak{r}'_{n'}/\mathfrak{c}$ zwei Zerlegungen von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ in einfache Rechtseale. $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ist ein vollständig reduzibler Ring mit Haupteinheit, für den ach Satz 3 $n = n'$ sein muß.

Durch die $c_{ik}$ ist o nach seiner Konstruktion im Beweise von Satz 12 ndeutig bestimmt. Wir zeigen, daß wir die $c_{ik}$ durch Transformation it einem Element $x$ aus o in die $c'_{ik}$ verwandeln können. Nach Zusatz 1 $\mathfrak{A}'_{11}\mathfrak{A}''_{11} = \mathfrak{A}_{11}$, also gibt es zwei Elemente $a$ und $b$ in $\mathfrak{A}'_{11}$ bzw. $\mathfrak{A}''_{11}$, so

[17]) Dieses Resultat für Ringe, die den Doppelkettensatz erfüllen, stammt von tin, vgl. A, S. 259.

daß $ab = c_{11}$ ist. Dann ist aber auch $ba = c'_{11}$. Denn $ba$ ist Idempotent in $\overline{\mathfrak{A}}_{11} = c'_{11}\mathfrak{o}\,c'_{11}$, $ba = \bar{e}$. Da $c'_{11}\mathfrak{o}$ minimal regulär ist, so ist $\bar{e}\mathfrak{o} = c'_{11}\mathfrak{o}$, also $\bar{e}c'_{11} = c'_{11} = \bar{e}$. Es sei nun $x = \sum_i c_{i1} a c'_{1i}$, $x^{-1} = \sum_i c'_{i1} b c_{1i}$. Dann ist $xx^{-1} = \sum_i c_{ii} = e$, ferner $x^{-1} c_{ik} x = c'_{ik}$.

## § 7.

## Die Struktur der allgemeinen Ringe.

Nach Zusatz 1 sind in primären Ringen mit Haupteinheit zwei beliebige unzerlegbare Rechtsideale operatorisomorph. Wir wollen nun untersuchen, wie die Verhältnisse bei allgemeinen, nicht mehr als primär vorausgesetzten Ringen sind und die verschiedenen Klassen von operatorisomorphen unzerlegbaren Rechtsidealen bestimmen.

$\mathfrak{o}$ sei also ein beliebiger, I erfüllender Ring. Aus Hilfssatz 4 folgt genau so wie bei Zusatz 3, daß für zwei verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{o}$ in direkt unzerlegbare $\mathfrak{r}_i$ bzw. $\mathfrak{r}'_i$

$$(8)\quad \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{z} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} + \ldots + e_n\mathfrak{o} + \mathfrak{z},$$

$$(9)\quad \mathfrak{o} = \mathfrak{r}'_1 + \mathfrak{r}'_2 + \ldots + \mathfrak{r}'_{n'} + \mathfrak{z}' = e'_1\mathfrak{o} + e'_2\mathfrak{o} + \ldots + e'_{n'}\mathfrak{o} + \mathfrak{z}'$$

$n = n'$ ist. $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ zerfällt eindeutig (vgl. § 2) in eine direkte Summe von zweiseitig einfachen Idealen:

$$(10)\qquad \mathfrak{o}/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1^* + \mathfrak{a}_2^* + \ldots + \mathfrak{a}_m^*.$$

Es gibt dann $m$ Klassen von operatorisomorphen einfachen Rechtsidealen in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, die durch je ein einfaches Rechtsideal aus jedem $\mathfrak{a}_i^*$ repräsentiert werden können.

Wir beweisen jetzt

Satz 13. *Zwei direkt unzerlegbare Rechtsideale* $\mathfrak{r}_i$ *und* $\mathfrak{r}'_j$ *zweier verschiedener oder gleicher Zerlegungen* (8) *und* (9) *sind operatorisomorph, wenn* $\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{r}'_j/\mathfrak{c}$ *es sind.*

$\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{r}'_j/\mathfrak{c}$ gehören, da sie operatorisomorph sind, einem zweiseitig einfachen $\mathfrak{a}_i^*$ aus (10) an. Bilden wir das umfassendste Ideal $\mathfrak{a}_i$, dessen Restklassenring $\mathfrak{a}_i^*$ ist, so gilt $\mathfrak{a}_i \geq \mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{a}_i \geq \mathfrak{r}'_j$. Es sei andererseits $\mathfrak{a}'_i$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{r}_i$ umfassenden zweiseitigen Ideale, ebenso $\mathfrak{a}''_i$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{r}'_j$ umfassenden. Dann ist $\mathfrak{a}'_i/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}''_i/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_i^*$, also

$$(11)\qquad \mathfrak{a}_i = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{c}_i) = (\mathfrak{a}''_i, \mathfrak{c}_i),$$

wenn $\mathfrak{c}_i = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{c}]$. $\mathfrak{a}'_i$ und $\mathfrak{a}''_i$ sind die durch $e_i$ bzw. $e'_j$ erzeugten zweiseitigen Ideale. Wenn wir also $\mathfrak{o}\,e_i = \mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{o}\,e'_j = \mathfrak{l}'_j$ setzen, so ist $\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i = \mathfrak{a}'_i$, $\mathfrak{l}'_j\mathfrak{r}'_j = \mathfrak{a}''_i$.

Es sei weiter $\mathfrak{A}'_{ij} = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}'_j$, $\mathfrak{A}''_{ji} = \mathfrak{r}'_j \mathfrak{l}_i$. Wir wollen die Gleichungen

$$\mathfrak{A}'_{ij}\mathfrak{r}'_j = \mathfrak{r}_i, \quad \mathfrak{A}''_{ji}\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}'_j \tag{12}$$

beweisen.

Es ist $\mathfrak{A}'_{ij}\mathfrak{r}'_j = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}'_j \mathfrak{r}'_j = \mathfrak{r}_i \mathfrak{a}''_i$. Wenn ich $\mathfrak{o}$ nach Satz 9 zerlege und mit $e'_j \mathfrak{o} = \bar{e}_1 \mathfrak{o}$ anfange und solange als möglich die $\bar{\mathfrak{r}}_k$ aus $\mathfrak{a}''_i$ nehme, so folgt daraus eine Zerlegung von $\mathfrak{a}''_i$ in unzerlegbare $\bar{\mathfrak{r}}_k$:

$$\mathfrak{a}''_i = \bar{e}_1 \mathfrak{o} + \bar{e}_2 \mathfrak{o} + \ldots + \bar{e}_p \mathfrak{o} + \bar{\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{r}}_1 + \bar{\mathfrak{r}}_2 + \ldots + \bar{\mathfrak{r}}_p + \bar{\mathfrak{t}}, \tag{13}$$

wobei $\bar{\mathfrak{t}}$ Nilideal. Dann hat wegen (11) jedes Element von $\mathfrak{r}_i$ die Gestalt $r_i = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \ldots + \bar{r}_p + c$, $c$ nilpotent. Nun bilden offenbar die Komponenten $\bar{r}_k$ sämtlicher $r_i$ ein Ideal $\bar{\mathfrak{r}}'_k \leqq \bar{\mathfrak{r}}_k$. Eines der Ideale $\bar{\mathfrak{r}}'_k$ muß regulär sein, da wegen $\mathfrak{r}_i \leqq (\bar{\mathfrak{r}}'_1, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}'_p, \mathfrak{c}_i)$ und der Existenz eines Radikals $\mathfrak{r}_i$ sonst Nilideal sein müßte. Also gilt, da die $\bar{\mathfrak{r}}_k$ minimal regulär sind, für ein $\bar{\mathfrak{r}}'_k$ die Gleichung $\bar{\mathfrak{r}}'_k = \bar{\mathfrak{r}}_k$. Da $\bar{\mathfrak{r}}_k$ minimal regulär, enthält es eine Linkseinheit $\bar{e}_k$ und es gibt eine einseitige Peircesche Zerlegung von $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i = \bar{\mathfrak{r}}_k + \mathfrak{r}'$, so daß $\bar{e}_k$ alle Elemente von $\mathfrak{r}'$ annulliert. Es gibt ferner ein Element $r_i$ in $\mathfrak{r}_i$ von der Form $r_i = \bar{e}_k + b$, $b$ aus $\mathfrak{r}'$. Dann ist $r_i \mathfrak{a}''_i$ regulär, da das Element $r_i \bar{e}_k = \bar{e}_k + b\bar{e}_k$ nicht nilpotent ist. Denn $\bar{e}_k b \bar{e}_k = 0$, also $(\bar{e}_k + b\bar{e}_k)^2 = \bar{e}_k + b\bar{e}_k$. Da $r_i \mathfrak{a}''_i$ regulär ist, ist es auch $\mathfrak{r}_i \mathfrak{a}''_i \leqq \mathfrak{r}_i$. $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}'_j$ sind aber, weil sie direkt unzerlegbar sind, minimal regulär, daher ist $\mathfrak{r}_i \mathfrak{a}''_i = \mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}'_j \mathfrak{a}'_i = \mathfrak{r}'_j$, also die Gleichungen (12) bewiesen.

Der weitere Beweis verläuft nun genau so wie bei Satz 12 und Zusatz 1. Es gibt ein $a'_{ij}$ in $\mathfrak{A}'_{ij}$, so daß

$$a'_{ij}\mathfrak{r}'_j = \mathfrak{r}_i \tag{14}$$

ist. Wenn $a'_{ij}\mathfrak{r}'_j \subset \mathfrak{r}_i$ wäre, so wäre $a'_{ij}\mathfrak{r}'_j$ Nilideal, weil $\mathfrak{r}_i$ minimal regulär ist. Aus der Existenz des Radikals folgt also, daß es mindestens ein $a'_{ij}$ gibt, für das das Gleichheitszeichen gilt. Die Operatorisomorphie zwischen $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}'_j$ wird durch ein $a''_{ji}$ aus $\mathfrak{A}''_{ji}$ vermittelt, wobei $a''_{ji}$ der Gleichung $a'_{ij}a''_{ji} = e_i$ genügt, die aus (14) folgt.

Umkehrung von Satz 13. *Wenn* $\mathfrak{r}_i$ *und* $\mathfrak{r}'_j$ *operatorisomorph sind, dann sind es auch* $\mathfrak{r}_i/\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{r}'_j/\mathfrak{c}$.

Es sei also $\mathfrak{r}_i \simeq \mathfrak{r}'_j$. Dann sind Elementen aus $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$ Elemente aus $[\mathfrak{r}'_j, \mathfrak{c}]$ zugeordnet, denn wäre $r_i \to c$, $c$ aber nicht $r_i$ aus dem Radikal, so wäre $r_i \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_i$ und $c\mathfrak{o} \subset \mathfrak{r}'_j$, wegen der Operatorisomorphie müßte aber $c\mathfrak{o} = \mathfrak{r}'_j$ sein. Also ist $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$ operatorisomorph $[\mathfrak{r}'_j, \mathfrak{c}]$, also auch $\mathfrak{r}_i/[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}] \simeq \mathfrak{r}'_j/[\mathfrak{r}'_j, \mathfrak{c}]$.

Es seien die Elemente $r_i$ aus $\mathfrak{r}_i$ ein System von Repräsentanten der Restklassen von $\mathfrak{r}_i/[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$ und die Elemente $r'_j$ die ihnen nach $\mathfrak{r}_i \simeq \mathfrak{r}'_j$ zu-

geordneten, die also ein Repräsentantensystem von $\mathfrak{r}_j'/[\mathfrak{r}_j', \mathfrak{c}]$ bilden. Dann wird durch die Zuordnung $r_i + \mathfrak{c} \to r_j' + \mathfrak{c}$ der gesuchte Operatorisomorphismus $(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c})/\mathfrak{c} \simeq (\mathfrak{r}_j', \mathfrak{c})/\mathfrak{c}$ geliefert, wie man aus der Idealisomorphie $(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c})/\mathfrak{c} \simeq \mathfrak{r}_i/[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{c}]$ (vgl. § 1) sofort folgert.

Aus Satz 13 und der Umkehrung folgt

Satz 14. *Es gibt in* $\mathfrak{o}$ *genau so viele Klassen von operatorisomorphen direkt unzerlegbaren regulären Rechtsidealen wie in* $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$.

$\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_i$ ist wiederum ringisomorph dem Automorphismenring der direkt unzerlegbaren $\mathfrak{r}_i$. Das sieht man genau so ein wie bei Satz 12. Die eigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{r}_i$, d. h. die Automorphismen, die einen Isomorphismus $\mathfrak{r}_i \simeq \mathfrak{r}_i$ erzeugen, bilden nach Hinzunahme der Null einen Körper, der isomorph ist zu $\mathfrak{A}_{ii}/\mathfrak{c}_{ii}$, wenn $\mathfrak{c}_{ii}$ das Radikal von $\mathfrak{A}_{ii}$ ist. Das folgt aus Satz 10 und 11.

Um die Struktur der allgemeinen Ringe vollständig angeben zu können, brauchen wir noch

Hilfssatz 5. *Wenn* $\mathfrak{o}$ *ein Ring mit Haupteinheit ist, der* I *erfüllt, und wenn* $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *zweiseitig einfach ist, dann ist* $\mathfrak{o}$ *primär.*

Es gebe ein zweiseitiges reguläres Ideal $\mathfrak{a} < \mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{c} = \mathfrak{o}/\mathfrak{c}$. Daher gibt es wegen Hilfssatz 4 eine Zerlegung von $\mathfrak{o}$ nach Satz 9 derart, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{t}$ ist und $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n + \mathfrak{s}$. Wir bekommen diese Zerlegung wiederum so, daß wir $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ usw. solange als möglich aus $\mathfrak{a}$ wählen. Da $\mathfrak{o}$ eine Haupteinheit enthält, ist nach § 6 das Nilideal $\mathfrak{s} = 0$, also auch $\mathfrak{t} = 0$, daher $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

Wir gehen nun an den Beweis von

Hauptsatz 15[18]). $\mathfrak{o}$ *sei ein Ring, der* I *erfüllt. Es sei*

$$\mathfrak{o}/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1^* + \mathfrak{a}_2^* + \ldots + \mathfrak{a}_s^*. \tag{15}$$

*Dann läßt sich* $\mathfrak{o}$ *darstellen als* $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathfrak{o} m_i + \mathfrak{n}$. *Diese Summe ist direkt, die* $m_i \mathfrak{o} m_i$ *sind primäre Ringe mit der Haupteinheit* $m_i$ *und dem Radikal* $\mathfrak{c}_i = [m_i \mathfrak{o} m_i, \mathfrak{c}]$, $\mathfrak{n}$ *ist eine additive Gruppe von Elementen,* $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{c}$.

Zum Beweise konstruieren wir uns zuerst ein *ausgezeichnetes Idempotent* mit folgenden Eigenschaften: $e = \sum_i e_i$, die $e_i$ sind Linkseinheiten direkt unzerlegbarer Rechtsideale und erfüllen die Relationen

$$e_i e_k = e_k e_i = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k, \; e_i^2 = e_i. \tag{16}$$

Ferner ist $\mathfrak{o} = e\mathfrak{o} + \mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}' \leq \mathfrak{c}$.

---

[18]) Dieser Satz ist für hyperkomplexe Systeme z. B. in D, S. 130 zu finden.

Dieses Idempotent bekommen wir genau so, wie im Beweis von Satz 4 die Haupteinheit des Ringes, der I erfüllt und kein Nilideal enthält, so daß wir den Beweis übergehen können. Es sei nur darauf hingewiesen, daß das Verfahren, zu einem Idempotent $e' = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$ noch ein dazu orthogonales hinzuzufügen, erst dann ein Ende hat, wenn das von $e'$ bei der Zerlegung von Hilfssatz 1 annullierte Ideal ein Nilideal ist, so daß unser so konstruiertes Idempotent tatsächlich ein ausgezeichnetes ist.

Die mit diesem ausgezeichneten Idempotent $e$ konstruierte Zerlegung von $\mathfrak{o}$ sei:

$$(17) \qquad \mathfrak{o} = e_1^{(1)}\mathfrak{o} + \ldots + e_{n_1}^{(1)}\mathfrak{o} + e_1^{(2)}\mathfrak{o} + \ldots + e_1^{(s)}\mathfrak{o} + \ldots + e_{n_s}^{(s)}\mathfrak{o} + \mathfrak{z},$$

wobei $\sum_{i=1}^{n_p} e_i^{(p)}\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ das zweiseitig einfache Restklassenideal $\mathfrak{a}_p^*$ liefert. Wir setzen $m_i = e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{n_i}^{(i)}$.

Wir wollen nun zeigen, daß $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i$ ein primärer Ring mit der Haupteinheit $m_i$ und dem Radikal $\mathfrak{c}_i = [m_i\,\mathfrak{o}\,m_i, \mathfrak{c}]$ ist.

Nach Satz 10 erfüllt $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i$ die Bedingung I, besitzt also ein Radikal $\mathfrak{c}_i$. Jedenfalls ist $\mathfrak{c}_i \geq [m_i\,\mathfrak{o}\,m_i, \mathfrak{c}]$. Wäre $\mathfrak{c}_i > [m_i\,\mathfrak{o}\,m_i, \mathfrak{c}]$, so gäbe es ein Nilideal $\mathfrak{z}'$ in $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i$, das nicht in $[m_i\,\mathfrak{o}\,m_i, \mathfrak{c}]$ liegt. Dann ist aber das Ideal $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}', \mathfrak{z}'\mathfrak{o})$ nach der Zuordnung von Satz 10 ebenfalls Nilideal und es wäre $\mathfrak{z}$ ein nicht im Radikal liegendes Nilideal, was unmöglich ist.

Wir zeigen nun, daß $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i/\mathfrak{c}_i$ ringisomorph mit $\mathfrak{a}_i^*$ ist. Haben wir das bewiesen, so folgt aus Hilfssatz 5, weil $\mathfrak{a}_i^*$ zweiseitig einfach ist, daß $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i$ primär ist.

Es sei $\mathfrak{a}_i$ das umfassendste Ideal in $\mathfrak{o}$, dessen Restklassenideal $\mathfrak{a}_i^*$ ist. Jedes Element $a$ aus $\mathfrak{a}_i$ läßt sich darstellen als

$$(18) \qquad a = m_i a\, m_i + c_i,$$

$c_i$ im Radikal $\mathfrak{c}$. Das beweisen wir so: Es gilt die Peircesche Zerlegung (vgl. § 5) $a = m_i a\, m_i + a_2 + a_3 + a_4$, wobei $m_i a_2 = 0$, $a_3 m_i = 0$, $a_4 m_i = m_i a_4 = 0$. Weiter ist $\mathfrak{a} = e_1^{(i)}\mathfrak{o} + e_2^{(i)}\mathfrak{o} + \ldots + e_{n_i}^{(i)}\mathfrak{o} + \mathfrak{z}_i = m_i\mathfrak{o} + \mathfrak{z}_i$, $\mathfrak{z}_i$ Nilideal. $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_i^*$ hat die Haupteinheit $m_i + \mathfrak{c}$. Die Restklasse eines von $m_i$ rechts oder links annullierten Elementes ist also die Nullklasse, daher liegen $a_2$, $a_3$ und $a_4$ im Radikal, also ist (18) bewiesen.

Daraus folgt nun die Ringisomorphie zwischen $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i/\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{a}_i^*$ in folgender Weise: Wenn $a$ und $b$ aus $\mathfrak{a}_i$ verschiedene Restklassen in $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ erzeugen, so auch $m_i a\, m_i$ und $m_i b\, m_i$ in $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i/\mathfrak{c}_i$ und umgekehrt. Denn wenn die Differenz $a - b$ in $\mathfrak{c}$ liegt, so liegt $m_i a\, m_i - m_i b\, m_i$ in $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i/\mathfrak{c}_i$ wegen der Gleichung (18) und weil $\mathfrak{c}_i = [m_i\,\mathfrak{o}\,m_i, \mathfrak{c}]$. Ordne ich also die aus $a$ bzw. $m_i a\, m_i$ in $\mathfrak{a}_i^*$ bzw. $m_i\,\mathfrak{o}\,m_i/\mathfrak{c}_i$ entstehenden Restklassen einander zu, so bekomme ich den gesuchten Ringisomorphismus.

Da $\mathfrak{o} = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$, so folgt aus (18) für jedes Element $r$ aus $\mathfrak{o}$ eine Darstellung

$$r = \sum_i m_i r m_i + c. \tag{19}$$

Nun gilt aber auch die Peircesche Zerlegung

$$r = e r e + r_1 = \sum_{i,k} m_i r m_k + r_1. \tag{20}$$

Es ist $[m_i \mathfrak{o} m_k, m_p \mathfrak{o} m_q] = 0$, sobald entweder $i \neq p$ oder $k \neq q$. Denn es sei $0 = m_i a m_k + m_i b m_q$. Multipliziere ich mit $m_q$ von rechts, so folgt $m_i b m_q = 0$, also auch $m_i a m_k = 0$. Die Peircesche Zerlegung ist weiter eine direkte Summenzerlegung, also ist, da (19) und (20) übereinstimmen müssen, (19) eine eindeutige Darstellung, wobei $c = \sum_{i \neq k} m_i r m_k + r_1$.

Die Gesamtheit $\mathfrak{n}$ aller $c$ bildet eine additive Gruppe, weil die $r_1$ (vgl. § 5) und die $m_i r m_k$ je eine bilden. Damit ist der Hauptsatz in allen Teilen bewiesen.

(Eingegangen am 21. Dezember 1928.)

# Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen.

Von

Arnold Scholz in Berlin.

In meiner Arbeit „Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe“ [1]) stellte ich bei der Untersuchung der Struktur metabelscher Gruppen einen besonderen Typus, die metabelsche Dispositionsgruppe $\mathfrak{G}$, in den Vordergrund. Sie war so definiert, daß sie eine Abelsche Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ von vorgeschriebener Struktur besaß, während $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe sein sollte, die das direkte Produkt von ebensoviel konjugierten zyklischen Gruppen $\{A\}^S$ $(S < \mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ ist, als $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ Elemente besitzt. Diese Dispositionsgruppe besitzt die Eigentümlichkeit, daß ihre Struktur schon durch die Struktur von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und $\{A\}$ bestimmt ist. Dasselbe gilt nun auch für die entsprechende Zusammensetzung zweier beliebiger Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, in dem Sinne, daß $\mathfrak{S}$ die hervorgehobene Faktorgruppe wird, während $\mathfrak{T}$ die Rolle von $\{A\}$ spielt. Der allgemeine Beweis, der hier gegeben wird, liefert zugleich eine wesentliche Vereinfachung des Beweises für den Spezialfall der Dispositionsgruppe, den ich in der oben zitierten Arbeit gegeben habe.

Wir beweisen also den

Satz. *Aus zwei abstrakt gegebenen Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ der Ordnungen $m$ und $n$ kann man eine Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ folgendermaßen zusammensetzen: $\mathfrak{G}$ besitze eine invariante Untergruppe $\mathfrak{T}^m$, die das direkte Produkt von $m$ Gruppen $\mathfrak{T}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ der gleichen Struktur wie $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{S}$ sei selbst die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}^m$ und $\bar{\mathfrak{S}} = \sum \bar{S}_\mu$ ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{S}$ (vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{T}^m$) in $\mathfrak{G}$. Dann werde $\mathfrak{T}_1$ durch $\bar{S}_\mu$ in $\mathfrak{T}_\mu$ transformiert: $\mathfrak{T}_\mu = \mathfrak{T}_1^{\bar{S}_\mu} = \bar{S}_\mu^{-1} \mathfrak{T}_1 \bar{S}_\mu$. (Wir schreiben daher für $\mathfrak{T}^m$ lieber $\mathfrak{T}^{\mathfrak{S}} = \prod_{S < \mathfrak{S}} \mathfrak{T}_1^S = \prod_{\bar{S} < \bar{\mathfrak{S}}} \mathfrak{T}_1^{\bar{S}}$). Es gilt dann:*

*Die Struktur von $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ ist durch die Struktur von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ eindeutig bestimmt.*

[1]) Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 332–356.

In körpertheoretischer Einkleidung bedeutet der Satz:

*Hat man über einem Körper $K_0$ einen relativ-normalen Körper $K_1$ mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{S}$ und über $K_1$ wieder einen relativ-normalen Körper $K_2$ mit der Gruppe $\mathfrak{T}$; ist aber $K_2$ nicht Normalkörper über $K_0$, sondern sind im Gegenteil alle konjugierten $K_2^S$ $(S < \mathfrak{S})$ voneinander verschieden und sogar voneinander unabhängige Erweiterungen des Körpers $K_1$, so ist die Struktur der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ von $K_2/K_0$ (von $\prod K_2^S/K_0$) eindeutig durch die Struktur der Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ von $K_1/K_0$ und $K_2/K_1$ bestimmt.*

Bevor wir zum eigentlichen Beweis übergehen, sei bemerkt, daß man für beliebiges $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ überhaupt eine Gruppe $\mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ bilden kann. Man kann folgendes Kompositionsgesetz aufstellen:

$$\bar{S}_\varkappa T \cdot \bar{S}_\lambda T' = \bar{S}_\varrho T^{\bar{S}_\lambda} T', \tag{1}$$

wenn in $\mathfrak{S}$ gilt:

$$S_\varkappa S_\lambda = S_\varrho$$

und $T, T'$ Elemente aus $\mathfrak{T}^{\mathfrak{S}}$ sind, für die ja die Komposition unter sich und die Transformation mit den $\bar{S}_\mu$ bekannt ist.

Die Repräsentanten $\bar{S}_\mu$ bilden hier für sich eine Gruppe: $\bar{S}_\varkappa \bar{S}_\lambda = \bar{S}_\varrho$.

Die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ verifiziert man leicht.

Im allgemeinen wird bei einem Kompositionsgesetz für $\mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ auf der rechten Seite von (1) ein Faktor aus $\mathfrak{T}^{\mathfrak{S}}$ hinzutreten, der nur von $\bar{S}_\varkappa$ und $\bar{S}_\lambda$ abhängt[2]). Es sei in diesem Fall

$$\bar{S}_\varkappa \bar{S}_\lambda = T_{\varkappa\lambda} \bar{S}_\varrho; \quad T_{\varkappa\lambda} = \prod_{\mu=1}^{m} T_{\varkappa\lambda\mu}^{\bar{S}_\mu}; \quad T_{\varkappa\lambda\mu} < \mathfrak{T}_1. \tag{2}$$

Es wird behauptet, daß die $T_{\varkappa\lambda}$ nur von der Auswahl der $\bar{S}_\mu$ abhängen, daß man also die Repräsentanten $\bar{S}_\mu$ so auswählen kann, daß sie eine Gruppe für sich bilden, und zwar, indem man die ursprünglichen $\bar{S}_\mu$, für die (2) gilt, ersetzt durch:

$$\hat{S}_u = \prod_{\lambda=1}^{m} T_{\lambda\mu 1}^{-\bar{S}_\lambda} \cdot \bar{S}_\mu. \tag{3}$$

Dies bleibt nur zu zeigen, um unseren Satz zu beweisen.

Zu diesem Zweck stellen wir $\mathfrak{S} \# \mathfrak{T}$ als Permutationsgruppe in $mn$ Symbolen dar. Dies kann so geschehen:

Man bilde zuerst die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$, eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_0$ in $r = mn^m$ Symbolen: $x_1, \ldots, x_r$. Der Gruppe

$$\mathfrak{T}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \times \ldots \times \mathfrak{T}_m$$

[2]) Vgl. O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen I. Monatsh. f. Math. u. Phys. **34** (1926), S. 165–180. Normalform in § 1. (Die umgekehrte Anordnung $T_{\varkappa\lambda} \bar{S}_\varrho$ in (2) wählte ich hier, um den folgenden Beweis einfacher zu gestalten.)

entspricht eine Untergruppe $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{P}_0$, der Untergruppe

$$\prod_{S \neq E}^{S} \mathfrak{T}_1^S = \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_3 \times \ldots \times \mathfrak{T}_m$$

eine Untergruppe $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{P}_1$. Es seien nun $K_0, K_1, K_2$ die Körper derjenigen rationalen Funktionen von $x_1, \ldots, x_r$, die bei allen Permutationen aus $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ungeändert bleiben; sie haben dann offenbar die in der obigen körpertheoretischen Auslegung des Satzes genannte Bedeutung.

Sei nun $K_2 = K_0(y)$, d. h. $y$ eine $K_2$ erzeugende Größe, wenn man $K_0$ als Grundkörper nimmt. Durch Anwendung der Substitutionen $T_\nu < \mathfrak{T}_1$ gelangt man zu den Konjugierten $y^{T_\nu}$ von $y$ in bezug auf $K_1$. Weiter gelangt man durch Anwendung eines Repräsentantensystems für $\mathfrak{S}$: $\bar{S}_1 = E, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_m$ auf die $y^{T_\nu}$ zu sämtlichen Konjugierten in bezug auf $K_0$:

$$\begin{array}{llll} y, & y^{T_2}, & \ldots, & y^{T_n} \\ y^{\bar{S}_2}, & y^{T_1 \bar{S}_2}, & \ldots, & y^{T_n \bar{S}_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{\bar{S}_m}, & y^{T_2 \bar{S}_m}, & \ldots, & y^{T_n \bar{S}_m}. \end{array}$$

Dabei gehören die Konjugierten der $\mu$-ten Zeile dem Körper $K_2^{S_\mu}$ an und werden durch die $T_\nu^{\bar{S}_\mu}$ untereinander permutiert, während alle anderen Zeilen bei den $T_\nu^{\bar{S}_\mu}$ elementweise ungeändert bleiben. Diese Permutationen in den einzelnen Zeilen liefern, unabhängig kombiniert, die Gruppe $\mathfrak{T}^{\mathfrak{S}}$.

Diese Unabhängigkeit hat zur Folge, daß man die *Repräsentanten* für die $S_\mu$ *als Vertikalpermutationen* (solche, die die Spalten in sich überführen) wählen kann, so daß sie dann *wirklich eine Gruppe bilden.* Die Vertikalpermutationen erhält man dadurch, daß man die zunächst gewählten Repräsentanten $\bar{S}_\mu$ durch die oben definierten $\hat{S}_\mu = \prod_{\lambda=1}^{m} T_{\lambda\mu 1}^{-\bar{S}_\lambda} \cdot \bar{S}_\mu$ ersetzt:

Ist $\bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu = T_{\lambda\mu} \bar{S}_\varrho$, so wird ein Symbol der $\lambda$-ten Zeile durch $\bar{S}_\mu$ in $y^{T \bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu} = y^{T T_{\lambda\mu} \bar{S}_\varrho}$ übergeführt.

Ersetzt man allgemein $\bar{S}_\mu$ durch $\hat{S}_\mu$, so bleibt:

$$(y^T)^{\hat{S}_\mu} = (y^T)^{\bar{S}_\mu}, \quad \text{da } T_{1\mu 1} = E.$$

Dagegen wird:

$$(y^{T \bar{S}_\lambda})^{\hat{S}_\mu} = (y^{T \bar{S}_\lambda})^{T_{\lambda\mu 1}^{-\bar{S}_\lambda} \bar{S}_\mu} = y^{T T_{\lambda\mu 1}^{-1} \bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu} = y^{T \bar{S}_\varrho}.$$

(Aus den zu $\bar{S}_\mu$ hinzuzufügenden $\mathfrak{T}$-Faktoren braucht hier nur die $\mathfrak{T}_1$-Komponente gewertet zu werden, da sie allein eine Permutation auf $y^{T \bar{S}_\lambda}$ ausübt.)

$\hat{S}_\mu$ bewirkt also tatsächlich eine Vertikalpermutation.

(Eingegangen am 27. März 1929.)

# Über die Nullstellen der Dedekindschen Zetafunktionen.

Von

Zyoiti Suetuna in Göttingen.

---

Mein Ziel ist, den folgenden Satz zu beweisen:

*Es sei $k$ ein algebraischer Zahlkörper und $K$ ein relativ Galoisscher Oberkörper von $k$. $\sigma_0$ sei eine feste Zahl zwischen $\frac{1}{2}$ (einschließlich) und 1 (ausschließlich). Wir nehmen an:*

$$\zeta_K(s) \neq 0 \quad \textit{für} \quad \Re(s) = \sigma > \sigma_0.$$

*Dann behaupte ich:*

$$\zeta_k(s) \neq 0 \quad \textit{auch für} \quad \sigma > \sigma_0\ ^{1}).$$

In der Tat sei $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von $K$ über $k$ und $\mathfrak{H}$ irgendeine zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$. $\Omega$ bezeichne den zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Unterkörper von $K$.

Weil nun $\mathfrak{H}$ eine zyklische Gruppe ist, so ist $K$ der Klassenkörper über $\Omega$, im Sinn von Takagi, mit der Gruppe $\mathfrak{H}$. Durch den sogenannten Führer ist hiermit eine Klasseneinteilung der Ideale von $\Omega$ bestimmt und $\mathfrak{H}$ ist die Gruppe dieser Idealklassen. Wenn man mit $m = m(\mathfrak{H})$ die Ordnung von $\mathfrak{H}$ und mit $\psi_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ die $m$ (eigentlichen) Charaktere dieser Idealklassengruppe bezeichnet, so ist

$$\zeta_K(s) = \prod_{j=1}^{m} L(s, \psi_j),$$

wo $L(s, \psi_j)$ gewöhnliche $L$-Reihen des Körpers $\Omega$ bedeuten. Wenn $\psi_1$ der Hauptcharakter ist, dann ist $L(s, \psi_1)$ natürlich die Zetafunktion von $\Omega$.

---

[1]) Vgl. Z. Suetuna, Bemerkung zu meiner Arbeit: Über die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie [Journal Fac. Sci. Tokyo, Section I, 1 (11) (1928), S. 435–437].

Wenn wir also annehmen, daß $\zeta_K(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$ ist, dann sind alle $L(s, \psi_j)$ mit $j > 1$ regulär und $\neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$; und dies gilt für alle zyklischen Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$.

Nun sei $r$ die Anzahl der Klassen äquivalenter Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\chi^i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ ein einfacher Frobeniusscher Charakter von $\mathfrak{G}$. $\chi^1$ bezeichne auch den Hauptcharakter. Ferner sei $L(s, \chi^i)$ die Artinsche $L$-Reihe des Körpers $k$ in bezug auf $K$ [2]).

Alsdann hat Artin gezeigt (A. L. S. 102—104): Für $i > 1$ läßt sich die Funktion $L(s, \chi^i)$ immer darstellen als Produkt rationalzahliger Potenzen der Funktionen $L(s, \psi_j)$ für die zyklischen Untergruppen $\mathfrak{H}$, und zwar mit $j > 1$.

Wenn also $\zeta_K(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$ ist, sind alle $L(s, \chi^i)$ mit $i > 1$ regulär und $\neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$.

Andererseits ist (A. L. S. 96)

$$\zeta_K(s) = \prod_{i=1}^{r} (L(s, \chi^i))^{f_i},$$

wo $f_i$ den Wert von $\chi^i$ für das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ bedeutet; also ist $f_i$ sicherlich eine positive, ganze rationale Zahl.

Aus der Annahme, daß $\zeta_K(s) \neq 0$ für $\sigma > \sigma_0$ ist, ergibt sich hiermit

$$L(s, \chi^1) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > \sigma_0.$$

Wegen $\zeta_k(s) = L(s, \chi^1)$ ist somit unsere Behauptung erledigt.

Göttingen, den 15. Mai 1929.

---

[2]) E. Artin, Über eine neue Art von $L$-Reihen [Hamburger Abhandlungen **3** (1923), S. 89—108]. (Zitiert als A. L.) Vgl. hierzu E. Artin, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes [Hamburger Abhandlungen **5** (1927), S. 353—363].

(Eingegangen am 17. Mai 1929.)

# Über projektive Übertragungen und Ableitungen.

Von

J. A. Schouten in Delft und St. Gołąb in Kraków.

## Einleitung.

Bekanntlich gelangt man, ausgehend von einer affinen Übertragung, zu einer Verallgemeinerung der projektiven Differentialgeometrie, indem man die Parameter $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ der Gruppe aller bahntreuen Transformationen unterwirft. Diese Gruppe ist gegeben durch die zuerst von Weyl angegebene Formel:

$$'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + p_{\lambda} A^{\nu}_{\mu} + p_{\mu} A^{\nu}_{\lambda},$$ [1])

wo $p_{\lambda}$ ein beliebiger Vektor ist, und die entstehende Geometrie unterscheidet sich von der gewöhnlichen euklidischen durch das Auftreten einer, im allgemeinen nicht verschwindenden Projektivkrümmungsgröße $P_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$, deren Entdeckung ebenfalls auf Weyl zurückführt [2]).

Es ist nun von verschiedenen Seiten versucht worden, dieser neuen Geometrie eine einzige, ihr eigentümliche „projektive" Übertragung zuzuordnen, statt der unendlich vielen affinen Übertragungen. Cartan ist zuerst auf den Gedanken gekommen, jedem Punkte dazu eine lokale ebene Mannigfaltigkeit zuzuordnen und benachbarte Mannigfaltigkeiten *projektiv* statt *affin* aufeinander abzubilden [3]). Dieser Gedanke ist ausgearbeitet von Cartan [4]) und von J. A. Schouten [5]), und es gelang beiden unabhängig von-

[1]) H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie, Göttinger Nachrichten (1921), S. 99—112.

[2]) Loc. cit. unter [1]), vgl. R. K. (J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Julius Springer 1923), S. 131.

[3]) E. Cartan, Sur les espaces généralisées et la théorie de la Relativité, Compt. Rend. **174** (1922), p. 734—737.

[4]) E. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. de France **52** (1924), p. 205.

[5]) J. A. Schouten, On the place of conf. and projective geometry in the theory of linear displacements, Koninkl. Akad. van Wetenschappen Amsterdam 27 (1924), p. 407; Erlanger Programm und Übertragungslehre usw., Rendiconti Palermo **50** (1926), S. 142.

einander jeder bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung eine solche projektive Übertragung in eineindeutiger Weise zuzuordnen.

Von ganz anderer Seite wurde das Problem angefaßt von T. Y. Thomas. Er machte die sehr wichtige Entdeckung, daß sich zwar keine affine Übertragung angeben läßt, die sich unabhängig vom Koordinatensystem der erwähnten Geometrie in eineindeutiger Weise zuordnen ließe, daß aber eine solche eineindeutige Zuordnung sofort möglich ist, sobald das Koordinatensystem *fest* gewählt wird. Diese eigentümliche Eigenschaft beruht darauf, daß

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{1}{n+1}\left(A^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\omega}_{\omega\mu} + A^{\nu}_{\mu}\Gamma^{\omega}_{\omega\lambda}\right)$$ [6])

zwar nicht bei Koordinatentransformationen, aber bei bahntreuen Transformationen der $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ invariant ist. Ausgehend von den Parametern dieser Übertragung gelang es ihm sodann, projektive Vektoren zu definieren, die gewöhnliche Vektoren sind in einer adjungierten $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beschränkter Transformationsgruppe und für diese projektiven Vektoren eine kovariante Ableitung festzulegen, die tatsächlich unserer Geometrie in eineindeutiger Weise zugeordnet ist. Ein kovariantes Differential entsteht allerdings bei Thomas *nicht*, und er gelangt also auch nicht zu einer Übertragung. Unter einer Übertragung verstehen wir doch eine Vorschrift, die gestattet, eine in irgendeinem Punkte definierte Größe irgendwelcher Art vermöge der Forderung, daß das kovariante Differential verschwinden soll, nach einem Nachbarpunkte zu verpflanzen.

Veblen [7]) ist einen anderen Weg gegangen. Mit Hilfe der Transformationsdeterminante gelingt es ihm, die Koordinatentransformation in der Nähe eines Punktes zu schreiben als Quotient zweier Reihenentwicklungen. Den Gliedern nullter und erster Ordnung entnimmt er die Koeffizienten der Definitionsgleichung seiner projektiven Vektoren, die mit den Thomasschen nicht identisch sind. Auch für diese Vektoren lassen sich kovariante Ableitungen definieren. Auch bei Veblen entsteht aber kein kovariantes Differential und somit keine Übertragung.

Die Untersuchungen sind also nicht abgeschlossen. Die Beziehungen zwischen den Thomasschen und den Veblenschen Vektoren und zwischen den zugehörigen Ableitungen sind zwar recht durchsichtig, die zwischen diesen Vektoren und ihren Ableitungen und den bei Cartan und Schouten

---

[6]) T. Y. Thomas, On the projective and equiprojective geometries of paths, Proc. Nat. Acad. Sc. **11** (1925), S. 199–103; A projective theory of affinely connected manifolds, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 723–733.

[7]) O. Veblen, Projective tensors and connections, Proc. Nat. Acad. Sc. **14** (1928), p. 154.

auftretenden Punkten und ihrer Übertragung dagegen keineswegs aufgeklärt. Diese Aufklärung soll die nachstehende Untersuchung bringen. Die bei Cartan und Schouten auftretenden Größen werden im Zusammenhange dieser Arbeit am besten mit dem Namen Punktgrößendichten bezeichnet. Zunächst erfolgt die Ableitung der für diese Größen bestehenden, dem System der geodätischen Linien einer $A_n$ in eindeutiger Weise zugeordneten Übertragung. Von der Behandlung bei Cartan und Schouten unterscheidet sich diese Ableitung durch schärfere Fassung und durch das Nicht-sofort-gleich-1-Setzen einer Konstanten $c$. Sodann gelingt es, unter Verwendung eines Ansatzes von Veblen für die Ableitung von Skalardichten, aus der Übertragung der Punktgrößendichten erst zu einer „projektiven" kovarianten Ableitung der Punktgrößendichten und sodann zu einer kovarianten Ableitung für die Punktgrößen zu gelangen. Es wird dabei bewiesen, daß es im allgemeinen kein zu dieser Ableitung gehöriges kovariantes Differential geben kann.

Nun stellt sich heraus, daß die Punktgrößen für $c = -\frac{1}{n+1}$ bzw. $c = 1$ identisch sind mit den projektiven Vektoren von T. Y. Thomas bzw. Veblen. Außerdem sind die Parameter der gefundenen Ableitung für $c = -\frac{1}{n+1}$ identisch mit den von Thomas angegebenen, während sie für $c = 1$ den Bedingungen genügen, die Veblen, ohne auf eine nähere Bestimmung einzugehen, für seine Parameter aufgestellt hat. Damit ist die fehlende Verbindung hergestellt. Es gelingt jetzt auch die Forderungen anzugeben, die nötig sind, um die von Thomas für seine Parameter aufgestellten Identitäten wirklich abzuleiten und ebenfalls die von Veblen aufgestellten, an sich noch nicht genügenden, Forderungen so zu ergänzen, daß sich die Parameter berechnen lassen.

Besondere Verdeutlichung gewährt die schon von T. Y. Thomas herangezogene $A_{n+1}$ mit beschränkter Transformationsgruppe, deren affine Übertragung durch die Parameter der oben erwähnten Ableitung bestimmt ist. Durch die Veblenschen Forderungen wird in dieser $A_{n+1}$ jeder Parameterlinie der $(n+1)$-ten Variablen $\mathring{x}$ ein System von $\infty^{n-1}$ geodätischen $X_2$ zugeordnet. Stellt man nun die zusätzliche Forderung, daß diese $X_2$ aus den durch die Gleichung $x = \text{konst.}$ bestimmten $X_n$ stets gerade die geodätischen Linien der bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung herausschneiden, so sind die Parameter dadurch vollständig festgelegt.

Zum Schluß wird die Frage erörtert, ob die Übertragung der Punktgrößendichten eine projektive Abbildung benachbarter örtlicher $E_n$ bestimmen kann. Es stellt sich heraus, daß dies im allgemeinen unmöglich ist.

## § 1.

## Punktgrößen in einer $X_n$.

Die Variablen $\xi^\nu$ $(\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots, \omega = a_1, \ldots, a_n)$ seien als Koordinaten einer $X_n$ aufgefaßt. Bei Koordinatentransformation schreiben wir die neuen Koordinaten $\xi^{\mathsf{N}}$ $(\mathsf{I}, \mathsf{K}, \Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N}, \ldots, \Omega = A_1, \ldots, A_n)$ und es ist demnach die Transformationsweise der Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors gegeben durch die Gleichung:

$$v^{\mathsf{N}} = A^{\mathsf{N}}_{\lambda} v^{\lambda}; \qquad A^{\mathsf{N}}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\mathsf{N}}}{\partial \xi^{\lambda}}. \tag{1}$$

Zu jedem Koordinatensystem gehört in jedem Punkte ein System von $n$ kontravarianten und $n$ zu diesen reziproken kovarianten Maßvektoren, so z. B. das System $\underset{\lambda}{e}{}^{\nu}$, $\overset{\nu}{e}_{\lambda}$ zu den $\xi^\nu$. Diese spannen die zu dem betreffenden Punkte gehörige örtliche $E_n$ auf[8]). Wir werden dieses System mit $(\nu)$ bezeichnen, das transformierte System $\underset{\Lambda}{e}{}^{\mathsf{N}}$, $\overset{\mathsf{N}}{e}_{\Lambda}$ mit $(\mathsf{N})$. Außerdem legen wir jetzt noch in einer von der Koordinatenwahl vollständig freien Weise in jedem Punkte der $X_n$ ein System von $n$ linear unabhängigen kontravarianten Maßvektoren $\underset{i}{e}{}^{\nu}$ und das zugehörige reziproke System $\overset{k}{e}_{\lambda}$, $h, i, \ldots, m = 1, \ldots, n$, und bezeichnen die Bestimmungszahlen in bezug auf dieses System mit den kleinen lateinischen Indizes $h, i, \ldots, m$. Dieses System sei mit $(k)$ bezeichnet. Beim Übergang zu einem neuen System $\underset{I}{e}{}^{\nu}$, $\overset{K}{e}_{\lambda}$ bezeichnen wir dieses mit $(K)$, $H, \ldots, M = 1, \ldots, n$, und die zugehörigen Bestimmungszahlen mit den großen lateinischen Indizes. Im allgemeinen ist das System $(k)$ *nicht holonom*, d. h. es gibt kein System von Koordinaten $\xi^k$, zu welchem dieses System gehören könnte. Das Kriterium der Holonomität ist bekanntlich:

$$\partial_{[\mu} A^{k}_{\lambda]} = 0. \tag{2}$$

Es sollen jetzt in der $X_n$ neben Vektoren und Affinoren auch Punktgrößen definiert werden. Dazu ordnen wir jedem Punkte $P$ eine $P_n$[9]) zu und betrachten das $(n+1)$-eder gebildet von dem Punkt $P$ selbst den wir mit $\underset{0}{u}$ bezeichnen, und von $n$ in der örtlichen $P_n$ beliebig, aber allgemein gewählten Punkten $\underset{i}{u}$, $h, \ldots, m = 1, \ldots, n$. Beim Übergang zu einem neuen Punktsystem nennen wir die neuen Maßpunkte $\underset{\odot}{u}$,[10]) $\underset{I}{u}$. Über die gegenseitige Lage der Vektoren $\underset{i}{e}$ und der Punkte $\underset{i}{u}$ machen wir vorläufig keine Voraussetzungen. Jeder Punkt $\mathfrak{v}$ in einer örtlichen $P_n$ läßt

[8]) Unter $E_n$ verstehen wir eine $X_n$ mit einer euklidisch-affinen Übertragung.

[9]) Unter $P_n$ verstehen wir eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

[10]) Wir ersetzen $\hat{0}$ einfachheitshalber durch $\odot$.

sich in der bekannten Möbiusschen Weise linear in die Maßpunkte ausdrücken. Dabei ist es nötig, die Bestimmungszahlen selbst und nicht nur ihre Verhältnisse als wesentlich aufzufassen und somit jedem Punkte ein Möbiussches Gewicht beizulegen, da sonst die Addition von Punkten keine Bedeutung haben würde. Ändert man das Gewicht eines Punktes durch Multiplikation mit einer Potenz der Determinante der Transformation, die $(k)$ in $(K)$ überführt, so entsteht eine Größe, die wir „Punktdichte" nennen können. Vorläufig wollen wir alle Punkte, auch die bisher zur Sprache gebrachten, *Punktdichten* nennen, um die Möglichkeit offen zu behalten, die Transformation durch Multiplikation mit einer Potenz der erwähnten Determinante zu vereinfachen und sodann die Größen, die dieser vereinfachten Transformation unterliegen, „Punkte" zu nennen.

Legen wir fest, daß die Buchstaben $a, \ldots, g$ die Zeichenreihe $0, 1, \ldots, n$ durchlaufen und ebenso $A, \ldots, G$ die Zeichenreihe $\odot, \dot{1}, \ldots, \dot{n}$, so sind $\mathfrak{v}^c$ die alten, $\mathfrak{v}^C$ die neuen Bestimmungszahlen der Punktdichte $\mathfrak{v}$, und die Transformationsformel hat die Form

$$\mathfrak{v}^C = \mathfrak{E}_a^C \mathfrak{v}^a; \qquad \begin{matrix} a, \ldots, g = 0, 1, \ldots, n, \\ A, \ldots, G = \odot, \dot{1}, \ldots, \dot{n}. \end{matrix} \tag{3}$$

Die „kovarianten Punktdichten" sind geometrisch als Hyperebenen zu denken, und ihre Bestimmungszahlen transformieren sich folgendermaßen:

$$\mathfrak{w}_A = \mathfrak{E}_A^c \mathfrak{w}_c. \tag{4}$$

Die Definition der zu den Punktdichten gehörigen kovarianten, kontravarianten und gemischten Punktgrößendichten höheren Grades unterscheidet sich nun von der Definition der Affinoren dadurch, daß sie die Gleichung (3) statt der Transformationsformel der kontravarianten Vektoren als Ausgangspunkt nimmt. Alle Punktgrößendichten sollen mit einem gotischen Kernbuchstaben angegeben werden. Auch für Vektor- und Affinordichten verwenden wir, wie üblich, gotische Kernbuchstaben. Die Größe zweiten Grades $\mathfrak{E}_a^c$ ist die zu den in (3) und (4) definierten Punktdichten zugehörige *Einheitspunktgröße*. Sie spielt dieselbe Rolle wie der Einheitsaffinor $A_\lambda^\nu$ für Vektorgrößen. Infolge unserer Voraussetzungen bezüglich $\underset{0}{\mathfrak{u}}$ und $\underset{\odot}{\mathfrak{u}}$ ist

$$\mathfrak{E}_\odot^k \underline{*} 0; \qquad \mathfrak{E}_0^K \underline{*} 0, \text{[11]} \tag{5}$$

[11]) $\underline{*}$ bedeutet numerische Gleichheit der Bestimmungszahlen in bezug auf das in der Formel verwendete Bezugssystem; es ist also z. B. $A_\lambda^\nu \underline{*} \underset{\lambda}{e}^\nu \underline{*} \overset{\nu}{e}_\lambda$. Wir werden das Zeichen stets dort gebrauchen, wo hervorgehoben werden soll, daß die Ausdrücke links und rechts sich nicht in derselben Weise transformieren. Eine Gleichung mit $\underline{*}$ ist *nicht* invariant, so daß es z. B. nicht gestattet ist, beide Glieder kovariant zu differenzieren. Vgl. J. A. Schouten, Über nichtholonome Übertragungen in einer $L_n$, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 149–172.

aber im allgemeinen

$$\mathfrak{E}_0^{\odot} \neq 0, \quad \mathfrak{E}_{\odot}^{0} = \frac{1}{\mathfrak{E}_0^{\odot}} \neq 0. \tag{6}$$

Einfachheitshalber sei außerdem Unimodularität der Transformation (3) angenommen:

$$|\mathfrak{E}_a^C| = 1. \tag{7}$$

Die Wahl der *Lage* der neuen Grundpunktdichten wird dadurch offenbar *nicht* eingeschränkt.

## § 2.

## Punktdichtenübertragungen.

Eine lineare Punktdichtenübertragung ist gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$\begin{cases} \delta \mathfrak{v}^c = d\mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{a\mu}\, \mathfrak{v}^a\, d\xi^\mu, \\ \delta \mathfrak{w}_a = d\mathfrak{w}_a - \Lambda^c_{a\mu}\, \mathfrak{w}_c\, d\xi^\mu. \end{cases} \tag{8}$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die lokale $P_n$ in irgendeinem Punkte $P$ der $X_n$ sich projektiv auf die lokale $P_n$ in jedem Nachbarpunkte $Q$ abbildet. Diese Idee geht auf Cartan zurück[12]).

Beim Übergang zu dem neuen System von Maßvektoren (N) transformieren sich die $\Lambda^c_{a\mu}$ folgendermaßen:

$$\Lambda^c_{a\mathrm{M}} = \Lambda^c_{a\mu} A^\mu_{\mathrm{M}}, \tag{9a}$$

während beim Übergang zu dem neuen System $(C)$ folgende Transformationsformel gilt:

$$\Lambda^C_{A\mu} = \mathfrak{E}^{Ca}_{cA} \Lambda^c_{a\mu} + \mathfrak{E}^C_b\, \partial_\mu \mathfrak{E}^b_A; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\ ^{13}) \tag{9b}$$

oder, ausgeschrieben unter Berücksichtigung von (5):

$$\begin{cases} (\alpha) & \Lambda^K_{I\mu} = \mathfrak{E}^{Ki}_{kI}\, \Lambda^k_{i\mu} + \mathfrak{E}^{K0}_{kI}\, \Lambda^k_{0\mu} + \mathfrak{E}^K_l\, \partial_u \mathfrak{E}^l_I, \\ (\beta) & \Lambda^K_{\odot\mu} = \mathfrak{E}^{K0}_{k\odot}\, \Lambda^k_{0\mu}, \\ (\gamma) & \Lambda^{\odot}_{I\mu} = \mathfrak{E}^{\odot i}_{kI}\, \Lambda^k_{i\mu} + \mathfrak{E}^{\odot i}_{0I}\, \Lambda^0_{i\mu} + \mathfrak{E}^{\odot}_l\, \partial_\mu \mathfrak{E}^l_I + \mathfrak{E}^{\odot}_0\, \partial_\mu \mathfrak{E}^0_I + \mathfrak{E}^{\odot 0}_{kI}\, \Lambda^k_{0\mu}, \\ (\delta) & \Lambda^{\odot}_{\odot\mu} = \mathfrak{E}^{\odot 0}_{k\odot}\, \Lambda^k_{0\mu} + \mathfrak{E}^{\odot 0}_{0\odot}\, \Lambda^0_{0\mu} + \mathfrak{E}^{\odot}_0\, \partial_\mu \mathfrak{E}^0_{\odot}. \end{cases} \tag{10}$$

Aus $(10, \beta)$ geht hervor, daß sich die $\Lambda^k_{0\mu}$ linear homogen transformieren. Da das System von Vektoren $\overset{k}{e}_\mu$ bis jetzt noch nicht festgelegt ist, kann

---

[12]) Loc. cit. unter [4]).

[13]) Wie üblich wird Wiederholung der Einheitsgröße vermieden: $\mathfrak{E}^{Ca}_{cA} \quad \mathfrak{E}^C_c \mathfrak{E}^a_A$.

es festgelegt werden durch die Forderung

$$\overset{k}{e}_{\mu} = \frac{1}{c} \overset{k}{\Lambda}{}^{k}_{0\mu}, \tag{11}$$

wo $c$ eine (von Null verschiedene) Konstante ist, über welche erst später verfügt werden wird. Aus $(10, \beta)$ folgt dann die Gleichung

$$\mathfrak{E}^{K0}_{i\,\circledcirc} = \Lambda^{K}_{i}. \tag{12}$$

Man kann nun die Frage stellen, wann zwei verschiedene Punktdichtenübertragungen mit Parametern $\Lambda^{c}_{a\mu}$ und ${}'\Lambda^{c}_{a\mu}$ (die auf dieselben Grundpunktdichten bezogen sind) dieselbe Abbildung der $P_n$ aufeinander erzeugen, wenn es sich nur um die Lage der abgebildeten Punkte handelt und von den Gewichten abgesehen wird. Offenbar ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die

$$\mathfrak{v}^{c} - {}'\Lambda^{c}_{a\mu}\,\mathfrak{v}^{a}\,d\xi^{\mu}$$

proportional zu den

$$\mathfrak{v}^{c} - \Lambda^{c}_{a\mu}\,\mathfrak{v}^{a}\,d\xi^{\mu}$$

sind für jede beliebige Punktdichte $\mathfrak{v}^{c}$ und jeden beliebigen Vektor $d\xi^{\mu}$. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn es einen Skalar $q$ gibt, so daß

$$({}'\Lambda^{c}_{a\mu} - \Lambda^{c}_{a\mu})\,d\xi^{\mu} = \mathfrak{E}^{c}_{a}\,q\,;$$

$q$ muß sich linear homogen durch $d\xi^{\mu}$ ausdrücken lassen: $q = w_{\mu}\,d\xi^{\mu}$, und als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich also, daß es einen kovarianten Vektor $w_{\mu}$ geben muß, so daß

$${}'\Lambda^{c}_{a\mu} = \Lambda^{c}_{a\mu} + \mathfrak{E}^{c}_{a}\,w_{\mu}. \tag{13}$$

Diese Gleichung, mit beliebigem Vektor $w_{\mu}$, liefert uns also die allgemeine Formel für alle Übertragungen ${}'\Lambda^{c}_{a\mu}$, die — abgesehen von den Gewichten — dieselbe Punktübertragung erzeugen wie $\Lambda^{c}_{a\mu}$. Da wir im folgenden als wesentlich verschieden nur zwei solche Punktübertragungen betrachten werden, bei welchen nicht nur die Gewichte, sondern auch die Lage der übertragenen Punktdichten verschieden ist, so können wir Vereinfachung herbeiführen, indem wir eine gegebene Übertragung durch eine der in (13) gegebenen Übertragungen ersetzen. Wir nutzen diese Möglichkeit aus, indem wir, ausgehend von einer beliebigen gegebenen Punktdichtenübertragung mit den Parametern ${}'\Lambda^{c}_{a\mu}$, diese ersetzen durch eine neue mit den Parametern $\Lambda^{c}_{a\mu}$, die außer der Formel (13) noch folgender Gleichung genügen:

$$\Lambda^{c}_{c\mu} = 0. \tag{14}$$

Der Vektor $w_{\mu}$ ist durch diese Forderungen eindeutig bestimmt:

$$w_{\mu} = (n+1)\,{}'\Lambda^{c}_{c\mu}.$$

Aus (9b) und (7) des §1 folgt

$$\Lambda^C_{C\mu} = \Lambda^c_{c\mu} + \mathfrak{E}^C_b \partial_\mu \mathfrak{E}^b_C = \Lambda^c_{c\mu} - \partial_\mu \log |\mathfrak{E}^C_a| = \Lambda^c_{c\mu}. \tag{15}$$

Daraus geht hervor, daß die Forderung (14) einen invarianten Charakter hat und daß es also belanglos ist, welches System von Grundpunktdichten wir bei der Berechnung der bevorzugten Übertragung mit Hilfe von (14) zugrunde gelegt haben. Nun versuchen wir noch die Grundpunktdichten $\underset{a}{\mu}$ so zu wählen, daß auch $\Lambda^0_{0\mu}$ verschwindet. Aus der Transformationsformel $(10, \delta)$ folgt, daß es stets möglich ist die Grundpunktdichten so zu wählen, daß

$$\Lambda^\circledcirc_{\circledcirc\mu} = 0 \tag{15a}$$

wird. Hat man einmal das System so gewählt, daß $\Lambda^0_{0\mu} = 0$ ist, so ist dafür, daß diese Gleichung erhalten bleibt, laut $(10, \delta)$ notwendig und hinreichend, daß

$$\mathfrak{E}^{\circledcirc 0}_{k\circledcirc} \Lambda^k_{0\mu} + \mathfrak{E}^\circledcirc_0 \partial_\mu \mathfrak{E}^0_\circledcirc = 0$$

ist, oder infolge (11):

$$\mathfrak{E}^\circledcirc_k \Lambda^k_\mu + \mathfrak{E}^\circledcirc_0 \partial_\mu \log \mathfrak{E}^0_\circledcirc \overset{*}{=} 0. \tag{15b}$$

Schreiben wir jetzt

$$\Delta = |\Lambda^K_i|, \tag{15c}$$

so ergibt sich aus (12)

$$\Delta = |\mathfrak{E}^0_\circledcirc \mathfrak{E}^K_i| = (\mathfrak{E}^0_\circledcirc)^n |\mathfrak{E}^K_i|,$$

woraus unter Berücksichtigung von (5), (6) und (7) des §1 folgt

$$\mathfrak{E}^0_\circledcirc = \Delta^{\frac{1}{n+1}}.$$

Aus (15b) lassen sich jetzt die $\mathfrak{E}^\circledcirc_i$ berechnen und aus (12) die $\mathfrak{E}^K_i$. Schreiben wir jetzt kurz $\pi = \frac{1}{n+1}$, so läßt sich das Resultat samt Umkehrung in folgender Tabelle zusammenfassen:

$$\left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{E}^\circledcirc_0 \overset{*}{=} \Delta^{-\pi}, & \mathfrak{E}^0_\circledcirc \overset{*}{=} \Delta^\pi, \\ \mathfrak{E}^\circledcirc_i \overset{*}{=} -\Delta^{-\pi} \frac{\pi}{c} \partial_i \log \Delta, & \mathfrak{E}^0_I \overset{*}{=} \Delta^\pi \frac{\pi}{c} \partial_I \log \Delta, \\ \mathfrak{E}^K_0 \overset{*}{=} 0, & \mathfrak{E}^k_\circledcirc \overset{*}{=} 0, \\ \mathfrak{E}^K_i \overset{*}{=} \Delta^{-\pi} A^K_i, & \mathfrak{E}^k_I \overset{*}{=} \Delta^\pi A^k_I, \end{array}\right. \tag{16}$$

$$\pi = \frac{1}{n+1}; \qquad \partial_i = A^\mu_i \partial_\mu; \qquad \partial_I = A^\mu_I \partial_\mu.$$

Hier ist nun der Ort, wo die oben offengehaltene Möglichkeit der Vereinfachung der Transformationsformeln zur Verwendung gelangt. Als

*kontra- bzw. kovariante Punkte* wollen wir Größen definieren mit der Transformationsformel

$$v^C = E_a^C v^a \tag{17}$$

bzw.

$$w_A = E_A^c w_c , \tag{18}$$

wo

$$\left\{\begin{array}{l|l} E_0^{\circledcirc} \overset{*}{=} 1, & E_{\circledcirc}^0 \overset{*}{=} 1, \\ E_i^{\circledcirc} \overset{*}{=} -\frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_i \log \Delta, & E_I^0 \overset{*}{=} \frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_I \log \Delta, \\ E_0^K \overset{*}{=} 0, & E_{\circledcirc}^k \overset{*}{=} 0, \\ E_i^K \overset{*}{=} A_i^K, & E_I^k \overset{*}{=} A_I^k . \end{array}\right. \tag{19}$$

$E_a^c$ ist die zu den Punktgrößen zugehörige *Einheitsgröße*, die sich in bezug auf $c$ bzw. $a$ wie ein kontra- bzw. kovarianter Punkt transformiert. Dagegen transformiert sich die Größe $\mathfrak{E}_a^c$ in bezug auf $c$ bzw. $a$ wie eine kontra- bzw. kovariante Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$, und es ist also sowohl $E_a^c \overset{*}{=} \delta_a^c$, $E_A^C \overset{*}{=} \delta_A^C$ als $\mathfrak{E}_a^c \overset{*}{=} \delta_a^c$, $\mathfrak{E}_A^C \overset{*}{=} \delta_A^C$.[14]) Schreiben wir für die Maßpunkte $\overset{a}{a}{}^c$ und für die reziproken kovarianten Maßpunkte $\overset{c}{a}_a$, so ist

$$E_a^c = \overset{b}{a}_a \overset{c}{a}_b ; \qquad \mathfrak{E}_a^c = \overset{b}{\mathfrak{a}}_a \overset{c}{\mathfrak{a}}_b . \tag{20}$$

Aus (19) folgt für die Transformation der kontra- und kovarianten Punkte:

$$\left\{\begin{array}{l|l} v^K = A_k^K v^k, & w_I = \frac{\mathfrak{n}}{c}\, w_0\, \partial_I \log \Delta + A_I^i w_i, \\ v^{\circledcirc} = v^0 - \frac{\mathfrak{n}}{c}\, v^i\, \partial_i \log \Delta, & w_{\circledcirc} = w_0 , \end{array}\right. \tag{21}$$

aus welchen Formeln wir folgende Eigenschaften ablesen:

1. Jedem Punkt $v^c$ ist in eindeutiger Weise ein kontravarianter Vektor mit den Bestimmungszahlen $v^k$ zugeordnet, jeder Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ also eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$. Jeder von $P$ ausgehenden Richtung in der örtlichen $P_n$ entspricht in eineindeutiger Weise eine von $P$ ausgehende Richtung in der örtlichen $E_n$.

2. Jedem Skalar $p$ ist in umkehrbar eindeutiger Weise der 0-Punkt mit der Bestimmungszahl $p$ zugeordnet.

3. Jedem kovarianten Punkt (Hyperebene) $w_a$ ist in eindeutiger Weise ein Skalar mit der Bestimmungszahl $w_0$ zugeordnet.

[14]) $\delta$ ist stets das Kroneckersche Symbol, das gleich 1 oder 0 ist, je nachdem die Indizes gleich oder ungleich sind.

4. Jedem kovarianten Vektor $w_i$ ist in umkehrbar eindeutiger Weise ein kovarianter Punkt mit den Bestimmungszahlen $w_i$, $w_0 = 0$ zugeordnet, jeder kovarianten Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ also eine kovariante Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$.

Wir lassen die in dieser Weise eingeführten einfacheren Punktgrößen vorläufig außer Spiel und fahren fort mit der Behandlung der Übertragung der durch (3) und (4) definierten Punktgrößendichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$.

Wird jetzt auch das Linienelement $dx^\nu$ in bezug auf das System $(k)$ angegeben, so tritt an Stelle von (8)

$$(22)\qquad \begin{cases} \delta \mathfrak{v}^c = d\mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{aj}\, \mathfrak{v}^a\, d\xi^j; \\ \delta \mathfrak{w}_a = d\mathfrak{w}_a - \Lambda^c_{aj}\, \mathfrak{w}_c\, d\xi^j; \end{cases} \qquad d\xi^j = A^j_\mu\, dx^\mu,$$

wo

$$(23)\qquad \Lambda^c_{aj} = \Lambda^c_{a\mu}\, A^\mu_j$$

und statt (9a, b) kommt

$$(24)\qquad \Lambda^C_{AJ} = \mathfrak{E}^{Ca}_{cA}\, A^j_J\, \Lambda^c_{aj} + \mathfrak{E}^C_b\, \partial_J\, \mathfrak{E}^b_A,$$

oder ausgeschrieben, unter Berücksichtigung von (16),

$$(25)\qquad \Lambda^K_{IJ} = A^{Kij}_{kIJ}\, \Lambda^k_{ij} + \mathfrak{n}\, A^K_I\, \partial_J \log \Delta + \mathfrak{n}\, A^K_J\, \partial_I \log \Delta + A^K_l\, \partial_J\, A^l_I$$

$$(26)\qquad \Lambda^{\circledcirc}_{IJ} = A^{ij}_{IJ}\, \Lambda^0_{ij} - \mathfrak{n}\, A^{ij}_{IJ}\, \Lambda^k_{ij}\, \partial_k \log \Delta + \mathfrak{n}\, \partial_J\, \partial_I \log \Delta$$
$$- \mathfrak{n}\, (\partial_l \log \Delta)\, \partial_J\, A^l_I - \mathfrak{n}^2\, (\partial_I \log \Delta)\, \partial_J \log \Delta.$$

Es verdient Beachtung, daß $c$ weder in (25) noch in (26) auftritt.

Unter Berücksichtigung von (7) folgt aus (9b)

$$(27)\qquad \Lambda^A_{A\mu} = \Lambda^a_{a\mu} + \mathfrak{E}^A_b\, \partial_\mu\, \mathfrak{E}^b_A = \Lambda^a_{a\mu} - \partial_\mu \log |\, \mathfrak{E}^C_a\, | = \Lambda^a_{a\mu}.$$

## § 3.

## Punktdichtenübertragung und verallgemeinerte projektive Geometrie.

Es sei jetzt in der $X_n$ eine affine (d. h. symmetrische lineare) Übertragung bis auf bahntreue Transformationen gegeben. Wäre die Übertragung projektiv-euklidisch, so läge der Fall der gewöhnlichen $n$-dimensionalen projektiven Geometrie vor. Wir haben also mit einer verallgemeinerten projektiven Differentialgeometrie zu tun. Analytisch bedeutet die aufgestellte Forderung, daß in der Gleichung

$$(28)\qquad \delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, v^\lambda\, d\xi^\mu$$

die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ nur bis auf Transformationen der Form

$$(29)\qquad {}'\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + p_\lambda\, A^\nu_\mu + p_\mu\, A^\nu_\lambda; \qquad A^\nu_\lambda \overset{*}{=} \delta^\nu_\lambda,$$

wo $p_\lambda$ ein beliebiger Vektor ist, festliegen. Man kann dieselbe Übertragung in bezug auf das System $(k)$ geben; (28) ist dann gleichwertig mit

$$\delta v^k = dv^k + \Gamma^k_{ij}\, v^i\, d\xi^j, \tag{30}$$

wo

$$\Gamma^k_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu i j}\, \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^k_i\, \partial_j A^i_i, \text{ [15]} \tag{31}$$

woraus hervorgeht, daß (29) gleichwertig ist mit

$$'\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + p_i A^k_j + p_j A^k_i. \tag{32}$$

Bekanntlich ist $\Gamma^k_{ij}$ dann und nur dann symmetrisch in $i, j$, wenn das System $(k)$ holonom ist.

Das Kriterium dafür, daß die Übertragung inhaltstreu ist und gerade das Parallelepiped der Maßvektoren $\underset{i}{e}$ in sich überführt, ist, daß $'\Gamma^k_{kj}$ verschwindet. Aus (32) folgt also, daß es unter allen Übertragungen, die aus (30) durch bahntreue Transformation entstehen können, eine einzige gibt, die gerade diese Eigenschaft besitzt, und daß diese Übertragung in bezug auf eben diese Maßvektoren die bei bahntreuen Transformationen invarianten Parameter

$$\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{n+1}(\Gamma^l_{lj} A^k_i + \Gamma^l_{li} A^k_j) \tag{33}$$

hat.

Es soll nun gezeigt werden, daß durch eine solche bis auf bahntreue Transformationen gegebene affine Übertragung eine Punktdichtenübertragung in eineindeutiger Weise bestimmt ist. Eine Punktdichtenübertragung erzeugt geodätische Linien. Dies liegt an der im § 2 erwähnten eineindeutigen Korrespondenz zwischen Richtungen durch $P$ in der örtlichen $P_n$ und in der örtlichen $E_n$. Man erhält eine solche Linie, indem man die zur Punktdichte $\mathfrak{v}^c$ (vom Gewichte $\mathfrak{n}$) der lokalen $P_n$ von $P$ gehörige Punktdichte $'\mathfrak{v}^c$ der lokalen $P_n$ im benachbarten Punkte $Q$ konstruiert, wo $Q$ so gewählt ist, daß die Richtung von $P$ nach $Q$ mit der Richtung der $\mathfrak{v}^c$ zugeordneten Vektordichte $\mathfrak{v}^k$ übereinstimmt. Von $Q$ aus geht man weiter in der Richtung der Vektordichte, die der übertragenen Punktdichte zugeordnet ist, usw. Ist also $\mathfrak{v}^c$ die allgemeine Punktdichte einer geodätischen Linie und somit $\mathfrak{v}^k$ die tangierende Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{n}$, so ist für eine geodätische Linie analytisch zu fordern, daß die zu

$$\mathfrak{v}^j V_j \mathfrak{v}^c = \mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{aj} \mathfrak{v}^a \mathfrak{v}^j \tag{34}$$

gehörige Vektordichte

$$\mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^k + \Lambda^k_{ij} \mathfrak{v}^i \mathfrak{v}^j + c\, \mathfrak{v}^0 \mathfrak{v}^k \tag{35}$$

---

[15]) Vgl. loc. cit. unter [11]).

dieselbe Richtung hat als $\mathfrak{v}^k$. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die $\Lambda^k_{ij}\mathfrak{v}^i\mathfrak{v}^j + \mathfrak{v}^j\partial_j\mathfrak{v}^k$ den $\mathfrak{v}^k$ proportional sind. Kehren wir jetzt zu der bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung zurück. Aus den $\Gamma^k_{ij}$ leiten sich die Parameter $\overset{n}{\Gamma}{}^k_{ij}$ für kontravariante Vektordichten vom Gewicht $n$ bekanntlich ab vermöge der Formel:

$$\overset{n}{\Gamma}{}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - n\,\Gamma^l_{lj}A^k_i. \quad (36)$$ [16])

Eine geodätische Linie dieser Übertragung ist also dadurch charakterisiert, daß die $\mathfrak{v}^j\partial_j\mathfrak{v}^k + \overset{n}{\Gamma}{}^k_{ij}\mathfrak{v}^i\mathfrak{v}^j$ zu den $\mathfrak{v}^k$ proportional sind.

Stellen wir also *die erste invariante Forderung* auf, daß die geodätischen Linien der beiden Übertragungen zusammenfallen, so ergibt sich, daß $\Lambda^k_{ij}$ die Form

$$\Lambda^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \psi_i A^k_j + \omega_j A^k_i \quad (37)$$

hat, wo die $\psi_i$ und $\omega_i$ sich infolge (24) folgendermaßen transformieren

$$\begin{cases} \psi_I = A^i_I\psi_i + n\,\partial_I \log \Delta, \\ \omega_I = A^i_I\omega_i + n\,\partial_I \log \Delta. \end{cases} \quad (38)$$

Die Differenz

$$r_i = \psi_i - \omega_i \quad (39)$$

ist also ein Vektor. Aus (37) folgt unter Berücksichtigung von (13) und (14)

$$\begin{cases} \psi_j = -\frac{1}{n+1}\Gamma^l_{lj} + \frac{n}{n+1}r_j, \\ \omega_j = -\frac{1}{n+1}\Gamma^l_{lj} - \frac{1}{n+1}r_j. \end{cases} \quad (40)$$

Nun verschwindet $\Gamma^k_{[ij]}$, wenn das System $(k)$ holonom gewählt wird. In derselben Weise wollen wir eine Punktdichtenübertragung mit den Parametern $\Lambda^c_{aj}$ *symmetrisch* nennen, wenn $\Lambda^k_{[ij]}$ verschwindet, sobald das System $(k)$ holonom gewählt wird. Infolge (24) ist diese Eigenschaft invariant, d. h. sie gilt für *jedes* holonome System $(k)$, wenn sie für *ein* solches System gilt, da infolge der vorausgesetzten Holonomität $\partial_{[J}A^l_{I]} = 0$ wird.

Stellen wir also die *zweite invariante Forderung* auf, daß die Punktdichtenübertragung symmetrisch sei, so verschwindet $r_i$ und es ist

$$\Lambda^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{n+1}(\Gamma^l_{lj}A^k_i + \Gamma^l_{li}A^k_j) = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}. \quad (41)$$ (Vgl. (33).)

Die Krümmungsgröße einer symmetrischen Punktdichtenübertragung wird wie üblich definiert mittels der Gleichung:

$$2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]}\mathfrak{v}^c = -\mathfrak{P}_{\omega\mu a}{}^c\mathfrak{v}^a, \quad (42)$$

[16]) Vgl. J. A. Schouten und V. Hlavatý, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 414—432.

woraus sich ergibt

$$\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot a}^{\cdot\cdot\cdot c} = 2\,\partial_{[\mu}\,\Lambda^{c}_{|a|\,\omega]} + 2\,\Lambda^{c}_{b[\mu}\,\Lambda^{b}_{|a|\,\omega]}. \tag{43}$$

Nun ist

$$\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot I}^{\cdot\cdot\cdot K} = \mathfrak{E}^{Ki}_{kI}\,\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k} + \mathfrak{E}^{K0}_{kI}\,\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot 0}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} A^{Ki}_{kI}\,\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k} + \mathfrak{E}^{K0}_{kI}\,\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot 0}^{\cdot\cdot\cdot k}. \tag{44}$$

Aus (43) folgt aber

$$\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot 0}^{\cdot\cdot\cdot k} = 2\partial_{[\mu}\,\Lambda^{k}_{|0\,|\,\omega]} + 2\,\Lambda^{k}_{j[\mu}\,\Lambda^{j}_{|0\,|\,\omega]} = 2c\,\partial_{[\mu}\,A^{k}_{\omega]} + \tag{45}$$

$$+ 2c\,\Gamma^{k}_{j[\mu}\,A^{j}_{\omega]} - \frac{2c}{n+1}\,\Gamma^{l}_{lj}\,A^{k}_{[\mu}\,A^{j}_{\omega]} - \frac{2c}{n+1}\,\Gamma^{l}_{lj}\,A^{j}_{[\mu}\,A^{k}_{\omega]} = 2c\,\nabla_{[\mu}\,A^{k}_{\omega]} = 0.$$

Aus (45) folgt, daß die $\mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k}$ Bestimmungszahlen eines Affinors vierten Grades sind, den wir mit $P$ bezeichnen wollen:

$$P_{\omega\mu\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k} \overset{*}{=} \mathfrak{P}_{\omega\mu\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k}. \tag{46}$$

Wir stellen jetzt die *dritte* und *letzte invariante Forderung* auf, daß diese Größe bei einmaliger Faltung über $k$ und $\omega$ verschwindet:

$$P_{kj\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0. \tag{47}$$

Aus (43) ergibt sich dann

$$A^{\omega}_{k}\,\partial_{\mu}\,\Lambda^{k}_{i\omega} - A^{\omega}_{k}\,\partial_{\omega}\,\Lambda^{k}_{i\mu} + 2\,A^{\omega}_{k}\,\Lambda^{k}_{j[\mu}\,\Lambda^{j}_{|i\,|\,\omega]} + 2\,A^{\omega}_{k}\,\Lambda^{k}_{0[\mu}\,\Lambda^{0}_{|i\,|\,\omega]} = 0, \tag{48}$$

so daß

$$c\,(n-1)\,\Lambda^{0}_{i\mu} = 2\,A^{\omega}_{k}\,\{\partial_{[\mu}\,\Lambda^{k}_{|i\,|\,\omega]} + \Lambda^{k}_{j[\mu}\,\Lambda^{j}_{|i\,|\,\omega]}\} \tag{48 bis}$$

oder

$$\Lambda^{0}_{ij} = \frac{2}{c\,(n-1)}\,\{-\partial_{[k}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{|i\,|\,j]} + \overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{l[j}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{l}_{|i\,|\,k]} - \overset{*}{\Gamma}{}^{l}_{[kj]}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{il}\}. \tag{49}$$

Aus (41) und (49) folgt, daß sowohl $\Lambda^{k}_{ij}$ als $\Lambda^{0}_{ij}$ unabhängig von der Wahl von $p_i$ in (32) sind.

Nun sind

$$\overset{*}{R}{}_{lj\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k} = -2\partial_{[l}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{|i\,|\,j]} - 2\,\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{m[l}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{m}_{|i\,|\,j]} - 2\,\overset{*}{\Gamma}{}^{m}_{[lj]}\,\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{im} \tag{50}$$

die Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße[17]) der auf S. 202 erwähnten Übertragung mit den Parametern $\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ in bezug auf das im allgemeinen nicht holonome System $(k)$ und es ist also

$$\Lambda^{0}_{ij} = \frac{1}{c\,(n-1)}\,\overset{*}{R}{}_{kj\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k}. \tag{51}$$

Daß $\overset{*}{R}{}_{kj\cdot\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot k}$ symmetrisch ist, folgt, wie bekannt, aus der Inhaltstreue dieser Übertragung[18]).

---

[17]) J. A. Schouten, loc. cit. unter [11]).

[18]) R. K. S. 90.

Für die Bestimmungszahlen $\mathfrak{P}_{ija}^{\ \ \ c}$ der Krümmungsgröße findet man leicht:

$$(52)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_{iji}^{\ \ \ k} \overset{*}{=} P_{iji}^{\ \ \ k} \overset{*}{=} \tilde{R}_{iji}^{\ \ \ k} - \dfrac{2}{n-1} A_{il}^{k} \overset{*}{R}_{jli}; \\ \mathfrak{P}_{ijo}^{\ \ \ a} \overset{*}{=} 0; \qquad\qquad \mathfrak{P}_{iji}^{\ \ \ 0} \overset{*}{=} 2 \overset{*}{V}_{[j} \overset{*}{R}_{l]i}, \end{cases}$$

wo $\overset{*}{V}$ das Zeichen der zur oben erwähnten Übertragung mit den Parametern $\overset{*}{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$ gehörigen kovarianten Differentiation bedeutet. $P_{iji}^{\ \ \ k}$ ist also identisch geworden mit der Projektivkrümmungsgröße, die sämtlichen Übertragungen mit Parametern von der Form (32) gemeinschaftlich ist[19]). Es gilt also der Satz[20]):

*Jeder bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung in $X_n$ ist in eineindeutiger Weise eine Übertragung der kontra- bzw. kovarianten Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$ zugeordnet. Diese ist durch folgende drei invariante Forderungen festgelegt*: 1. *Übereinstimmung der geodätischen Linien*, 2. *Symmetrie*, 3. *Verschwinden der durch einmalige Faltung entstehenden Größe $P_{kji}^{\ \ \ k}$.*

## § 4.

## Projektive Ableitung von Punktgrößen.

In diesem und den folgenden Paragraphen ist angenommen, daß das System $(k)$ stets holonom gewählt ist. Es existieren dann Koordinaten $\overset{k}{x}$ in der $X_n$. Die zu (8) gehörigen kovarianten Ableitungen

$$(53)\qquad \begin{cases} \nabla_j \mathfrak{v}^c = \partial_j \mathfrak{v}^c + \Lambda_{aj}^{c} \mathfrak{v}^a \\ \nabla_j \mathfrak{w}_a = \partial_j \mathfrak{w}_a - \Lambda_{aj}^{c} \mathfrak{w}_c \end{cases}$$

sind keine Punktgrößendichten, da sie sich, was den Index $j$ betrifft, wie kovariante Vektoren transformieren. Aus dem letzten der im § 2 aufgezählten Zuordnungssätze folgt aber, daß diesen Größen in umkehrbar eindeutiger Weise zwei Punktgrößendichten

$$(54)\qquad \nabla_b \mathfrak{v}^c \quad \text{bzw.} \quad \nabla_b \mathfrak{w}_a$$

vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$ zugeordnet sind, deren Bestimmungszahlen $\nabla_j \mathfrak{v}^c$ und $\nabla_j \mathfrak{w}_a$ durch (53) gegeben sind, während $\nabla_0 \mathfrak{v}^c$ und $\nabla_0 \mathfrak{w}_a$ verschwinden

$$(55)\qquad \begin{cases} \nabla_0 \mathfrak{v}^c = 0, \\ \nabla_0 \mathfrak{w}_a = 0. \end{cases}$$

---

[19]) H. Weyl, loc. cit. unter [1]), vgl. R. K. S. 131.

[20]) E. Cartan, loc. cit. unter [4]), J. A. Schouten, loc. cit. unter [5]).

Diese Punktgrößendichten wollen wir im Gegensatz zu den kovarianten Ableitungen (53) die *projektiven* Ableitungen der Felder $\mathfrak{v}^c$ und $\mathfrak{w}_a$ nennen. Einerseits um zu einer formal einfacheren Schreibweise zu gelangen, anderseits um eine Deutung in $X_{n+1}$ anzubahnen, schreiben wir $\partial_0 \mathfrak{v}^c = 0$, $\partial_0 \mathfrak{w}_a = 0$ und

$$(56) \qquad \begin{cases} V_0 \mathfrak{v}^c = \partial_0 \mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{a0} \mathfrak{v}^a, \\ V_0 \mathfrak{w}_a = \partial_0 \mathfrak{w}_a - \Lambda^c_{a0} \mathfrak{w}_c, \end{cases}$$

woraus folgt, daß auch $\Lambda^c_{a0} = 0$ zu setzen ist. Dies hat vorläufig nur formale Bedeutung.

## § 5.

## Projektive Ableitung von Skalaren und Punktgrößen.

Ist eine gewöhnliche lineare Übertragung festgelegt, so lautet die Formel für die kovariante Differentiation einer Skalardichte $\mathfrak{p}$ vom Gewicht $\mathfrak{k}$ bekanntlich[21])

$$(57) \qquad \mathfrak{w}_j = V_j \mathfrak{p} = \partial_j \mathfrak{p} - \mathfrak{k} \Gamma^i_{ij} \mathfrak{p}$$

und $\mathfrak{w}_j$ ist eine kovariante Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$.

Diese Formel wird in unserem Falle unbrauchbar, da $\Gamma^k_{ij}$ nur bis auf die bahntreuen Transformationen (32) gegeben ist. Betrachten wir aber, einem Gedanken von Veblen folgend[22]), die Größe $\mathfrak{w}_a$ mit den Bestimmungszahlen

$$(58) \qquad \begin{cases} \mathfrak{w}_j = \partial_j \mathfrak{p} \\ \mathfrak{w}_0 = -\frac{c\mathfrak{k}}{n} \mathfrak{p} = -c(n+1)\mathfrak{k}\mathfrak{p}, \end{cases}$$

so lehrt Vergleichung mit (18) und (19), daß

$$(59) \qquad \mathfrak{w}_A = \Delta^{-\mathfrak{k}-n} \mathfrak{E}^c_A \mathfrak{w}_c \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{k}} E^c_A \mathfrak{w}_c$$

und daß also $\mathfrak{w}_a$ eine Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ ist. Diese Größe wollen wir die *projektive kovariante Ableitung des Feldes* $\mathfrak{p}$ nennen und schreiben

$$(60) \qquad \mathfrak{w}_a = V_a \mathfrak{p} \begin{cases} V_j \mathfrak{p} \overset{*}{=} \partial_j \mathfrak{p} \\ V_0 \mathfrak{p} \overset{*}{=} -\frac{c}{n} \mathfrak{k} \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Es soll nun bewiesen werden, daß, wenn sich kein bestimmtes System von $\Gamma^k_{ij}$ in invarianter Weise auszeichnen läßt, es *kein zugehöriges projektives Differential geben kann.*

---

[21]) Loc. cit. unter [16]).

[22]) O. Veblen, loc. cit. unter [7]).

Es ist klar, daß $dp = d\xi^j \partial_j p$ nicht invariant ist. Aber die Bestimmungszahlen $d\xi^k$ lassen sich auch nicht durch Hinzufügung eines $d\xi^0$ so ergänzen, daß die Bestimmungszahlen eines Punktes entständen. Dazu wäre doch laut (21) folgende Transformation von $d\xi^0$ erforderlich

$$d\xi^{0} = d\xi^0 - \frac{n}{c} d\xi^i \partial_i \log \Delta \tag{61}$$

und $d\xi^0$ müßte sich also in der Form

$$d\xi^0 = d\xi^i q_i \tag{62}$$

schreiben lassen, wo die $q_i$ $n$ Zahlen wären, die nur der Forderung zu genügen hätten, daß sie sich folgendermaßen transformieren

$$q_I = A_I^i q_i - \frac{n}{c} \partial_I \log \Delta . \tag{63}$$

Die $q_i$ sind infolge (21) Bestimmungszahlen eines kovarianten Punktes mit $q_0 = -1$. Der Beweisgang erfordert also den Nachweis, daß sich aus den $A_{aj}^c$ kein kovarianter Punkt in invarianter Weise ableiten lassen kann, wenn wirklich die affine Übertragung nur bis auf bahntreue Transformationen gegeben ist, wie es vorausgesetzt wurde, und nicht, entgegen dieser Voraussetzung, irgendein bestimmtes System der $\Gamma_{ij}^k$ ausgezeichnet ist[23]). Ist nun $\Gamma_{ij}^k$ ein beliebiges und somit $\Gamma_{ij}^k + p_i A_j^k + p_j A_i^k$ das allgemeine System, so ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{IJ}^I + (n+1)\, p_J &= A_J^j \Gamma_{ij}^i + A_j^I \partial_J A_I^j + (n+1) A_J^j p_j \\ &= A_J^j (\Gamma_{ij}^i + (n+1)\, p_j) - \partial_J \log \Delta . \end{aligned} \tag{64}$$

Wäre also ein Punkt $q_a$ gegeben, so könnte man die $p_i$ festlegen durch die invariante Forderung

$$q_j = \frac{n}{c} (\Gamma_{ij}^i + (n+1)\, p_j), \tag{65}$$

und damit wäre ein bestimmtes System der $\Gamma_{ij}^k$ ausgezeichnet.

Mit Hilfe der projektiven Dichtenableitung (60) sind wir jetzt in der Lage, die kovariante Ableitung einer kontravarianten Punktdichte vom

---

[23]) Zusatz bei der Korrektur. Läßt man die Verwendung von Differentialkomitanten beliebig hoher Ordnung zu, so läßt sich nicht behaupten, daß es solche Übertragungen mit nicht auszeichenbarem System $\Gamma_{ij}^k$ überhaupt gibt. Die $q_i$ in (63) transformieren sich nämlich wie die gewöhnlichen Ableitungen des Logarithmus einer Dichte vom Gewicht $\frac{n}{c}$. Man braucht also nur eine mit der Übertragung invariant verknüpfte Dichte zu konstruieren, und es ist nicht bewiesen, daß es solche Dichten nicht geben könnte. Zum Beispiel liefert die eine Bestimmungszahl der Größe $n$-ten Grades

$$P_{[\omega_1[\mu_1[\lambda_1}^{\nu_1} \dots P_{\omega_n]\mu_n]\lambda_n]}^{\nu_n]}$$

eine solche Dichte, von der man nicht weiß, ob sie identisch verschwindet.

Gewicht $\mathfrak{n}+\mathfrak{k}$ zu bestimmen. Dazu wird die Punktdichte $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{c}$ als Produkt der Punktdiche $\mathfrak{v}^{c}$ vom Gewicht $\mathfrak{n}$ mit der Dichte $\mathfrak{p}$ vom Gewicht $\mathfrak{k}$ geschrieben. Anwendung der formalen Differentiationsregeln ergibt dann

$$(66)\quad \begin{cases} V_j \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{c} = V_j \mathfrak{p}\, \mathfrak{v}^{c} = (\partial_j \mathfrak{p})\, \mathfrak{v}^{c} + \mathfrak{p}\, \partial_j \mathfrak{v}^{c} + \mathfrak{p}\, \Lambda^{c}_{aj} \mathfrak{v}^{a} = \partial_j \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{c} + \Lambda^{c}_{aj} \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{a}, \\ V_0 \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{c} = V_0 \mathfrak{p}\, \mathfrak{v}^{c} = -c(n+1)\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}^{c} = -c(n+1)\,\mathfrak{k}\,\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^{c}. \end{cases}$$

In derselben Weise gilt für die Ableitung einer kovarianten Punktdichte vom Gewicht $-\mathfrak{n}-\mathfrak{k}$

$$(67)\quad \begin{cases} V_j \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_{a} = \partial_j \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_{a} - \Lambda^{c}_{aj} \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_{c}, \\ V_0 \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_{a} = c(n+1)\,\mathfrak{k}\, \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_{a}. \end{cases}$$

Zu diesen Ableitungen existiert natürlich ebenfalls *kein Differential.* Zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen:

*Kontra- bzw. kovariante Punktdichten vom Gewicht* $\mathfrak{n}$ *bzw.* $-\mathfrak{n}$ *besitzen eine kovariante Ableitung und eine projektive kovariante Ableitung; die erste ist in bezug auf den Differentiationsindex ein Vektor, in bezug auf den anderen Index eine Punktdichte, die zweite ist in bezug auf beide Indizes eine Punktdichte. Zu beiden gehört dasselbe kovariante Differential. Punktgrößen, Skalardichten und Punktgrößendichten, die sich nicht als Summe von Produkten von kontravarianten Punktdichten vom Gewicht* $\mathfrak{n}$ *und kovarianten vom Gewicht* $-\mathfrak{n}$ *schreiben lassen, besitzen nur eine projektive kovariante Ableitung, die in dem ersten Falle eine Punktgröße und in den beiden letzten Fällen eine Punktgrößendichte ist, und zu der kein kovariantes Differential existiert.*

Eine in dieser Weise ausgestattete $X_n$ soll $\mathfrak{P}_n$ heißen.

Aus (66) und (67) folgt für die Parameter der projektiven Ableitung der kontra- bzw. kovarianten Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}+\mathfrak{k}$ bzw. $-\mathfrak{n}-\mathfrak{k}$:

$$(68)\quad \begin{cases} \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{k}_{ij} = \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{k}_{ji} \overset{*}{=} \Lambda^{k}_{ij} \overset{*}{=} \Gamma^{k}_{ij} - \dfrac{1}{n+1}(\Gamma^{l}_{li} A^{k}_{j} + \Gamma^{l}_{lj} A^{k}_{i}), \\ \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{0j} \overset{*}{=} \Lambda^{c}_{0j} \overset{*}{=} c\,\delta^{c}_{j}, \\ \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{0}_{ij} = \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{0}_{ji} = \Lambda^{0}_{ij} \overset{*}{=} \dfrac{1}{c(n-1)} \overset{*}{R}{}^{k}_{kji}, \\ \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{a0} \overset{*}{=} \Lambda^{c}_{a0} - c(n+1)\,\mathfrak{k}\,\delta^{c}_{a} \overset{*}{=} -c(n+1)\,\mathfrak{k}\,\delta^{c}_{a}. \end{cases}$$

Aus dieser Zusammenstellung folgt, daß die kontra- bzw. kovarianten Punkte, die sich infolge ihrer Definition (17), (18), (19) schon der besonders einfachen Transformation (19) erfreuen, auch noch die Eigenschaft haben, daß die Parameter der projektiven kovarianten Ableitung symmetrisch

werden. Für diese Parameter $\Pi^c_{ab}$ schreibend, erhalten wir nämlich:

$$(69)\quad \begin{cases} \Pi^k_{ij} = \Pi^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{n+1}(\Gamma^l_{li} A^k_j + \Gamma^l_{lj} A^k_i), \\ \Pi^c_{0a} = \Pi^c_{a0} = c\,\delta^c_a, \\ \Pi^0_{ij} = \Pi^0_{ji} = \frac{2}{c(n-1)}\{\partial_{[j} \Pi^k_{|i|k]} + \Pi^k_{l[j} \Pi^l_{|i|k]}\} \\ \qquad\quad = \frac{1}{c(n-1)}\{\Pi^k_{lj} \Pi^l_{ki} - \partial_k \Pi^k_{ij}\}. \end{cases}$$

Es ist interessant zu bemerken, daß, wie aus (43) folgt, der Unterschied zwischen $\overset{t}{A}$ und $A$ keinen Einfluß auf die Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße hat. Die Formel (52) gilt also sowohl für die Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße der Punkte als für die der Krümmungsgröße der Punktdichten jedes Gewichts.

## § 6.

## Beziehungen der $\mathfrak{P}_n$ zur $A_{n+1}$.

Aus (69) folgt, *unabhängig von der Wahl von c*, für die Transformation der $\Pi^c_{ab}$:

$$(70)\qquad \Pi^C_{AB} = E^{Cab}_{cAB}\,\Pi^c_{ab} + E^C_c\,\partial_B E^c_A,$$

wenn wir stets für die Ableitungen $\partial_0, \partial_\odot$ Null schreiben. (70) ist aber die Transformation der Parameter einer affinen Übertragung in einer $A_{n+1}$. Unserer $\mathfrak{P}_n$ ist also jetzt in eineindeutiger Weise eine $A_{n+1}$ zugeordnet. Den kontra- bzw. kovarianten Punkten der $\mathfrak{P}_n$ entsprechen die kontra- bzw. kovarianten Vektoren der $A_{n+1}$, den Punktdichten ebenso Vektordichten. Die $\Pi^c_{ab}$ sind die Parameter der Übertragung der Vektorgrößen in der $A_{n+1}$; sie sind Funktionen der $\xi^1, \ldots, \xi^n$, nicht aber der $(n+1)$-ten Koordinate $\xi^0$. Aus (19) folgt, daß diese Koordinaten sich so transformieren, daß die $\xi^K$ beliebige Funktionen von $\xi^1, \ldots, \xi^n$ sind, während

$$(71)\qquad \xi^\odot = \xi^0 - \frac{n}{c}\log \Delta.$$

Spannt man die $X_n$, die durch die Gleichung $\xi^0 = \text{konst.}$ dargestellt werden, mit Hilfe der Richtung der Parameterlinien von $\xi^0$ ein, so wird in jeder einzelnen dieser $X_n$ eine affine Übertragung induziert mit den Parametern $\Pi^k_{ij}$. Dies ist aber (vgl. S. 202) gerade diejenige der Übertragungen (32), die das Parallelepiped der zu $\xi^0, \ldots, \xi^n$ gehörigen Maßvektoren in sich überführt. Bei der Transformation (71) entstehen neue $X_n$, sofern nicht $\Delta = \text{konst.}$ ist, und die in jeder dieser $X_n$ induzierte neue affine Übertragung ist ebenfalls eine der Übertragungen (32), und zwar die zu den neuen Maßvektoren gehörige.

## § 7.

## Die Methode von T. Y. Thomas.

Ausgangspunkt der Methode von T. Y. Thomas ist die gewöhnliche Transformationsgleichung der Koordinaten einer $X_n$ in Verbindung mit der Gleichung (71) für $c = -\frac{1}{n+1}$

$$\xi^{\circledcirc} = \xi^0 + \log \Delta. \tag{72}$$

Diese Transformation in einer $X_{n+1}$ liegt seiner Definition von projektiven Größen zugrunde. Daraus folgt der Satz:

*Wird die Konstante c in* (11) *gleich* $-\frac{1}{n+1}$ *gewählt, so sind die im* § 2 *eingeführten kontra- bzw. kovarianten Punkte identisch mit den kontra- bzw. kovarianten projektiven Vektoren von T. Y. Thomas.*

Thomas ergänzt nun die von ihm schon früher eingeführten Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ so, daß ein System von Parametern $\overset{t}{\Pi}{}^c_{ab}$ entsteht, die sich so transformieren wie die Parameter einer affinen Übertragung in einer $A_{n+1}$. Dieses System ist aber identisch mit dem System der $\Pi^c_{ab}$ aus (69) für $c = -\frac{1}{n+1}$.

Über die Ableitung dieses Systems gibt Thomas keine nähere Auskunft. Es läßt sich aber zeigen, daß das System das einzige ist, das folgenden fünf Forderungen genügt:

$$\left\{\begin{aligned}
&1.\ \text{Transformation der } \overset{t}{\Pi}{}^c_{ab} \text{ nach (70) mit } c = -\frac{1}{n+1};\ \overset{t}{c}_0 = 0,\\
&2.\quad \overset{t}{\Pi}{}^k_{ij} = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij},\\
&3.\quad \overset{t}{\Pi}{}^c_{ab} = \overset{t}{\Pi}{}^c_{ba},\\
&4.\quad \overset{t}{\Pi}{}^c_{a0} = -\frac{\delta^c_a}{n+1}\ ^{24}),\\
&5.\quad \overset{t}{\mathfrak{P}}{}^{\cdot\cdot\cdot c}_{cba} = 2\,\partial_{[b}\overset{t}{\Pi}{}^c_{a|c]} + 2\overset{t}{\Pi}{}^c_{d[b}\overset{t}{\Pi}{}^d_{a|c]} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{73}$$

Eine Ableitung, wobei die zweite Forderung durch eine geometrische ersetzt wird, soll weiter unten zur Sprache kommen.

## § 8.

## Die Methode von Veblen.

Geht man aus von der Transformationsgleichung

$$\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = (\partial_j \xi^K)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right) + \frac{1}{2}(\partial_k \partial_j \xi^K)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right)\left(\xi^k - \underset{0}{\xi}{}^k\right) + \ldots, \tag{74}$$

[24]) Die Forderung 4 kann ersetzt werden durch die schwächere $\overset{t}{\Pi}{}^0_{i0} = 0$, denn aus dieser Forderung und 1, 2 und 3 läßt sich 4 ableiten.

so gibt der erste Term rechts die Transformationskoeffizienten, die der Definition der kontravarianten Vektoren zugrunde liegen. Veblen geht nun aus[25]) von der Reihenentwicklung von $\left(\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K\right)\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^{\mathfrak{m}}$ und erhält in dieser Weise die Reihenentwicklung

$$\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{(\partial_j \xi^K)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right) + \dots}{1 + (\partial_j \log \Delta^{\mathfrak{m}})_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right) + \dots}, \tag{75}$$

die ihm die Transformationskoeffizienten liefert, die er der Definition seiner projektiven Vektoren zugrunde legt. Jeder Transformation (74) ordnet er dazu in eindeutiger Weise die folgende linear gebrochene

$$\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{(r, \xi^K)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right)}{1 + (\mathfrak{m}\, \partial_j \log \Delta)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right)} \tag{76}$$

zu. Es stellt sich heraus, daß die Glieder zweiter und höherer Ordnung in (75) verschwinden für den Fall, daß die $\xi^K$ linear gebrochene Funktionen der $\xi^k$ sind, sofern man

$$\mathfrak{m} = -\frac{1}{n+1} \tag{77}$$

wählt. Dieser Fall, der sich also durch besondere Einfachheit auszeichnet, wird von Veblen zugrunde gelegt. In diesem Falle kann man die Transformation (76) mit Hilfe der Koeffizienten $\overset{c}{E}{}_a^C$, die aus den $E_a^C$ aus (19) entstehen für $c = 1$, folgendermaßen schreiben

$$\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{\overset{c}{E}{}_0^K + \left(\overset{c}{E}{}_j^K\right)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right)}{\overset{c}{E}{}_0^{\odot} + \left(\overset{c}{E}{}_j^{\odot}\right)_0 \left(\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j\right)}. \tag{78}$$

Ausgehend von dieser Transformation definiert Veblen einen kontravarianten projektiven Vektor als ein System von $n+1$ Bestimmungszahlen $v^c$ $(c = 0, 1, \dots, n)$, die sich folgendermaßen transformieren:

$$v^C = \overset{v}{E}{}_a^C\, v^a. \tag{79}$$

Die Transformationsformel der entsprechenden kovarianten projektiven Vektoren lautet dann folgendermaßen:

$$w_A = \overset{v}{E}{}_A^c\, w_c. \tag{80}$$

Daraus folgt aber, daß die Definition der Veblenschen kontra- und kovarianten projektiven Vektoren sich mit der Definition (17), (18) der im § 2 eingeführten kontravarianten und kovarianten Punkten für $c = 1$ deckt, und es besteht also der Satz:

---

[25]) Loc. cit. unter [7]).

*Wird die Konstante c in* (11) *gleich* 1 *gewählt, so sind die im* § 2 *eingeführten kontra- bzw. kovarianten Punkte identisch mit den kontra- bzw. kovarianten projektiven Vektoren von Veblen.*

Für die Parameter $\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{ab}$ der zu diesen Größen gehörigen Ableitung stellt Veblen folgende Forderungen auf:

$$(81)\qquad \begin{cases} 1. & \text{Transformation nach (70) mit } c=1,\ \hat{c}_0=0, \\ 2. & \overset{v}{\Pi}{}^{c}_{ab}=\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{ba}, \\ 3. & \overset{v}{\Pi}{}^{c}_{a0}=\delta^{c}_{a},\ ^{26}) \\ 4. & \overset{v}{\Pi}{}^{i}_{ij}=0. \end{cases}$$

Er legt die $\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{ab}$ nicht fest und begnügt sich damit, zu zeigen, daß sich zu irgendwelchen den Forderungen 1 bis 4 genügenden Werten stets andere Werte konstruieren lassen, die außerdem der fünften Forderung

$$(82)\qquad 5.\quad \overset{v}{\mathfrak{P}}{}^{\cdot\cdot\cdot c}_{c\,ba}=2\,\partial_{[b}\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{|a|c]}+2\,\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{d[b}\overset{v}{\Pi}{}^{d}_{|a|c]}=0$$

genügen. Man kann nun eine sechste geometrische Forderung einführen. Dazu betrachten wir die $A_{n+1}$ des § 6. In dieser $A_{n+1}$ sind die Parameterkurven von $\xi^0$ fest gegeben. Ist längs einer solchen Kurve ein Linienelement $d\xi^c$ gegeben, wofür $\partial_0 d\xi^c=0$, so bestimmt dieses Linienelement ein Band längs der Kurve. Nun wollen wir das Feld $d\xi^c$ in der Richtung von $d\xi^c$ selbst fortsetzen und stellen dazu die offenbar invariante Forderung auf, daß $d\xi^b\nabla_b d\xi^c$ in jedem Punkte der Kurve in der durch $d\xi^c$ und die Kurve bestimmten 2-Richtung liegen soll. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$(83)\qquad d\xi^j\partial_j d\xi^k+d\xi^i d\xi^j\overset{v}{\Pi}{}^{k}_{ij}=\alpha\,d\xi^k,$$

wo $\alpha$ ein beliebiger Koeffizient ist. Wird $d\xi^c$ dieser Gleichung entsprechend fortgesetzt, so entsteht aus der Kurve eine in der $A_{n+1}$ *geodätische* $X_2$. Durch jede Parameterkurve von $\xi^0$ gibt es also $\infty^{n-1}$ solcher $X_2$ und jede dieser $X_2$ ist durch eine in irgendeinem Punkte der betreffenden Parameterkurve gegebenen nicht in der Tangente fallenden Richtung festgelegt. Stellen wir jetzt also als *sechste* Forderung auf:

6. *Die durch die zu den Parameterkurven von* $\xi^0$ *gehörigen geodätischen* $X_2$ *in der* $A_{n+1}$ *sollen aus jeder der durch* $\xi^0=$ konst. *definierten* $X_n$ *für jede mit* (71) *verträgliche Wahl von* $\xi^0$ *stets ein System von*

[26]) Die Forderung 3 kann ersetzt werden durch die schwächere $\overset{v}{\Pi}{}^{0}_{i0}=0$, denn aus dieser Forderung und 1, 2, 4 läßt sich 3 ableiten.

*Kurven ausschneiden, das mit dem System der geodätischen Linien der Übertragungen* (32) *zusammenfällt.*

Man zeigt leicht, daß durch die Forderungen 1 bis 6 die $\overset{v}{\Pi}{}^{c}_{ab}$ vollständig bestimmt sind und daß sie gerade die Werte (69) mit $c = 1$ annehmen. Selbstverständlich lassen sich die Thomasschen $\overset{t}{\Pi}{}^{c}_{ab}$ in genau derselben Weise ableiten, indem man $c = -\frac{1}{n+1}$ setzt, und es ergibt sich damit also die auf S. 210 in Aussicht gestellte Ableitung.

## § 9.

## Die Beziehungen der örtlichen $P_n$ zur örtlichen $E_n$.

Wir haben bisher die örtliche $P_n$ in keiner Weise festgelegt in bezug auf die örtlichen $E_n$. Nur hat sich im § 2 herausgestellt, daß eine eineindeutige Korrespondenz besteht zwischen den von $P$ ausgehenden Richtungen in den beiden zu $P$ gehörigen Mannigfaltigkeiten. Es soll nun versucht werden, die $P_n$ auf die $E_n$ abzubilden. Dazu sei auch in der $E_n$ ein $(n+1)$-eder betrachtet, bestehend aus dem Punkte $\underset{0}{e}$ in $P$ und den als Punkte im Unendlichen aufgefaßten kontravarianten Vektoren $\underset{i}{e}$.[27]) $\underset{0}{e} + p\underset{i}{e}$ bedeute wie üblich den Endpunkt des Radiusvektors $p\underset{i}{e}$. Beim Übergang zum System $(K)$ transformieren sich diese Punkte folgendermaßen:

$$\underset{\circledcirc}{e} = \underset{\square}{e}; \qquad \underset{I}{e} = \overset{k}{\underset{I}{A}}\,\underset{k}{e}; \qquad \overset{k}{\underset{I}{A}} \overset{*}{=} A^k_I. \tag{84}$$

Da die Korrespondenz der Richtungen bei der Abbildung berücksichtigt werden muß, kommt $\underset{i}{u}$ in der Geraden des Radiusvektors $\underset{i}{e}$. Die Abbildungsgleichungen bekommen also die Form:

$$\begin{cases} \underset{0}{u} = \mathfrak{p}\, z\, \underset{0}{e}, \\ \underset{i}{u} = \mathfrak{p}\,(z\,\underset{i}{e} + \alpha\,\underset{i}{e}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\circledcirc}{u} = \Delta^n\, \mathfrak{p}\, z\, \underset{\circledcirc}{e}, \\ \underset{I}{u} = \Delta^n\, \mathfrak{p}\,(z\,\underset{I}{e} + \alpha\,\underset{II}{e}). \end{cases} \tag{85}$$

Hier ist $\mathfrak{p}$ eine Dichte vom Gewicht $-n$, die wir einfachheitshalber schon als Faktor geschrieben haben, und sind die $z$ und die $\alpha$ Koeffizienten, deren Transformationsweise es gilt zu bestimmen. Aus der aus (3), (4) folgenden Transformationsformel der $\underset{a}{u}$:

$$\underset{A}{u} = \overset{c}{\underset{A}{E}}\,\underset{c}{u}; \qquad \overset{c}{\underset{A}{E}} \overset{*}{=} E^c_A \tag{86}$$

ergibt sich leicht

$$\underset{A}{z} = \overset{c}{\underset{A}{E}}\,\underset{c}{z}; \qquad \overset{c}{\underset{A}{E}} \overset{*}{=} E^c_A \tag{87}$$

---

[27]) Bei der hier folgenden Punktrechnung werden einfachheitshalber die kontravarianten Indizes fortgelassen.

und

$$\underset{I}{\alpha} = \delta_I^k \underset{k}{\alpha}; \qquad \delta_I^k = \begin{cases} 0, & \dot{k} + I, \\ 1, & \dot{k} = I. \end{cases} \tag{88}$$

[28])

Aus der letzten Gleichung folgt aber mit Hilfe der Transformationen, die aus der Vertauschung zweier Koordinaten bestehen, daß die $\underset{i}{\alpha}$ nicht nur konstant, sondern auch alle untereinander gleich sind. Man kann also diese Koeffizienten in den Faktor $\mathfrak{p}$ hineinnehmen, wodurch sie aus der Formel verschwinden. Aus (87) folgt, daß die $\underset{a}{z}$ Bestimmungszahlen eines kovaranten Punktes $z$ sind.

Es stellt sich somit heraus, daß die Abbildung der $P_n$ auf die $E_n$ noch in weitesten Grenzen frei wählbar ist und daß zu ihrer Festlegung gerade eine kovariante Punktdichte vom Gewicht $-n$ nötig ist. Die Hyperebene dieser Punktdichte hat eine einfache geometrische Bedeutung. Löst man nämlich $\underset{i}{e}$ aus den Gleichungen (85), so ergibt sich

$$\underset{i}{e} = \frac{1}{\mathfrak{p}} \left( \underset{i}{u} - \frac{z_i}{\underset{0}{z}} \underset{0}{u} \right), \tag{89}$$

und daraus geht erstens hervor, daß $\underset{i}{e}$ nur von der *Lage* dieser Hyperebene abhängt, *nicht von dem Gewicht* von $z$, zweitens aber wegen

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} \left( \underset{i}{u}^c - \frac{z_i}{\underset{0}{z}} \underset{0}{u}^c \right) \overset{\cdot}{\underset{c}{z}} = \frac{1}{\mathfrak{p}} \left( \underset{i}{z} - \frac{z_i}{\underset{0}{z}} \underset{0}{z} \right) = 0, \tag{90}$$

daß der Punkt $\underset{i}{e}$ in dieser Hyperebene liegt. $z$ ist also nichts anderes als die Hyperebene der $P_n$, die sich im „Unendlichfernen" der $E_n$ abbildet.

Die Punktdichtenübertragung, die in der $X_n$ durch eine bis auf bahntreue Transformationen gegebene affine Übertragung festgelegt ist, ist also eine Übertragung, die sich ausschließlich auf benachbarte örtliche $P_n$ bezieht und keineswegs eine Übertragung der Punkte benachbarter örtlicher $E_n$ mit sich bringt. Letztere entsteht vielmehr dann und nur dann, wenn sich eine kovariante Punktdichte vom Gewicht $-n$ in invarianter Weise aus den $\Pi^r_{ab}$ ableiten läßt oder eine solche sonst aus irgendeinem Grunde vorliegt. Sogar induziert die Punktdichtenübertragung der $P_n$ in den $E_n$ nicht einmal eine Richtungsübertragung, da ja bei der Punktdichtenübertragung von $P$ nach einem benachbarten Punkte $Q$ der Punkt $P$ selbst nach einem Punkte der $P_n$ von $Q$ übertragen wird, der im allgemeinen nicht mit $Q$ zusammenfällt.

[28]) Das erweiterte Kroneckersche Symbol bedeutet also 1 oder 0, je nachdem die beiden Indizes ein jeder in seiner eigenen Zeichenreihe korrespondierende oder nicht korrespondierende Stellen einnehmen.

(Eingegangen am 16. Juni 1929.)

# Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen.

## Zweite Mitteilung.

Von

M. Fekete in Jerusalem.

1. In meiner Note „Über die Wertverteilung bei ganzzahligen Polynomen“ [1]) habe ich mich mit der Frage beschäftigt, wie groß die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen $g$ ist, für welche die Gleichung $p(x) = g$, wobei $p(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k$ ein ganzzahliges Polynom bedeutet, ihre sämtlichen Wurzeln in einem endlichen abgeschlossenen konvexen Bereiche $B$ besitzt. Mit Hilfe eines Satzes über die Verteilung der Wurzeln bei algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten [2]) bzw. eines Resultates von Jentzsch [3]) bewies ich, daß *die erwähnte Anzahl den Wert* 4 *bei keiner Wahl von* $p(x)$ *übertreffen kann, sobald der transfinite Durchmesser* [4]) *von* $B$ *kleiner ist als* 1 (und zwar müssen die 4 Zahlen $g$, wenn sie überhaupt existieren, unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen sein).

2. Angesichts dieses Ergebnisses habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Anzahl der ganzen Zahlen $g$ von der oben charakterisierten Eigenschaft auch in dem allgemeineren Falle abzuschätzen, wo die Koeffizienten von $p(x)$ *beliebige komplexe Zahlen* sind, abgesehen von dem höchsten Koeffizienten, der auch weiterhin gleich 1 sein soll. So wurde ich auf die folgende Fragestellung geführt: Es sei $M$ eine vorgegebene beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge und $p(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k$ ein

---

[1]) Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 521–526.

[2]) M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 228–249; Satz X, S. 240.

[3]) Archiv der Math. u. Phys. **25** (1917), S. 196. Vgl. M. Fekete, Beweis eines Satzes von Jentzsch, Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. **31** (1922), S. 42–48.

[4]) Betreffs der Definition des transfiniten Durchmessers s. a. a. O. [2]) S. 231; S. 237—240.

gegebenes Polynom $k$-ten Grades, dessen Koeffizienten $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige komplexe Zahlen sind. *Wie groß ist der transfinite Durchmesser $d^*$ derjenigen Punktmenge $M^*$, die aus den Wurzeln der Gleichung $p(x) = y$ besteht, wobei $y$ die gegebene Menge $M$ durchläuft?*

Ich beantworte diese Frage in folgendem Satze:

I. *Ist der transfinite Durchmesser von $M$ gleich $d$, so beschreiben die $k$ Wurzeln der Gleichung*

$$p(x) \equiv x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k = y,$$

*während $y$ die Punktmenge $M$ beschreibt, eine Punktmenge $M^*$, deren transfiniter Durchmesser*

$$d^* = d^{\frac{1}{k}}$$

*ist.*

3. Bevor ich zum Beweise des soeben formulierten Satzes übergehe, will ich hervorheben, daß aus ihm das Bestehen des eingangs zitierten Ergebnisses auch für beliebige (nicht ganzzahlige) Polynome $p(x)$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 folgt. Denn, nach dem erwähnten Resultate von Jentzsch[3]), sind nebst den Wurzeln von $p(x) = g_1$, $p(x) = g_2$ auch die Wurzeln von $p(x) = y$, falls $g_1 < y < g_2$, in $B$ enthalten; folglich besitzt $B$ eine Teilmenge $\tilde{B}$ (die durch die Wurzeln von $p(x) = y$ beschriebene Punktmenge für $g_1 \leqq y \leqq g_2$), deren transfiniter Durchmesser $= k$-te Wurzel aus dem transfiniten Durchmesser der Strecke[5]) von $g_1$ bis $g_2$, d. h. gleich $\sqrt[k]{\frac{g_2 - g_1}{4}}$ ist, was aber sicherlich unmöglich ist im Falle, wo $g_2 - g_1 \geqq 4$, also $\sqrt[k]{\frac{g_2 - g_1}{4}} \geqq 1$ und der transfinite Durchmesser von $B$ kleiner ist als 1, da ja, wie aus der Definition[4]) sofort einleuchtet, $B$ selbst keinesfalls einen kleineren transfiniten Durchmesser haben kann, als die in ihm enthaltenen Teilmengen.

4. Was nun den Satz I betrifft, so folgere ich seine Richtigkeit auf Grund der zweiten beider von mir gegebenen Definitionen für den transfiniten Durchmesser einer Punktmenge, die so lautet[6]):

Es sei $E$ eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in der $z$-Ebene, die nicht leer ist; $T_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ bedeute das zu $E$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom (kurz $T$-Polynom) $n$-ten Grades, d. h. dasjenige Polynom, für welches das Maximum $M_n$ des absoluten Betrages auf $E$ kleiner ausfällt, als für irgendein anderes Polynom

[5]) Vgl. a. a. O. [2]) § 4, S. 237–240.
[6]) Vgl. a. a. O. [2]) §§ 1–3, S. 230–237.

mit demselben höchsten Gliede. *Dann konvergieren die Zahlen* $R_n = \sqrt[n]{M_n}$ (die „mittleren Radien" der „Überdeckungslemniskaten" $|T_n(z)| \leqq M_n$ von $E$) *bei unendlich wachsendem* $n$ *gegen einen endlichen Grenzwert: den transfiniten Durchmesser von* $E$.

In der Tat, es sei $t_n(y)$ das zur Menge $M$ gehörige $T$-Polynom $n$-ten Grades und $m_n$ sei der größte Wert von $|t_n(y)|$, wenn $y$ die Menge $M$ durchläuft; die mit $M^*$ verbundenen entsprechenden Dinge seien mit $t_n^*(x)$ und $m_n^*$ bezeichnet. Dann besteht offenbar folgender Zusammenhang zwischen den Zahlen $m$ und $m^*$:

$$m_{nk}^* \leqq m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{1}$$

daher ist

$$\sqrt[nk]{m_{nk}^*} \leqq \sqrt[k]{\sqrt[n]{m_n}}$$

und folglich

$$d^* \leqq d^{\frac{1}{k}}. \tag{2}$$

(Um (1) zu verifizieren, bedenke man, daß einerseits

$$\operatorname*{Max}_{x \text{ in } M^*} |t_n(p(x))| \geqq \operatorname*{Max}_{x \text{ in } M^*} |t_{nk}^*(x)| = m_{nk}^*, \tag{3}$$

andererseits für jedes $x$ aus $M^*$

$$t_n(p(x)) = t_n(y) \tag{4}$$

besteht, wobei $y$ einen Wert aus $M$ bedeutet, der mit $x$ durch die Gleichung

$$p(x) = y$$

verbunden ist; aus (4) folgt

$$\operatorname*{Max}_{x \text{ in } M^*} |t_n(p(x))| \leqq \operatorname*{Max}_{y \text{ in } M} |t_n(y)| = m_n \tag{5}$$

und (3), mit (5) vereint, ergibt (1).)

Um den Beweis des Satzes I zu Ende zu führen, genügt es nunmehr zu zeigen, daß

$$d^* \geqq d^{\frac{1}{k}}$$

gilt. Nun ist doch für irgendeinen Wert $y$ aus $M$,

(6) Resultante von $p(x) - y$ und $t_n^*(x) = t_n^*(x_1)\, t_n^*(x_2) \ldots t_n^*(x_k) = q_n(y)$,

wobei $x_1 = x_1(y)$, $x_2 = x_2(y)$, …, $x_k = x_k(y)$ die $k$ Wurzeln der Gleichung $p(x) = y$ bedeuten und $q_n(y)$, wie z. B. aus der Sylvesterschen Form der Resultante hervorgeht, ein Polynom $n$-ten Grades in $y$ bezeichnet, dessen höchstes Glied die Form $\pm y^n$ hat; aus (6) folgt

$$\operatorname*{Max}_{y \text{ in } M} |q_n(y)| \leqq \operatorname*{Max}_{x \text{ in } M^*} |t_n^*(x)|^k = m_n^{*k};$$

andererseits ist, nach der Definition von $t_n(y)$,

$$\underset{y \text{ in } M}{\text{Max}} |q_n(y)| \geqq \underset{y \text{ in } M}{\text{Max}} |t_n(y)| = m_n,$$

also besteht

$$m_n^{*k} \geqq m_n$$

und somit

$$\sqrt[n]{m_n^*} \geqq \sqrt[k]{\sqrt[n]{m_n}}, \quad d^* \geqq d^{\frac{1}{k}},$$

w. z. b. w.

5. Ist $M$ im Speziellen eine Kreisfläche

$$|y - y_0| \leqq r \tag{7}$$

vom Radius $r > 0$, so ist $M^*$ die Lemniskatenfläche

$$|p(x) - y_0| \leqq r \tag{8}$$

vom mittleren Radius $\sqrt[k]{r}$; bekanntlich ist der transfinite Durchmesser von (7) gleich[5]) $r$, der von (8) gleich[7]) $\sqrt[k]{r}$; die Beziehung $d^* = d^{\frac{1}{k}}$ kann also als eine Verallgemeinerung der eben angeführten Ergebnisse betrachtet werden. Sie enthält übrigens auch ein neuerdings publiziertes Resultat von Herrn G. Pólya über den transfiniten Durchmesser von $M^*$ verbunden durch die Gleichung $x^k = y$ mit einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge $M$ der $y$-Ebene, die zusammenhängendes Komplementärgebiet besitzt[8]).

## Anhang.

6. Im Satze I habe ich den Zusammenhang festgestellt zwischen den transfiniten Durchmessern $d$ und $d^*$, die zu einer vorgegebenen beschränkten abgeschlossenen Menge $M$ der $y$-Ebene und der durch die Wurzeln der Gleichung $x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k = y$ beschriebenen Menge $M^*$ gehören, während $y$ sämtliche Punkte von $M$ durchläuft. Im Nachfolgenden möchte ich noch einiges über die Struktur von $M^*$ anführen, unter der Annahme, daß $M$ *ein einfach zusammenhängendes Komplementärgebiet besitzt*, d. h. $M$ *ein Kontinuum bildet.*

Ich frage: Wann ist auch $M^*$ von demselben Charakter?

Ist speziell $M$ eine Kreisfläche (7) und folglich $M^*$ eine Lemniskatenfläche (8), so können wir leicht ein Kriterium aufstellen, damit $M^*$ ein Kontinuum ist:

II. *Es seien die Nullstellen der Derivierten von* $p(x)$ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$ (mehrfache nach ihrer Multiplizität aufgeschrieben) *und es sei* $p(\xi_\nu) = \eta_\nu$

[7]) Vgl. a. a. O. [3]) § 3, Fußnote [4]), S. 234.

[8]) Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. Dritte Mitteilung. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929, S. 55–62; S. 59.

($\nu = 1, 2, \ldots, k-1$). *Dann ist zugleich mit $M$ auch $M^*$ dann und nur dann ein Kontinuum, wenn $M$ sämtliche Punkte $\eta_\nu$ enthält.*

Das folgt aus einem Satze von Riemann[9]), wonach die analytische Funktion $f(z)$, wenn sie in einem durch eine doppelpunktlose Kurve $L$ umschlossenen Bereiche $B$ regulär und auf $L$ von konstantem absoluten Betrage ($> 0$) ist, innerhalb von $L$ eine Nullstelle mehr als $f'(z)$ besitzt.

In der Tat, bildet die Lemniskatenfläche (8) ein Kontinuum, so können zwei Fälle eintreten: 1°. Die Lemniskatenlinie $|p(x) - y_0| = r$ ist eine einfachgeschlossene Kurve; 2°. sie schneidet sich.

Im ersten Falle muß sie nach dem angeführten Satze von Riemann sämtliche Nullstellen von $p'(x)$ in ihrem Innern enthalten, da sie ja sämtliche Nullstellen von $p(x) - y_0$ umschließt. Im zweiten Falle besitzt die für $\varepsilon > 0$ schon aus einem einzigen geschlossenen doppelpunktslosen[10]) Zug bestehende Lemniskate $|p(x) - y_0| = r + \varepsilon$ die eben erwähnte Eigenschaft, folglich müssen sämtliche Nullstellen von $p'(x)$ innerhalb oder am Rande von (8) liegen. Wir sehen also, daß (8) nur dann ein Kontinuum bilden kann, wenn $|p(\xi_\nu) - y_0| \leqq r$, d. h. $\eta_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k-1$) in (7) enthalten ist. Umgekehrt: ist $|\eta_\nu - y_0| \leqq r$, wenn $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, so kann (8) nicht in mehrere Kontinua zerfallen, da sonst nach dem oben zitierten Riemannschen Satze[11]) für $l-1$ $\xi_\nu$-Werte $|p(\xi_\nu) - y_0| > r$ gelten müßte, wobei $l \geqq 2$ die Anzahl der Kontinua angibt.

---

[9]) Vgl. G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, 1925; Bd. I, S. 122 u. S. 297.

[10]) Die Lemniskate $|p(x) - y_0| = r + \varepsilon$ kann nicht auf mehrere getrennte Züge zerfallen, da sie (8) umschließt und (8) ein Kontinuum bildet; sie kann sich auch nicht schneiden; denn ein Doppelpunkt würde sie auf zwei geschlossene Züge aufteilen, von denen einer die Lemniskate $|p(x) - y_0| = r$ umschließt, also auch sämtliche Wurzelpunkte von $p(x) = y_0$ enthält, während der andere außerhalb der Lemniskate $|p(x) - y_0| = r$ läuft, folglich keine von den genannten Wurzelpunkten enthält; das widerspricht aber der Tatsache, daß „eine geschlossene doppelpunktslose Niveaulinie (d. h. ihr entlang ist $|f(z)| = \text{konst.}$), welche samt ihrem Innern dem Regularitätsbereiche von $f(z)$ angehört, enthält mindestens eine Nullstelle von $f(z)$, es sei denn, daß $f(z)$ identisch gleich einer Konstanten ist". Vgl. a. a. O. [9]) S. 112. (Eine sich schneidende geschlossene Kurve $K$ „umschließt" den Punkt $P$, wenn $P$ jener unter den zusammenhängenden Komponenten des Komplementärgebietes von $K$, in welcher der unendlich ferne Punkt liegt, *nicht* angehört.)

[11]) Zerfällt $|p(x) - y_0| \leqq r$ auf $l$ Kontinua ($l \geqq 2$), dann zerfällt leicht ersichtlich für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ die Lemniskatenlinie $|p(x) - y_0| = r + \varepsilon$ auf $l$ einfach geschlossene Züge, auf welchen $p'(x) \neq 0$ ist und welche der Reihe nach $k_1, k_2, \ldots, k_l$ Wurzelpunkte von $p(x) = y_0$ und folglich, laut dem Riemannschen Satze, $k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_l - 1$ Nullstellen von $p'(x)$ umschließen; da $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = k$ gilt, ist die Anzahl derjenigen Nullstellen von $p'(x)$, die innerhalb von $|p(x) - y_0| = r + \varepsilon$ liegen, gleich $k - l$; w. z. b. w.

7. *Ich behaupte nun, daß Satz* II *allgemein gültig ist:*

1°. Es sei $M$ irgendein Kontinuum, das sämtliche Punkte $\eta_\nu$ enthält, und es sei

$$|q(y)| = |y^m + d_1 y^{m-1} + \ldots + d_m| = s$$

eine Lemniskate, die $M$ umschließt und auch selbst ein Kontinuum bildet (solche Lemniskaten existieren, und zwar innerhalb jeder einfachgeschlossenen Kurve, die $M$ umschließt[12]). Dann ist die Lemniskate

$$|q(p(x))| = s$$

nach dem Riemannschen Satze ein Kontinuum, da ja in den Nullstellen der Derivierten von $q(p(x))$, d. h. in den Wurzelpunkten der Gleichungen

$$q'(p(x)) = 0, \quad p'(x) = 0$$

den Voraussetzungen zufolge der absolute Betrag von $q(p(x)) \leqq s$ sein muß. (Sind die Wurzeln von $q'(y) = 0$ $y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ und die von $p(x) = y^{(i)}$ $x_\nu^{(i)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, so sind die Wurzeln von $q'(p(x)) = 0$ $x_\nu^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1;\ \nu = 1, 2, \ldots, k)$. Aber $q(p(x_\nu^{(i)})) = q(y^{(i)})$ genügt der Bedingung $|q(y^{(i)})| \leqq s$, da ja $|q(y)| = s$ ein Kontinuum ist.)

Die Lemniskate $|q(p(x))| = s$ umschließt offenbar $M^*$ und, wie gesagt, bildet sie ein Kontinuum; darum muß auch $M^*$ ein Kontinuum sein, da $M^*$ ja durch sie nach Belieben approximiert[13] wird, wenn die Lemniskate $|q(y)| = s$ die gegebene Menge genügend fein approximiert. (Das Zerfallen von $M^*$ auf mehrere Kontinua würde der letzterwähnten Tatsache offenbar widersprechen.)

2°. Es sei zugleich mit $M$ auch $M^*$ ein Kontinuum und es sei

$$|q(y)| = |y^m + d_1 y^{m-1} + \ldots + d_m| = s \tag{9}$$

eine Lemniskate, die $M$ umschließt und ein Kontinuum bildet. Man betrachte die Lemniskate

$$|q(p(x))| = s, \tag{10}$$

die offenbar ihrerseits $M^*$ umschließt und folglich[14]) ein Kontinuum bildet.

---

[12]) Vgl. D. Hilbert, Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe, Göttinger Nachrichten 1897.

[13]) Ich sage, daß eine beschränkte abgeschlossene ebene Punktmenge $m$ durch eine Schar $S$ von Kurven $K$, deren jede $m$ umschließt, „nach Belieben" oder „beliebig fein" approximierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Kurve $K_\varepsilon$ aus $S$ gibt, derart, daß jeder Punkt auf $K_\varepsilon$ von $m$ eine Entfernung $\leqq \varepsilon$ hat.

[14]) Würde (10) auf mehrere, voneinander getrennte geschlossene Züge zerfallen, so müßte ein einziger Zug von ihnen $M^*$ vollständig umschließen und die übrigen

(Fortsetzung der Fußnote [14]) auf nächster Seite.)

Aus der letztgenannten Tatsache, nach dem Riemannschen Satze, folgt, daß $|q(\eta_\nu)| \leqq \varepsilon$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$ gilt. D. h. jede Lemniskate (9) mit den oben geschilderten Eigenschaften muß alle $\eta_\nu$ umschließen; da aber durch solche Lemniskaten $M$ beliebig fein approximierbar[12]) ist, muß bereits $M$ alle $\eta_\nu$ enthalten. W. z. b. w.

8. Soeben haben wir bewiesen, daß $M^*$, gleichzeitig mit $M$, dann und nur dann ein Kontinuum ist, wenn $M$ alle Punkte $\eta_\nu = p(\xi_\nu)$ enthält, wobei $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ die Nullstellen von $p'(x)$ bedeuten. Ich will erwähnen, daß man auf Grund des vorher öfters angewendeten Riemannschen Satzes dieses Ergebnis dahin verallgemeinern kann, daß $M^*$ dann und nur dann in $l$ Kontinua $(1 \leqq l \leqq k)$ zerfällt, wenn $M$, das auch jetzt ein Kontinuum bilden soll, aus dem Punktsystem $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ nur $k - l$ Punkte enthält.

Jerusalem, Math. Institut d. hebräischen Universität, den 20. Juni 1929.

---

Züge $Z$ könnten keinen Punkt von $M^*$ umschließen; das ist aber unmöglich wegen der Annahme, daß (9) die Menge $M$ umschließt, da ja die Wurzeln von $p(x) = y$ sich mit $y$ stetig ändern, folglich — wenn $x_1$ einen Punkt auf einem Zuge $Z$, $y_1 = p(x_1)$ den ihm entsprechenden Punkt auf (9), $y_2 (\neq y_1)$ einen zu $M$ gehörigen Punkt bedeutet — eine Wurzel der Gleichung $p(x) = y$ von $x_1$ ausgehend auf stetigem, innerhalb von $Z$ führendem Wege in einen Punkt $x_2$ von $M^*$ gelangen muß, während $y$ sich auf stetigem, innerhalb der Linie (9) laufendem Wege von $y_1$ bis $y_2$ bewegt.

(Eingegangen am 3. Juli 1929.)

# Über die Verteilung quadratischer Reste.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Ist $p$ eine Primzahl, $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom, so gibt die über ein vollständiges Restsystem modulo $p$ erstreckte Summe

$$\sum_x \left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

der Legendreschen Symbole[1]) den Unterschied zwischen der Anzahl derjenigen Restklassen, für welche $f(x)$ quadratischer Rest, und der Anzahl derjenigen Restklassen an, für welche $f(x)$ quadratischer Nichtrest ist. Ist das Polynom linear, so durchläuft es mit $x$ ein vollständiges Restsystem, es ist also

$$\sum \left(\frac{x+b}{p}\right) = 0. \tag{1}$$

Auch die quadratischen Polynome $f(x)$ beherrscht man vollständig: E. Jacobsthal[2]) hat gezeigt, daß

$$\sum \left(\frac{x^2+bx+c}{p}\right) = -1 \quad \text{für} \quad b^2 - 4c \not\equiv 0 \bmod p, \tag{2a}$$

$$\sum \left(\frac{x^2+bx+c}{p}\right) = p-1 \quad \text{für} \quad b^2 - 4c \equiv 0 \bmod p \tag{2b}$$

[1]) Es ist $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$, wenn $a$ quadratischer Rest, $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, wenn $a$ quadratischer Nichtrest, $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, wenn $a \equiv 0 \bmod p$ ist.

[2]) E. Jacobsthal: 1. Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Dissertation Berlin 1906; 2. Über die Darstellung der Primzahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **132** (1907), S. 238–245; im folgenden zitiert als J. 1 und J. 2. – Man vgl. auch: von Schrutka, Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **140** (1911), S. 252–265. Man beachte aber, daß die auf S. 260 definierten Sequenzenzahlen $RRRR, \ldots$ anders definiert sind als unsere Zahlen $R_4$, $N_4$ und daß daher die auf S. 263 angegebenen Formeln sich mit den Sätzen unseres § 2 nicht berühren.

ist[3]). Für kubische $f(x)$ hat Jacobsthal ebenfalls einige Ergebnisse erhalten, von denen die folgenden genannt seien: es ist[4])

$$(3) \qquad \left|\sum\left(\frac{x(x^2+a)}{p}\right)\right| < 2\sqrt{p},$$

und es besteht die Identität[5])

$$(4) \qquad \sum\left(\frac{x(x^2+e_1x+e_2)}{p}\right) = \sum\left(\frac{(x+e_1)(x^2-4e_2)}{p}\right).$$

Die Kenntnis der Werte derartiger Summen ist ausschlaggebend für die Beantwortung der folgenden Frage: „Wieviel Systeme von $n$ unmittelbar aufeinanderfolgenden quadratischen Resten und wieviel Systeme von $n$ unmittelbar aufeinanderfolgenden Nichtresten gibt es in der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, p-1$?“ Die fraglichen Anzahlen sind nämlich, wenn wir sie mit $R_n$ und $N_n$ bezeichnen, offenbar[6])

$$(5a) \qquad R_n = \frac{1}{2^n}\sum_{x=1}^{p-n}\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)\right)\cdot\left(1+\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\left(\frac{x+n-1}{p}\right)\right),$$

$$(5b) \qquad N_n = \frac{1}{2^n}\sum_{x=1}^{p-n}\left(1-\left(\frac{x}{p}\right)\right)\cdot\left(1-\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\left(\frac{x+n-1}{p}\right)\right),$$

und Ausmultiplizieren der rechten Seiten liefert

$$(6a) \qquad R_n = \frac{1}{2^n}(p-n) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu}\sum_{x=1}^{p-n}\left(\frac{f_{k\nu}(x)}{p}\right),$$

$$(6b) \qquad N_n = \frac{1}{2^n}(p-n) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{\nu}\sum_{x=1}^{p-n}\left(\frac{f_{k\nu}(x)}{p}\right);$$

dabei sind die $f_{k\nu}$ die $\binom{n}{k}$ Polynome $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)$ mit voneinander verschiedenen $a_i$ aus der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$. $\sum_{x=1}^{p-n}\left(\frac{f_{k\nu}(x)}{p}\right)$ unterscheidet sich von der über ein volles Restsystem $x$ erstreckten Summe $\sum_{x}\left(\frac{f_{k\nu}(x)}{p}\right)$ höchstens um $n$, und die Größenordnungen von $R_n$ und $N_n$ sind daher durch Summen der oben betrachteten Art vollständig bestimmt.

Auf diesem Wege hat Jacobsthal die Anzahlen $R_2$, $N_2$, $R_3$, $N_3$ er-

[3]) J. 1, S. 6–11; J. 2, S. 238–239.
[4]) J. 1, S. 12–13; J. 2, S. 239–240.
[5]) J. 1, S. 11; J. 2, S. 239.
[6]) J. 1, S. 27 und 32; J. 2, S. 241.

mittelt[7]); dabei ergab sich auf Grund von (1), (2a), (3)

$$R_n,\ N_n = \frac{1}{2^n}p + o(p) \qquad (n < 4),$$

also die Tatsache, daß diese Anzahlen sich für große $p$ nur unwesentlich von den bei regelloser Verteilung der Restcharaktere zu erwartenden Zahlen $\frac{1}{2^n}p$ unterscheiden[8]).

Für $n = 4$ bewies Jacobsthal[9]), und vor ihm von Sterneck[10]),

$$R_4 + N_4 > 0 \quad \text{für} \quad p > 17.$$

Dörge[11]) verschärfte dies neuerdings zu

$$R_4 + N_4 > \frac{p}{22} - \text{konst.}, \tag{7}$$

und A. Brauer[12]) zeigte, daß für *jedes* $n$ von einem gewissen $p$ an

$$R_n > 0, \qquad N_n > 0$$

ist.

Im § 1 dieser Note werden einige Abschätzungen für die Summen $\sum\left(\frac{f(x)}{p}\right)$ angegeben, in denen die $f(x)$ Polynome dritten oder vierten Grades sind, die in, modulo $p$ voneinander verschiedene, Linearfaktoren zerfallen. Auf Grund dieser Abschätzungen ergeben sich im § 2 Schranken für $R_4$ und $N_4$ von der Form

$$\frac{p}{2^4}(1-c) < R_4, N_4 < \frac{p}{2^4}(1+c) \qquad (c = \text{konst.} < 1),$$

die auch eine Verbesserung von (7) enthalten.

## § 1.

Hilfssatz[13]).

$$\sum_{d=1}^{p}\left(\sum_x\left(\frac{x(x+1)(x+d)}{p}\right)\right)^2 = p^2 - 2p - 1.$$

---

[7]) J. 1, S. 25–32.

[8]) Vgl. J. 1, S. 30.

[9]) J. 1, S. 32–39.

[10]) von Sterneck, Moskauer Mathematische Sammlung 20 (1898), S. 267–284.

[11]) Dörge, Zur Verteilung der quadratischen Reste, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 38 (1929), S. 41–49.

[12]) A. Brauer, Über Sequenzen von Potenzresten, Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Math.-Phys. Klasse, 1928, S. 9–16.

[13]) Ganz ähnliche Betrachtungen findet man J. 1, S. 13, und bei von Schrutka, a. a. O., S. 257.

Beweis.

$$S=\sum_d\Big(\sum_x\Big(\frac{x(x+1)(x+d)}{p}\Big)\Big)^2=\sum_d\sum_{x,y}\Big(\frac{x(x+1)(x+d)\,y(y+1)(y+d)}{p}\Big)$$
$$=\sum_{x,y}\Big(\frac{x(x+1)\,y(y+1)}{p}\Big)\sum_d\Big(\frac{(d+x)(d+y)}{p}\Big).$$

Nach (2a) und (2b) ist

$$\sum_d\Big(\frac{(d+x)(d+y)}{p}\Big)=-1 \quad \text{für } x\not\equiv y \bmod p,$$
$$\sum_d\Big(\frac{(d+x)(d+y)}{p}\Big)=p-1 \quad \text{für } x\equiv y \bmod p,$$

also

$$S=-\sum_{\substack{x,y\\ x\not\equiv y}}\Big(\frac{x(x-1)\,y(y+1)}{p}\Big)+(p-1)\sum_x\Big(\frac{x^2(x+1)^2}{p}\Big)$$
$$=-\sum_x\sum_y\Big(\frac{x(x+1)\,y(y+1)}{p}\Big)+p\sum_x\Big(\frac{x^2(x+1)^2}{p}\Big)$$
$$=-\Big(\sum_x\Big(\frac{x(x+1)}{p}\Big)\Big)^2+p\sum_x\Big(\frac{x(x+1)}{p}\Big)^2.$$

Nach (2a) ist

$$\sum_x\Big(\frac{x(x+1)}{p}\Big)=-1;$$

da $\Big(\frac{x(x+1)}{p}\Big)$ für $x\equiv 0$ und $x\equiv -1$ verschwindet, für alle anderen Restklassen aber $=\pm 1$ ist, ist

$$\sum_x\Big(\frac{x(x+1)}{p}\Big)^2=p-2.$$

Es folgt

$$S=-1+p(p-2)=p^2-2p-1.$$

Satz Ia. *Sind $a_1, a_2, a_3, a_4$ voneinander verschiedene Zahlen*[14]*, so ist*

$$\Big|\sum_x\Big(\frac{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}{p}\Big)\Big|<\frac{p}{\sqrt{6}}$$

*für fast alle Primzahlen $p$, d. h. für alle Primzahlen bis auf endlich viele, durch die $a_i$ bestimmte, Ausnahmen.*

Satz Ib. *Sind $b_1, b_2, b_3$ voneinander verschiedene Zahlen*[14]*, so ist*

[14]) Sind wenigstens zwei der Zahlen gleich, so sind die Summen nach (1), (2a) oder (2b) zu bestimmen.

$$\left|\sum_x \left(\frac{(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)}{p}\right)\right| < \frac{p}{\sqrt{6}}$$

*für fast alle Primzahlen $p$, d. h. für alle Primzahlen bis auf endlich viele, durch die $b_i$ bestimmte, Ausnahmen.*

Beweis der Sätze Ia und Ib. Wir schließen von vornherein die endlich vielen $p$ aus, für die die $a_i$ bzw. $b_i$ nicht untereinander inkongruent sind. Die linken Seiten der beiden behaupteten Ungleichheiten seien mit $\varphi_p(a_1, a_2, a_3, a_4)$ und $\psi_p(b_1, b_2, b_3)$ bezeichnet. Ersetzt man in $\varphi_p$ $x$ durch $x - a_1$, so ergibt sich

$$\varphi_p(a_1, a_2, a_3, a_4) = \varphi_p(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1).$$

Multipliziert man in

$$\varphi_p(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1) = \left|\sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x(x+a_2-a_1)(x+a_3-a_1)(x+a_4-a_1)}{p}\right)\right|$$

jeden Summanden mit $\left(\frac{\bar{x}^4}{p}\right) = 1$, wobei $\bar{x}$ die modulo $p$ zu $x$ reziproke Zahl bedeutet, und ersetzt dann wieder $\bar{x}$ durch $x$, so folgt

$$\varphi_p(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1) = \left|\sum_x \left(\frac{(x(a_2-a_1)+1)(x(a_3-a_1)+1)(x(a_4-a_1)+1)}{p}\right)\right|,$$

und wenn man hierin jeden Summanden mit $\left(\frac{1}{a_2-a_1}\cdot\frac{1}{a_3-a_1}\cdot\frac{1}{a_4-a_1}\right)$ multipliziert,

$$\varphi_p(a_1, a_2, a_3, a_4) = \psi_p\left(\frac{1}{a_2-a_1}, \frac{1}{a_3-a_1}, \frac{1}{a_4-a_1}\right). \tag{8}$$

Auf Grund dieser Identität sind die Behauptungen Ia und Ib miteinander gleichbedeutend.

Ersetzt man in $\psi_p(b_1, b_2, b_3)$ $x$ durch $x - b_1$, so ergibt sich

$$\psi_p(b_1, b_2, b_3) = \psi_p(0, b_2 - b_1, b_3 - b_1).$$

Multipliziert man in $\left|\sum\left(\frac{x(x+b_2-b_1)(x+b_3-b_1)}{p}\right)\right|$ jeden Summanden mit $\left(\frac{\left(\frac{1}{b_2-b_1}\right)^3}{p}\right)$ und ersetzt $x$ durch $x(b_2 - b_1)$, so folgt $\psi_p(b_1, b_2, b_3) = \psi_p\left(0, 1, \frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}\right)$, also, wenn wir

$$\psi_p(0, 1, c) = \chi_p(c)$$

setzen,

$$\psi_p(b_1, b_2, b_3) = \chi_p\left(\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}\right). \tag{9}$$

Setzt man hier die Werte aus (8) ein, so erhält man

$$\varphi_p(a_1, a_2, a_3, a_4) = \chi_p(d(a_1, a_2, a_3, a_4)), \tag{10}$$

worin

$$d(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_1} \cdot \frac{a_4 - a_2}{a_3 - a_2}$$

das *Doppelverhältnis* der vier Zahlen $a_i$ ist.

Das Doppelverhältnis hängt von der Reihenfolge seiner Argumente ab, und zwar nimmt es, wenn $d$ sein Wert bei einer Reihenfolge ist, bei Veränderung der Reihenfolge die folgenden sechs Werte an:

$$d_1 = d, \quad d_2 = \frac{1}{d}, \quad d_3 = 1 - d, \quad d_4 = \frac{d-1}{d}, \quad d_5 = \frac{d}{d-1}, \quad d_6 = \frac{1}{1-d}. \tag{11}$$

Bei gegebenen $a_1, a_2, a_3, a_4$ sind dies sechs wohlbestimmte rationale Zahlen, die wir uns (ohne eine Reduktion modulo $p$) ausgerechnet denken. Die sechs Zahlen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein; eine Gleichheit zwischen zwei von ihnen besteht, wie man leicht nachrechnet, dann und nur dann, wenn unter ihnen entweder der Wert 0 oder der Wert $-1$ oder eine Wurzel der Gleichung $d^2 - d + 1 = 0$ vorkommt; der letztgenannte Fall tritt wegen der Rationalität der $d_i$ nicht ein; der erste Fall würde bedeuten, daß nicht alle $a_i$ voneinander verschieden sind, kommt also im Hinblick auf die Voraussetzungen der Sätze Ia und Ib nicht in Betracht; in dem zweiten Fall ist

$$\chi_p(-1) = \left| \sum \left( \frac{x(x+1)(x-1)}{p} \right) \right| = \left| \sum \left( \frac{x(x^2-1)}{p} \right) \right|,$$

also nach (3)

$$\chi_p(-1) < 2\sqrt{p} < \frac{p}{\sqrt{6}} \quad \text{für} \quad p > 23;$$

nach (9) und (10) sind mithin in ihm unsere Behauptungen erfüllt, und wir brauchen ihn nicht weiter zu betrachten.

Wir dürfen also annehmen, daß die sechs Zahlen (11) voneinander verschieden sind. Dann gibt es — bei gegebenen $a_i$ bzw. $b_i$ — höchstens endlich viele Primzahlen $p$, für die die sechs Werte (11) nicht sämtlich untereinander *inkongruent* sind; diese $p$ sind die in den Sätzen Ia und Ib erwähnten Ausnahmen.

Für jedes andere $p$ nimmt $d(a_1, a_2, a_3, a_4)$ bei Vertauschung der $a_i$ sechs untereinander inkongruente Werte $d_1, \ldots, d_6$ an. Nach (10) nimmt aber, da $\varphi_p$ symmetrisch in den $a_i$ ist, die Funktion $\chi_p$ für die sechs Werte $d_1, \ldots, d_6$ des Arguments $d$ denselben Wert an. Mithin ist

$$6\chi_p(d_1)^2 = \sum_{i=1}^{6} \chi_p(d_i)^2 < \sum_{d} \chi_p(d)^2,$$

wobei in der letzten Summe $d$ ein vollständiges Restsystem modulo $p$ durchläuft; diese Summe ist nach dem Hilfssatz $< p^2$, womit auf Grund von (9) und (10) die Sätze Ia und Ib bewiesen sind[15]).

Satz IIa. *Für die Primzahlen $p$, für die wenigstens eines der sechs Doppelverhältnisse, die man aus den Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4$ bilden kann, quadratischer Rest ist, kann die Aussage des Satzes* Ia *verschärft werden zu*

$$\left| \sum \left( \frac{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}{p} \right) \right| < \frac{p}{\sqrt{12}} .$$

Satz IIb. *Für die Primzahlen $p$, für die wenigstens einer der sechs Werte, den der Differenzenquotient $\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}$ bei Vertauschung seiner Argumente annimmt, quadratischer Rest ist, kann die Aussage von Satz* Ib *verschärft werden zu*

$$\left| \sum \left( \frac{(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)}{p} \right) \right| < \frac{p}{\sqrt{12}} .$$

Beweis. Für jede Zahl $w$ und jede Primzahl $p$ ist

$$\chi_p(w^2) = \left| \sum \left( \frac{x(x+1)(x+w^2)}{p} \right) \right| = \left| \sum \left( \frac{x(x^2+(w^2+1)x+w^2)}{p} \right) \right|$$

und nach (4)

$$\chi_p(w^2) = \left| \sum \left( \frac{(x+w^2+1)(x^2-4w^2)}{p} \right) \right| = \left| \sum \left( \frac{(x-2w)(x+2w)(x+w^2+1)}{p} \right) \right| .$$

Ersetzt man hier $x$ durch $4wx+2w$ (wobei wir $w \not\equiv 0 \bmod p$ voraussetzen), so ergibt sich

$$\chi_p(w^2) = \left| \sum \left( \frac{4wx(4wx+4w)(4wx+(w+1)^2)}{p} \right) \right| ,$$

---

[15]) Aus dem Beweis geht hervor, daß die in den Sätzen angegebenen Ungleichungen gelten, falls die sechs Werte (11) untereinander *inkongruent* mod $p$ sind; diese Werte sind inkongruent, falls keiner von ihnen $\equiv 0$, $\equiv -1$ oder eine Lösung der Kongruenz $d^2-d+1 \equiv 0$ ist. Der erste Fall bedeutet, daß nicht alle $a_i$ bzw. $b_i$ untereinander inkongruent sind, was auch von vornherein bei der Bildung des Doppelverhältnisses auszuschließen war; im zweiten Fall gelten die behaupteten Ungleichungen für $p > 23$, da dann, wie im Beweis bemerkt, $\chi_p(-1) < \frac{p}{6}$ ist; im dritten — übrigens nur für $p = 6m+1$ möglichen — Fall endlich ist

$$\chi_p(d) = \varphi_p(0, 1, -d, d^2) = \left| \sum \left( \frac{x(x^3+1)}{p} \right) \right| ,$$

und diese Summe ist nach Formel (7), S. 257 der unter [2]) zitierten Arbeit von v. Schrutka $< \frac{1}{6}p$, also $< \frac{p}{6}$ für $p \geqq 37$. Folglich gelten die Ungleichungen aus Ia und Ib für alle $p \geqq 37$ unter der Voraussetzung der Inkongruenz der $a_i$ bzw. $b_i$. Für diese $p$ gelten sie a fortiori nach (1) und (2a) auch, wenn nicht alle $a_i$ oder $b_i$ untereinander inkongruent sind, wobei allein der Fall auszunehmen ist, daß in Ia der Zähler des Summanden ein vollständiges Quadrat mod $p$ ist.

und wenn man mit $\left(\frac{\left(\frac{1}{4w}\right)^3}{p}\right)$ multipliziert,

$$\chi_p(w^2) = \chi_p\left(\frac{(w+1)^2}{4w}\right). \tag{12}$$

Mithin hat $\chi_p$ für die zwölf Zahlen, die nach (11) mit $w^2$ und mit $\frac{(w+1)^2}{4w}$ gleichberechtigt sind, denselben Wert. Falls diese zwölf Zahlen untereinander inkongruent sind, folgt analog wie im Beweis des vorigen Satzes

$$\chi_p(w^2) < \frac{p}{\sqrt{12}}. \tag{13}$$

Hinreichende Bedingungen für die Inkongruenz der zwölf Zahlen und mithin für die Gültigkeit von (13) ergeben sich folgendermaßen: Bezeichnen wir die zwölf formalen Ausdrücke, die gemäß (11) aus $w^2$ und aus $\frac{(w+1)^2}{4w}$ hervorgehen, mit $f_1(w), f_2(w), \ldots, f_{12}(w)$, so folgt aus einer Kongruenz

$$f_i(w) \equiv f_j(w) \tag{14}$$

eine Kongruenz

$$F_{ij}(w^2) \equiv 0, \tag{15}$$

die aus (14) dadurch entsteht, daß man, falls in (14) ungerade Potenzen von $w$ vorkommen, vermöge (14) $w$ durch gerade Potenzen von $w$ ausdrückt und dann quadriert; die Gültigkeit von (15) ist also notwendig für die Gültigkeit von (14), und wir sehen somit: *wenn $w^2$ keine der Kongruenzen* (15) *erfüllt, gilt* (13). Dabei sind die $F_{ij}$ rationale Ausdrücke in $w^2$, die unabhängig von $p$ zu bilden sind.

Sind nun $a_1, a_2, a_3, a_4$ bzw. $b_1, b_2, b_3$ gegeben, so berechnen wir unter Zugrundelegung einer bestimmten Reihenfolge dieser Zahlen das Doppelverhältnis bzw. den Differenzenquotienten $d$ und betrachten nur solche Primzahlen $p$, für die $d$ quadratischer Rest ist, für die also die Kongruenz

$$w^2 \equiv d \mod p$$

eine Lösung $w = w_p$ hat.

Wenn $d$ keine der *Gleichungen* $F_{ij}(d) = 0$ erfüllt, so gilt eine *Kongruenz* $F_{ij}(d) \equiv F_{ij}(w_p^2) \equiv 0 \mod p$ nur für endlich viele $p$, mithin gilt dann (13) für fast alle $p$, und unsere Behauptungen sind für diese Zahlen $a_i$ bzw. $b_i$ bewiesen.

Es bleiben noch die Lösungen der Gleichungen $F_{ij}(d) = 0$ zu untersuchen, und zwar sind nur rationale Lösungen zu betrachten. Man über-

zeugt sich leicht davon[16]), daß dies wieder, wie im Beweis des vorigen Satzes, nur die Zahlen 0, $-1$ und die mit diesen nach (11) gleichberechtigten Zahlen sind; 0 kommt aber wieder wegen der Verschiedenheit der $a_i$ bzw. $b_i$ nicht in Betracht, und für $-1$ gilt sogar, wie wir oben sahen, $\chi_p(-1) < 2\sqrt{p}$. Damit sind IIa und IIb vollständig bewiesen.

Beispiel zu Satz IIa. Das Doppelverhältnis der Zahlen 0, 3, 2, 1 ist 4, also für $p > 2$ stets quadratischer Rest; folglich ist

$$\left|\sum\left(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{p}\right)\right| < \frac{p}{\sqrt{12}} \tag{16}$$

für fast alle $p$. Die Ausnahmen sind neben $p = 2$ diejenigen $p$, für die nicht alle zwölf nach (11) mit 4 und mit $\frac{(2+1)^2}{4\cdot 2} = \frac{9}{8}$ gleichberechtigten Zahlen untereinander inkongruent sind. Diese zwölf Zahlen sind: $4, \frac{1}{4}, -3, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}; \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, 9, -8$. Als Ausnahmeprimzahlen findet man hieraus: $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23$.

Satz IIc. *In* Ia *und* Ib *gelten für fast alle Primzahlen der Form* $p = 4m+1$ *die schärferen Ungleichheiten*

$$\left|\sum\left(\frac{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}{p}\right)\right| < \frac{p}{\sqrt{12}},$$

$$\left|\sum\left(\frac{(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)}{p}\right)\right| < \frac{p}{\sqrt{12}}.$$

Beweis. Da $-1$ quadratischer Rest mod $p$ und daher für jedes $d$ das Produkt $d\cdot(1-d)\cdot\frac{d}{d-1} = -d^2$ Rest ist, ist von den drei Zahlen $d$, $1-d$, $\frac{d}{d-1}$ wenigstens eine Rest. Unter den nach (11) mit $d$ gleichberechtigten Zahlen befindet sich also immer ein quadratischer Rest; somit folgt IIc aus IIa und IIb.

## § 2.

Satz IIIa. *Für jede Primzahl* $p$ *ist*

$$\frac{p}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{12}}\right) - C < R_4 + N_4 < \frac{p}{8}\left(1+\frac{1}{\sqrt{12}}\right) + C \qquad (C \textit{ konstant}).$$

---

[16]) Man hat 16 Gleichungen zu betrachten. Bezeichnet man nämlich die lineare Operation, die $w^2$ bzw. $\frac{(w+1)^2}{4w}$ in $f_i(w)$ überführt, mit $g$, so ist (14) entweder gleichbedeutend mit $w^2 \equiv g^{-1}f_j(w) \equiv f_k(w)$ oder mit $\frac{(w+1)^2}{4w} \equiv g^{-1}f_j(w) \equiv f_k(w)$; wenn man die $f_i$ so numeriert, daß $f_1 = w^2$ ist, $f_2, \ldots, f_6$ die hieraus gemäß (11) entstehenden Ausdrücke sind und $f_7 = \frac{(w+1)^2}{4w}$ ist, braucht man nur die Funktionen $F_{ij}$ mit $1 = i < j$ und die mit $7 = i < j$ zu betrachten.

Beweis. Addition von (6a) und (6b) für $n = 4$ liefert

$$R_4 + N_4 = \frac{p}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sum_{\nu}\Big(\sum_{x=1}^{p-4}\Big(\frac{f_{2\nu}(x)}{p}\Big)\Big) + \frac{1}{8}\sum_{x}\Big(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{p}\Big).$$

Jede der sechs hierin vorkommenden Summen $\sum_{x=1}^{p-4}\Big(\frac{f_{2\nu}(x)}{p}\Big) = \sum_{x=1}^{p-4}\Big(\frac{(x+a_1)(x+a_2)}{p}\Big)$ hat mit Rücksicht auf (2a) höchstens den Betrag 5; für die letzte Summe gilt (16). Daraus folgt die Behauptung; die Primzahlen $p$, die bezüglich (16) Ausnahmen sind, sind durch Wahl einer hinreichend großen Konstanten $C$ zu berücksichtigen.

Satz IIIb. *Für* $p = 4m + 3$ *ist*

$$\frac{p}{16}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) - C < R_4 < \frac{p}{16}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) + C,$$

$$\frac{p}{16}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) - C < N_4 < \frac{p}{16}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{12}}\Big) + C.$$

Beweis. Da $-1$ Nichtrest ist, haben die Zahlen $z$ und $p - z$ stets entgegengesetzten Restcharakter; folglich ist $R_4 = N_4$, und die Behauptung folgt aus IIIa.

Satz IV. *Für* $p = 4m + 1$ *ist*

$$\frac{p}{16}\Big(1 - \frac{3}{\sqrt{12}}\Big) + o(p) < R_4 < \frac{p}{16}\Big(1 + \frac{3}{\sqrt{12}}\Big) + o(p),$$

$$\frac{p}{16}\Big(1 - \frac{3}{\sqrt{12}}\Big) + o(p) < N_4 < \frac{p}{16}\Big(1 + \frac{3}{\sqrt{12}}\Big) + o(p).$$

Beweis. Die Summen $\sum\Big(\frac{f_{1\nu}(x)}{p}\Big)$ und $\sum\Big(\frac{f_{2\nu}(x)}{p}\Big)$, die in (6a) und (6b) auftreten, sind nach (1) und (2a) $o(p)$. Von den vier Summen $\sum\Big(\frac{f_{3\nu}(x)}{p}\Big)$ sind zwei ebenfalls $o(p)$: $\sum\Big(\frac{x(x+1)(x+2)}{p}\Big)$ wird durch die Substitution $x + 1 = y$, $\sum\Big(\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{p}\Big)$ durch die Substitution $x + 2 = y$ in die Summe $\sum\Big(\frac{(y-1)y(y+1)}{p}\Big) = \sum\Big(\frac{y(y^2-1)}{p}\Big)$ transformiert, die nach (3) $o(p)$ ist. Für die beiden übrigen Summen $\sum\Big(\frac{f_{3\nu}(x)}{p}\Big)$ und für die einzige Summe $\sum\Big(\frac{f_{4\nu}(x)}{p}\Big)$ gilt Satz IIc. Daraus folgt die Behauptung.

(Eingegangen am 18. Juli 1929.)

# Zu der von R. von Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

## Erste Mitteilung: Theorie des Glücksspiels.

Von

Karl Dörge in Köln.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist erstmalig durch R. von Mises axiomatisch begründet worden, in seiner Abhandlung „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Math. Zeitschr. Bd. 5, und in seinem Buch „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit" (Berlin: Jul. Springer 1928)[1]. Die drei wesentlichsten Grundgedanken sind diese: 1. Voranstellung des Kollektivbegriffs vor den Begriff der Wahrscheinlichkeit. 2. Aus der Annahme der Unmöglichkeit eines Spielsystems folgt die Multiplikationsregel für unabhängige Kollektivs. 3. Alle üblichen Operationen der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich aus vier angegebenen Grundoperationen zusammensetzen. Ich glaube, daß diese Begründung der früher üblichen Ableitung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in vielen Gebieten, ohne jeden Zweifel aber in der Statistik, bei weitem überlegen ist.

Auf Widerstand gestoßen ist diese Theorie vor allem wegen der außerordentlich weitgehenden Forderung des ausgeschlossenen Spielsystems. Hieraus nämlich mußte R. von Mises die Folgerung ziehen, daß die Annahme, es könnte gelingen ein Beispiel für ein Kollektiv mathematisch zu konstruieren, zum Widerspruch führt. Die Kollektivs sind daher bei von Mises nicht rein mathematische, sondern andere Gegebenheiten, wie etwa die Abstrakta von unendlichen Folgen von Würfen mit einem Würfel, die nicht mathematisch gesetzlich, sondern in anderer Weise, vielleicht kann man sagen physikalisch, bestimmt sind.

[1]) Unter der Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch R. von Mises verstehe ich die Begründung, welche sich ergibt aus der Abhandlung in der Math. Zeitschr., ergänzt durch die Betrachtungen über unabhängige und abhängige Kollektivs in dem zitierten Buche.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, unter Benutzung der Grundgedanken von R. von Mises eine rein mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzubauen, in welcher die Objekte durch mathematische Gesetze bestimmte unendliche Folgen sind. Der hier vorliegende Teil behandelt die Theorie des Glücksspiels, ist aber in Wirklichkeit allgemeiner, als es nach der Bezeichnung vielleicht scheint. Den Begriff einer Theorie des Glücksspiels kann ich streng nicht anders definieren als eine Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie den hier angegebenen drei Axiomen entspricht. Ungefähr möchte ich den Begriff so an einem Beispiel erläutern: Man habe etwa drei unendliche Folgen: Erstens würfelt man mit einem Würfel mit sechs Augenzahlen, zweitens wirft man eine Münze und drittens zieht man Kugeln verschiedener Farbe aus einer Urne. Man erhält dann, idealisiert, drei unendliche Folgen von Augenzahlen bzw. von Schrift und Bild bzw. von Farben. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung verknüpft dann die drei verschiedenen Folgen, leitet aus diesen neue, etwa die jedes zehnten Elementes, ab u. a. Ich nenne die Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Gegenstand die drei Folgen sind, ein Glücksspiel, weil — wie wir annehmen — zwei Eigenschaften erfüllt sind:

1. In jedem einzelnen der drei Kollektivs ist der Ausfall an irgendeiner Stelle von dem Ausfall an den anderen Stellen unabhängig.

2. Je zwei der drei Folgen sind voneinander unabhängig, d. h. der Ausfall in einem Kollektiv beeinflußt nicht den Ausfall in den anderen.

In der im folgenden angegebenen Theorie schließe ich mich vollständig an die drei genannten von Misesschen Grundgedanken an. Die Unterschiede sind vor allem diese: 1. Axiomatisierung des Begriffes „zulässige Auswahl". 2. Es wird nicht das einzelne Kollektiv definiert, sondern die Wahrscheinlichkeitstheorie, d. h. im wesentlichen der Bereich aller betrachteten Kollektivs, der von Grundkollektivs, von denen allein die Erfüllung von Axiomen verlangt wird, erzeugt wird, und aus welchen durch angegebene Operationen die übrigen, abgeleiteten Kollektivs, abgeleitet werden.

Erreicht wird hiermit neben der schon erwähnten Tatsache, daß die Objekte, die Kollektivs, mathematisch konstruierte Folgen sind, vor allem — und das erscheint mir bei weitem als das wichtigste — dieses: *Es ergibt sich ein Kriterium, welche Kollektivs unabhängig sind,* bei der Verbindung welcher Kollektivs also die Wahrscheinlichkeiten sich multiplizieren, ohne daß dieses Kriterium natürlich etwa auf diese Forderung hinausläuft. Daß die vorliegende Theorie auf die von R. von Mises ausgeschlossenen sogenannten mathematischen Fragestellungen sich anwenden läßt, erscheint mir nicht als wesentlich.

Die Bezeichnungen sind die in den von Misesschen Arbeiten gebrauchten.

Um für den Aufbau völlig unwesentliche rechnerische Weitläufigkeiten zu vermeiden — und nur aus diesem Grunde — habe ich mich durchweg auf sogenannte arithmetische Kollektivs mit endlich vielen Merkmalen beschränkt.

Ich setze beim Leser nichts, auch nicht die Kenntnis der von Misesschen Arbeiten voraus. Daher rührt die etwas breite Darstellung am Anfang und bei den Gesetzen der großen Zahlen[2]).

## I. Bezeichnungen.

Im $k$-dimensionalen Raume habe man $l$ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_l$ und eine mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete abgezählte unendliche Folge

$$\mathfrak{A}: a_1, a_2, \ldots,$$

worin jedes Element $a_\nu$ einer der $l$ Punkte $P_\lambda$ ist. (Eine solche Folge muß durch ein Gesetz gegeben werden.) Dann nennen wir $\mathfrak{A}$ eine Merkmalfolge, jedes $P_\lambda$ ein Merkmal von $\mathfrak{A}$, den $k$-dimensionalen Raum den Merkmalraum von $\mathfrak{A}$ und die aus den $l$ Punkten $P_\lambda$ bestehende $k$-dimensionale Punktmenge $M$ die Merkmalmenge von $\mathfrak{A}$. Wir wollen der einfacheren Ausdrucksweise wegen vereinbaren, daß wir Punkte nicht unnötig in die Merkmalmenge aufnehmen. $M$ enthält mithin nur solche Punkte, welche wirklich in $\mathfrak{A}$ als Merkmale auftreten.

$n$ sei eine Anzahl. Unter $Z_{P_\lambda}(n)$ verstehe man die Anzahl, die angibt, wie oft unter den Elementen $a_1 \ldots a_n$ der Punkt $P_\lambda$ vorkommt. $\frac{Z_{P_\lambda}(n)}{n}$ ist die $n$-te relative Häufigkeit von $P_\lambda$ in $\mathfrak{A}$. Wenn dann der $\lim_{n=\infty} \frac{Z_{P_\lambda}(n)}{n}$ existiert, so nennen wir ihn die Wahrscheinlichkeit von $P_\lambda$ in $\mathfrak{A}$ und bezeichnen diese mit $W(P_\lambda)$; $W(P_\lambda)$ ist dann eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 mit Einschluß der Grenzen. Ist $W(P_\lambda) = 0$, so folgt, daß $P_\lambda$ relativ selten in $\mathfrak{A}$ auftritt, es folgt jedoch nicht, daß das Auftreten von $P_\lambda$ in $\mathfrak{A}$ unmöglich ist. Auch folgt aus $W(P_\lambda) = 1$ nicht, daß jedes $a_\nu = P_\lambda$ ist, aus $W(P_\lambda) = 1$ folgt mithin nicht, wie man gewöhnlich sagt, das Auftreten von $P_\lambda$ mit Sicherheit, aus $W(P_\lambda) = 0$ folgt nicht die Unmöglichkeit.

Hat in $\mathfrak{A}$ jedes Merkmal eine Wahrscheinlichkeit, so sagen wir: $\mathfrak{A}$ hat eine Verteilung, und verstehen unter der Verteilung diejenige Zuordnung, die jedem Punkt $P_\lambda$ der Merkmalmenge $M$ die reelle Zahl $W(P_\lambda)$ zuordnet.

Die Gleichheit und Verschiedenheit von Merkmalfolgen definieren wir so:

$$\mathfrak{A}: a_1, a_2, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}: b_1, b_2, \ldots$$

heißen gleich, wenn $a_\nu = b_\nu$ ist für $\nu = 1, 2, \ldots$, andernfalls sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschieden.

---

[2]) Ich habe diese Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Vorlesung im So. Se. 1928 in Köln vorgetragen.

## II. Mischung.

Zu $\mathfrak{A}$ gehöre eine Verteilung. $N < M$ sei eine Teilmenge der Merkmalmenge, etwa $N = (P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_s})$; $Z_N(n)$ sei die Anzahl, welche angibt, wie oft unter $a_1, \ldots, a_n$ ein Element von $N$ vorkommt. Wegen $Z_N(n) = Z_{P_{\alpha_1}}(n) + Z_{P_{\alpha_2}}(n) + \ldots + Z_{P_{\alpha_s}}(n)$ folgt dann

Satz. *Es existiert* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{Z_N(n)}{n}$, *und zwar ist dieser Limes, bezeichnet als Wahrscheinlichkeit von N in* $\mathfrak{A}$:

$$W(N) = \sum_{\sigma=1}^{s} W(P_{\alpha_\sigma}).$$

(Dieser Satz gilt ohne weitere Voraussetzung nur für endlich viele Summanden.) Etwas allgemeiner folgt hieraus: Sind $A$, $B$ zwei Teilmengen von $M$, welche kein Element gemeinsam haben, so ist

$$W(A + B) = W(A) + W(B).$$

Sind z. B. $A$, $B$ zwei komplementäre Teilmengen, das soll heißen: zwei Teilmengen von $M$ ohne gemeinsames Element, die zusammen aber $M$ ergeben, so ist also $W(A) + W(B) = W(M) = 1$, d. h. die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Elementes aus $A$ und die Wahrscheinlichkeit für das Nichtauftreten eines Elementes aus $A$ ergänzen sich zu 1.

$\mathfrak{A}$ sei eine Merkmalfolge mit der Merkmalmenge $M = (P_1, \ldots, P_l)$. Man fasse die Elemente von $M$ zu Teilmengen zusammen. D. h. man zerlege $M$ in Teilmengen, die zu je zwei elementefremd sind, etwa in die Teilmengen $N_1, \ldots, N_r$. Statt nach dem Auftreten der einzelnen $P_\lambda$ frage man nun nach dem Auftreten der $N_\varrho$, d. h. also: man ändere $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$ ab, indem man jedes $a_\nu$, welches ja ein $P_\lambda$ ist, ersetzt durch die Punktmenge, in welcher es enthalten ist. Man erhält dann eine neue Merkmalfolge, deren Merkmale jetzt die Punktmengen $N_\varrho$ sind, die entweder als eindimensionale Punkte angesehen werden, oder, wenn das vorteilhaft ist, in höherer Dimension gedeutet werden. Aus dem obigen Satze folgt dann, daß die neue Merkmalfolge wieder eine neue Verteilung hat. Diese ist mittels der alten Verteilung von $\mathfrak{A}$ bestimmt. Wir wollen diese Operation, welche aus Merkmalfolgen neue Merkmalfolgen erzeugt, als Mischung bezeichnen, indem wir uns vorstellen, daß die in den einzelnen Gruppen auftretenden Merkmale $P_\lambda$ untereinander vermischt werden.

Eine Mischung kann mithin auch gedeutet werden als eine Transformation der Merkmale $P_1, \ldots, P_l$ in neue Merkmale $Q_1, \ldots, Q_r$, wobei jedem $P$ ein bestimmtes $Q$ entspricht, aber im allgemeinen mehrere $P$ in dasselbe $Q$ übergehen. Andernfalls ist die Transformation eineindeutig und dann offenbar ohne besonderes Interesse, da es sich dann allein um die Bezeichnung handelt.

## III. Teilung.

Nach dieser außerordentlich harmlosen Operation der Mischung besprechen wir jetzt eine zweite, ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten verursachende Operation an Merkmalfolgen, die eigentliche Teilung: Die Bezeichnungen seien dieselben wie oben. Die einzige Voraussetzung ist diese: Zu $\mathfrak{A}$ gehört eine Verteilung, es existieren also die $W(P_\lambda)$. $N$ sei eine Teilmenge von $M$ und $W(N) \neq 0$.

Aus $\mathfrak{A}$ sondere man nun alle Elemente aus, die zu $N$ gehören. Aus $\mathfrak{A}$ erhält man dann eine wegen $W(N) \neq 0$ unendliche Teilfolge. Man bezeichne sie mit

$$\mathfrak{A}^*: a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots .$$

Definition. Wir sagen, $\mathfrak{A}^*$ entsteht aus $\mathfrak{A}$ durch Teilung von $\mathfrak{A}$ auf die Teilmenge $N$. Dann folgt

Satz. *Zu $\mathfrak{A}^*$ gehört wieder eine Verteilung (das gilt nur, wenn $W(N) \neq 0$). Bezeichnet man die zu $\mathfrak{A}^*$ gehörenden Wahrscheinlichkeiten mit $W^*$, so ist für jede Teilmenge $A$ von $N$*

$$W^*(A) = W(A) \frac{1}{W(N)}.$$

Beweis. $P_\lambda$ sei Punkt von $N$. $Z^*_{P_\lambda}(n)$ gebe an, wie oft unter $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}$ der Punkt $P_\lambda$ vorkommt. Es kommt dann darauf an, $\frac{Z^*(n)}{n}$ für wachsendes $n$ zu untersuchen. Nun ist $Z^*_{P_\lambda}(n) = Z_{P_\lambda}(\alpha_n)$, also $\frac{Z^*_{P_\lambda}(n)}{n} = \frac{Z_{P_\lambda}(\alpha_n)}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n}{n}$. Wächst jetzt $n$ über alle Grenzen, so auch $\alpha_n$. Dann aber konvergiert der erste Faktor nach $W(P_\lambda)$ und der zweite Faktor nach $\frac{1}{W(N)}$. Daraus folgt die Behauptung, zunächst für einzelne Merkmale $P_\lambda$ und dann daraus wegen II für jede Teilmenge der Merkmalmenge $N$.

Man nennt $W^*(P_\lambda)$ auch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $P_\lambda$ in $\mathfrak{A}$, wenn man schon weiß, daß ein Element von $N$ auftritt.

Ein einfaches Beispiel ist folgendes: Man würfele immer wieder mit einem Würfel. Man erhält — indem man das Würfeln als Ersatz für ein mathematisches, die Folge bestimmendes Gesetz ansieht — eine abgezählte unendliche Folge $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$. Die Merkmale sind die Zahlen $1, 2, \ldots, 6$. Der Merkmalraum ist eindimensional. Nehmen wir einmal an, wir erhielten dabei für jedes Merkmal eine Wahrscheinlichkeit, und zwar jedesmal $^1/_6$. (Nachprüfen läßt sich das natürlich nicht.) Eine Mischung erhält man dann, wenn man z. B. fragt nach dem Auftreten einer geraden oder ungeraden Augenzahl. II liefert für beides die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Eine Teilung macht man, wenn man z. B. von allen Würfen nur auf diejenigen achtet, wo eine gerade Augenzahl fällt. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit z. B. für das Fallen einer 6: $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Man sagt auch: Weiß man schon, daß eine gerade Zahl fällt, so ist die Wahrscheinlichkeit für 6 gleich $\frac{1}{3}$.

## IV. Auswahl.

Definition. Unter einer Auswahl verstehen wir eine abgezählte unendliche Folge wachsender positiver ganzer Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \qquad (\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots).$$

Wir bezeichnen Auswahlen mit großen griechischen Buchstaben. Über die Gleichheit von Auswahlen setzen wir folgendes fest:

Die Auswahlen $\mathsf{A}$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $\mathsf{B}$: $\beta_1, \beta_2, \ldots$ heißen gleich, wenn $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für jedes $\nu$; verschieden, wenn $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für mindestens ein $\nu$; fast gleich, wenn $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für fast alle $\nu$; halb gleich = halb total verschieden, wenn $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für unendlich viele $\nu$ und $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für unendlich viele $\nu$; fast total verschieden, wenn $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für fast alle $\nu$; total verschieden, wenn $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für alle $\nu$.

Aus mehreren einzelnen Auswahlen setzen wir neue Auswahlen zusammen, indem wir definieren: $\mathsf{A}$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $\mathsf{B}$: $\beta_1, \beta_2, \ldots$ seien zwei Auswahlen. Unter $\mathsf{A\,B}$ (in dieser Reihenfolge) verstehen wir die Auswahl $\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \ldots$. Entsprechend definieren wir das Produkt von mehr als zwei Auswahlen. Bei dieser Multiplikation gilt dann offenbar das assoziative, aber nicht das kommutative Gesetz.

Unter der Einheit oder Identität $\mathsf{E}$ verstehen wir die Auswahl $\mathsf{E}$: 1, 2, 3, .... Offenbar ändert sich ein Produkt von Auswahlen nicht ab, wenn man mit $\mathsf{E}$ an beliebigen Stellen beliebig oft multipliziert oder den Faktor $\mathsf{E}$ fortläßt. Ist dagegen $\mathsf{B} \neq \mathsf{E}$, so sind $\mathsf{A}$ und $\mathsf{A\,B}$ fast total verschieden; es ist nämlich für alle $\nu$ von einer Stelle ab das $\nu$-te Element von $\mathsf{A\,B}$ größer als das entsprechende Element von $\mathsf{A}$.

Definition. Ein System von Auswahlen, welches die Einheit $\mathsf{E}$ und neben je zwei Auswahlen auch deren Produkt enthält, heiße eine Gruppe.

Der Begriff der Auswahl dient uns dazu, aus Merkmalfolgen neue Merkmalfolgen abzuleiten. Wir definieren nämlich:

Definition. Ist $\mathfrak{A}$ die Merkmalfolge $a_1, a_2, \ldots$, $\mathsf{A}$ die Auswahl $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, so sagen wir, die Merkmalfolge $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ entstehe aus $\mathfrak{A}$ durch Anwendung der Auswahl $\mathsf{A}$. Wir bezeichnen diese neue Merkmalfolge mit $\mathfrak{A}\,\mathsf{A}$.

Umgekehrt können wir auch gegebene Merkmalfolgen benutzen, um mit ihnen neue Auswahlen zu definieren: Hat man nämlich eine Auswahl $\mathsf{A}$ und eine Merkmalfolge $\mathfrak{A}$ mit der Merkmalmenge $M$ und bedeutet $N$ irgend-

eine echte Teilmenge von $M$, so greife man aus $\mathfrak{A}\mathsf{A}$: $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ alle Elemente heraus, welche zu $N$ gehören: Es seien dies

$$(*) \qquad a_{\alpha_{\beta_1}}, a_{\alpha_{\beta_2}}, \ldots .$$

Dann ist $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine Auswahl, vorausgesetzt, daß überhaupt unendlich viele Elemente von $\mathfrak{A}\mathsf{A}$ zu $N$ gehören. Von ihr sagen wir, sie entstehe durch Teilung von $\mathsf{A}$ an $\mathfrak{A}$ auf $N$. Wir bezeichnen diese Auswahl mit $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{A}, N)$.[3]) Um den Fall, wo gar keine oder nur endlich viele Glieder von $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ zu $N$ gehören, nicht ausschließen zu müssen, erweitern wir jetzt nachträglich den Begriff der Auswahl durch Hinzunahme eines uneigentlichen Elementes. Wir sagen: es gebe noch eine uneigentliche, leere Auswahl $\Lambda$. Die Auswahlen, die wir eben als unendliche Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ definiert haben, nennen wir, wenn nötig, im Gegensatz zu $\Lambda$ eigentliche oder unendliche Auswahlen.

Mit $\Lambda$ operieren wir so, $\Lambda$ ist verschieden von jeder eigentlichen Auswahl. Ein Produkt von Auswahlen, welches $\Lambda$ als Faktor enthält, ist $\Lambda$. $\Lambda$ spielt also bei der Multiplikation die Rolle der 0.

Mit Hilfe von $\Lambda$ erweitern wir nun noch formal den Begriff der Teilung, indem wir definieren:

Wenn die Folge (*) entweder nur endlich viele oder gar keine Elemente enthält, so setzen wir $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{A}, N) = \Lambda$. Damit ist $\mathsf{T}$ definiert für alle $\mathsf{A}, \mathfrak{A}, N$, wofern nur $N$ eine echte Teilmenge der Merkmalmenge von $\mathfrak{A}$ ist.

## V. Die Gruppe $\hat{\mathsf{S}}$.

Wir betrachten jetzt nebeneinander ein festes System endlich oder unendlich vieler vorgelegter Merkmalfolgen: $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$. Ihre Merkmalmengen (die nicht etwa dieselbe Dimension zu haben brauchen) seien $M_1, M_2, \ldots$, die Merkmale von $M_\nu$ seien $P_1^\nu, P_2^\nu, \ldots$, die Wahrscheinlichkeiten, die wir als existierend voraussetzen, seien $W_1, W_2, \ldots$. Daneben sei eine $\Lambda$ nicht enthaltende Gruppe $\mathsf{S}$ von Auswahlen vorgelegt. Die Auswahlen, die zu $\mathsf{S}$ gehören, heißen Stellenauswahlen und werden mit $\Sigma$ bezeichnet. Dann ist jedes $\Sigma \neq \Lambda$.

Wir ordnen jetzt den vorgelegten Gegebenheiten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathsf{S}$ eine neue, gegen $\mathsf{S}$ erweiterte Gruppe von Auswahlen zu, und zwar so[4]):

---

[3]) $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{A}, M)$ wäre gleich $\mathsf{E}$ zu setzen. Geringfügiger formaler Vereinfachung halber ist diese Auswahl als Teilung durch unsere Vorschrift, für $N$ nur echte Teilmengen von $M$ zuzulassen, ausgeschlossen. Dagegen ist $\mathsf{T}(\mathsf{E}, \mathfrak{A}, N)$ zugelassen. Dies die ist in III betrachtete und als eigentliche Teilung von $\mathfrak{A}$ auf $N$ bezeichnete Auswahl.

[4]) Den vollen Sinn dieser Begriffsbildungen versteht man erst im folgenden Paragraphen über die Axiome, zu deren kurzer Formulierung sie dienen.

$\hat{\mathfrak{S}}$ sei ein System von Auswahlen mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $\hat{\mathfrak{S}}$ enthält jede Stellenauswahl.

2. Wenn $\hat{\mathfrak{S}}$ irgendeine Auswahl $\mathsf{A}$ enthält, so enthält es auch jede Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}_\nu, N)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$, wobei $N$ jede echte Teilmenge von $M_\nu$ durchläuft.

3. $\hat{\mathfrak{S}}$ ist die kleinste Gruppe (d. h. der Durchschnitt aller Gruppen) mit den Eigenschaften 1 und 2. (Abgesehen von ganz speziellen Fällen folgt aus 2 und 3, daß $\Lambda$ zu $\hat{\mathfrak{S}}$ gehört.)

Zu jedem System $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{S}$ gehört dann offenbar eine eindeutig bestimmte Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$.

Wir wollen uns etwas genauer die Rolle ansehen, welche die Teilungen in unserer Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$ spielen: $\mathfrak{S}^*$ sei das System aller Auswahlen, welche durch Teilung einer Stellenauswahl an einem $\mathfrak{G}$ entstehen. $\mathfrak{S}_1$ sei das System aller Auswahlen, welche sich als Produkte von Elementen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$ darstellen lassen[5]). $\mathfrak{S}_1^*$ bestehe aus allen Teilungen von Elementen von $\mathfrak{S}_1$ an den $\mathfrak{G}$. Rekursiv definieren wir so: $\mathfrak{S}_\nu$ enthalte alle Produkte von Elementen aus $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1^*, \ldots, \mathfrak{S}_{\nu-1}, \mathfrak{S}_{\nu-1}^*$ und $\mathfrak{S}_\nu^*$ enthalte alle Teilungen von Elementen von $\mathfrak{S}_\nu$ an den $\mathfrak{G}$. Wie man ohne weiteres erkennt, ist dann $\hat{\mathfrak{S}}$ die Vereinigungsmenge aller Systeme $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1^*, \ldots$. Durch Schluß von $\nu$ auf $\nu+1$ erkennt man ferner, daß jedes Element von $\mathfrak{S}_\nu$ sich schreiben läßt als Produkt von Stellenauswahlen $\Sigma$ und Teilungen $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}_\nu, N)$, wobei $\mathsf{A}$ zwar nicht notwendig zu $\mathfrak{S}$ gehört, jedoch Element von $\hat{\mathfrak{S}}$ ist. Für die $\mathfrak{S}_\nu^*$ ist dies selbstverständlich, da es ja Teilungen sind, ebenso für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$. Daraus folgt: jede Auswahl von $\hat{\mathfrak{S}}$ läßt sich schreiben als ein Produkt von Stellenauswahlen und von Teilungen von Auswahlen aus $\hat{\mathfrak{S}}$ an den $\mathfrak{G}_\nu$. Ein solches Produkt wollen wir als Normalprodukt bezeichnen.

Ein Normalprodukt wird also gegeben durch Angabe von Stellenauswahlen und Teilungen an den $\mathfrak{G}_\nu$ in angegebener Reihenfolge, wobei wir uns immer die Teilungen gegeben denken (nicht nur als eine Auswahl $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, sondern) durch Angabe von den drei Größen $\mathsf{A}, \mathfrak{G}_\nu, N$. Jedes Normalprodukt läßt sich also in der Form schreiben

$$\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_{\alpha_1} \mathsf{T}_1(\mathsf{A}^1, \mathfrak{G}^1, N^1) \Sigma_{\alpha_1+1} \ldots \Sigma_{\alpha_2} \mathsf{T}_2(\mathsf{A}^2, \mathfrak{G}^2, N^2) \ldots \mathsf{T}_\varrho(\mathsf{A}^\varrho, \mathfrak{G}^\varrho, N^\varrho) \ldots .\ ^{6})$$

Wir wollen verabreden, in Normalprodukten, die nicht nur aus dem Faktor $\mathsf{E}$ bestehen, diesen überflüssigen Faktor $\mathsf{E}$ fortzulassen. Sind in

---

[5]) Hierbei sind auch Produkte, welche aus einem einzigen Faktor bestehen, zugelassen. Daher enthält $\mathfrak{S}_1$ sowohl $\mathfrak{S}$ wie $\mathfrak{S}^*$.

[6]) Hierbei dürfen auch Teilungen aufeinander folgen.

einem Normalprodukt alle Faktoren $\mathsf{E}$, so wollen wir diesen Faktor nur einmal schreiben.

In einer Produktdarstellung $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \ldots$ möge die Auswahl $\mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_\nu$ als der Abschnitt von $\mathsf{A}_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $\mathsf{E}$ als der Abschnitt von $\mathsf{A}_1$ bezeichnet werden. Wenn ein Produkt $\neq \Lambda$ ist und unter den Faktoren $\mathsf{E}$ nicht vorkommt, sind dann offenbar je zwei Abschnitte als Auswahlen verschieden. Wenn also ein Normalprodukt $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \ldots$ nicht verschwindet und $\mathsf{Z}$ ein Abschnitt ist, so ist es der Abschnitt eines eindeutig bestimmten Faktors $\mathsf{A}_{\nu+1}$. Von den Faktoren $\mathsf{A}_{\nu+1}, \mathsf{A}_{\nu+2}, \ldots$ sagen wir, daß sie hinter $\mathsf{Z}$ kommen, von den anderen, daß sie $\mathsf{Z}$ vorangehen. Es kommt uns nun bei den im Normalprodukt auftretenden Teilungen $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, N)$ darauf an, wie weit die Auswahlen $\mathsf{A}$ mit dem Abschnitt von $\mathsf{T}$ übereinstimmen.

Definition. Der Abschnitt der Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, N)$ in einem vorgelegten Normalprodukt sei $\mathsf{Z}$. Wir sagen:

1. $\mathsf{T}$ schließt sich an $\mathsf{Z}$ an, wenn $\mathsf{A}$ gleich oder fast gleich $\mathsf{Z}$ ist.

2. $\mathsf{T}$ schließt sich an $\mathsf{Z}$ halb an, wenn $\mathsf{A}$ und $\mathsf{Z}$ halb gleich sind.

3. $\mathsf{T}$ schließt sich an $\mathsf{Z}$ gar nicht an, wenn $\mathsf{A}$ und $\mathsf{Z}$ total oder fast total verschieden sind.

Dann nennen wir eine Teilung $\mathsf{T}$ in einem gegebenen Normalprodukt bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$

1. regulär,

wenn $\mathsf{T} \neq \Lambda$ und gleichzeitig

$\alpha$) $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}_\nu$ ist oder

$\beta$) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\nu$, aber $\mathsf{T}$ sich an seinen Abschnitt gar nicht anschließt;

2. singulär,

wenn $\mathsf{T} \neq \Lambda$ ist und $\mathsf{T}$ sich an seinen Abschnitt anschließt und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\nu$ ist;

3. irregulär

$\alpha$) wenn $\mathsf{T}$ das leere Symbol $\Lambda$ ist oder

$\beta$) wenn $\mathsf{T}$ sich halb an seinen Abschnitt anschließt und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\nu$ ist[7]).

Ein Normalprodukt nennen wir bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$

1. regulär, wenn jede in ihm auftretende Teilung bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär ist,

2. singulär, wenn jede in ihm auftretende Teilung bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär oder singulär, aber mindestens eine bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singulär ist.

---

[7]) Jede in einem Normalprodukt auftretende Teilung ist dann bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ entweder regulär oder singulär oder irregulär.

Die bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singulären Teilungen an $\mathfrak{G}_\nu$ seien die Teilungen auf die folgenden Teilmengen von $M_\nu$: $N_1, N_2, \ldots, N_{\nu'}$. Dann sagen wir: die singuläre Normalproduktdarstellung enthalte bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ die singulären Teilungen auf $N_1, N_2, \ldots, N_{\nu'}$. Ein Normalprodukt nennen wir bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$

3. irregulär, wenn mindestens eine in dem Normalprodukt auftretende Teilung irregulär ist.

Jedes Normalprodukt ist dann entweder regulär oder singulär oder irregulär bezüglich eines jeden $\mathfrak{G}_\nu$.

Wir interessieren uns nur mittelbar für Normalproduktdarstellungen. Eigentlich interessieren wir uns nur für die Auswahlen selbst aus $\hat{\mathfrak{S}}$. So wollen wir schließlich auch endgültig nicht den Normalproduktdarstellungen, sondern den Auswahlen von $\hat{\mathfrak{S}}$ selbst einen Regularitätscharakter beilegen. Da aber im allgemeinen jede Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$ sich auf verschiedene Weise als Normalprodukt schreiben läßt, definieren wir etwas umständlich so: Eine Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$ heißt bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$:

1. regulär, wenn eine ihrer Normaldarstellungen bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär ist;

2. singulär, wenn eine ihrer Normaldarstellungen bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singulär ist;

3. irregulär, wenn jede ihrer Normaldarstellungen bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ irregulär ist.

Es ist sicher, daß dann immer einer der drei Fälle auftritt, es können aber die Fälle 1 und 2 im allgemeinen gleichzeitig auftreten. Erst nach Hinzunahme weiterer Forderungen, wie wir sie sogleich bei „Wahrscheinlichkeitstheorien“ stellen werden, ist immer nur einer der drei Fälle möglich.

Die soeben eingeführten Begriffe wollen wir mit Rücksicht auf späteres noch etwas verallgemeinern:

Definition. Ein Normalprodukt, in welchem $Z$ Abschnitt ist, heiße bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ hinter $Z$

1. regulär, wenn entweder hinter $Z$ keine Teilung mehr kommt oder wenn jede Teilung hinter $Z$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär ist;

2. singulär, wenn jede Teilung hinter $Z$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär oder singulär, aber mindestens eine singulär ist;

3. irregulär, wenn mindestens eine Teilung hinter $Z$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ irregulär ist.

Definition. $A, B$ seien Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$, beide $\neq \Lambda$. $B$ heißt für $A$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$

1. regulär, wenn entweder $B = E$ ist oder wenn es eine Normalproduktdarstellung von $AB$ gibt, in der $A$ als Abschnitt auftritt, und die hinter $A$ regulär ist;

2. singulär, wenn es eine Normalproduktdarstellung von $AB$ gibt, in der $A$ als Abschnitt auftritt, und die hinter $A$ singulär ist;

3. irregulär, wenn jede Normalproduktdarstellung von $\mathsf{AB}$, in der $\mathsf{A}$ als Abschnitt auftritt, hinter $\mathsf{A}$ irregulär ist.

Offenbar ist dann, wenn $A \neq \Lambda$, $B \neq \Lambda$ zwei Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$ sind, $\mathsf{B}$ für $\mathsf{A}$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ immer 1. regulär oder 2. singulär, oder 3. irregulär. Dabei können wieder die Fälle 1 und 2 vorläufig gleichzeitig auftreten.

Schließlich folgt: Ist bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ die Auswahl $\mathsf{A}$ regulär, so ist, wenn $\mathsf{B}$ hinter $\mathsf{A}$ regulär bzw. singulär ist, $\mathsf{AB}$ regulär bzw. singulär; ist $\mathsf{A}$ bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singulär und $\mathsf{B}$ für $\mathsf{A}$ regulär oder singulär, so ist $\mathsf{AB}$ singulär.

## VI. Die Axiome.

$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ seien Merkmalfolgen mit den Merkmalmengen $M_1, M_2, \ldots$. $M_\nu$ habe die (endlich vielen) Merkmale $P_1^\nu, P_2^\nu, \ldots$. Die Merkmalfolgen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ heißen die Grundkollektivs.

Axiom 1. Zu jedem $\mathfrak{G}_\nu$ gehört eine Verteilung.

Die Wahrscheinlichkeiten in $\mathfrak{G}_\nu$ seien bezeichnet mit $W_\nu$. Wir beschränken uns von jetzt ab auf den Fall, daß jedes Merkmal eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit hat[8]).

$\mathfrak{S}$ sei eine Gruppe von (nicht leeren) Auswahlen. Diese Auswahlen heißen die Stellenauswahlen. Zu $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{S}$ gehört dann eine weitere Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$. Unter einer Auswahl verstehen wir von jetzt ab, wenn sich aus dem Zusammenhang nichts anderes ergibt, eine Auswahl aus der Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$. Jede Auswahl ist bezüglich jedes $\mathfrak{G}_\nu$ regulär, singulär, irregulär oder gleichzeitig regulär und singulär.

Axiom II. Ist $\mathsf{A}$ eine bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ reguläre Auswahl, so gehört zur Merkmalfolge $\mathfrak{G}_\nu\mathsf{A}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ wieder eine Verteilung, und zwar dieselbe wie zu $\mathfrak{G}_\nu$.

Im wesentlichen besagt dieses Axiom folgendes: Wendet man auf $\mathfrak{G}_\nu$ eine Auswahl an, welche zusammengesetzt ist aus Stellenauswahlen und beliebigen Teilungen an anderen Grundkollektivs oder aber Teilungen am gleichen Grundkollektiv $\mathfrak{G}_\nu$, welche sich dann aber an ihren Abschnitt gar nicht anschließen dürfen, so bleiben dabei die Wahrscheinlichkeiten unverändert.

Wir fragen nun, was geschieht, wenn wir eine singuläre Auswahl auf ein Grundkollektiv anwenden. Wir werden verlangen, daß zu der neuen Merkmalfolge wieder eine Verteilung gehört. Wir können gewiß nicht frei durch eine willkürliche Vorschrift über diese neue Verteilung verfügen, denn jetzt treten eigentliche Teilungen auf, wie wir sie in III betrachtet haben. Man erhält z. B. eine singuläre Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$, wenn man nacheinander auf $\mathfrak{G}_\nu$ anwendet eine Folge von Teilungen an $\mathfrak{G}_\nu$, die sich

[8]) Diese Beschränkung ist völlig unwesentlich. Die Darstellung wird ein wenig kürzer.

jedesmal an ihre Abschnitte anschließen, Teilungen etwa auf die Teilmengen $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Aus III folgt dann, daß bei der ersten Teilung die Wahrscheinlichkeiten sich mit $\frac{1}{W_\nu(N_1)}$, bei der zweiten Teilung (die neue Merkmalmenge wird jetzt $N_1 N_2$) mit $\frac{W_\nu(N_1)}{W_\nu(N_1 N_2)}$, bei der dritten Teilung mit $\frac{W_\nu(N_1 N_2)}{W_\nu(N_1 N_2 N_3)}$ usw. multiplizieren, so daß man schließlich im ganzen nach den $r$ Teilungen die neue Merkmalmenge $N_1 N_2 \ldots N_r$ erhält und die neuen Wahrscheinlichkeiten $W_\nu \cdot \frac{1}{W_\nu(N_1 N_2 \ldots N_r)}$. Wir fordern jetzt im dritten Axiom, daß bei jeder singulären Auswahl aus $\mathfrak{G}_\nu$ die Stellenauswahlen, die Teilungen an anderen Grundkollektivs und die Teilungen an $\mathfrak{G}_\nu$, welche sich an ihre Abschnitte gar nicht anschließen, für die neue Verteilung gar nichts ausmachen. Axiom III bekommt daher die Formulierung:

Axiom III. A sei eine für $\mathfrak{G}_\nu$ singuläre Auswahl. In irgendeiner singulären Produktdarstellung von A seien die singulären Teilungen an $\mathfrak{G}_\nu$ der Reihe nach Teilungen auf die Teilmengen $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Da die neue Merkmalmenge selbstverständlich in $N_1 N_2 \ldots N_r$ enthalten ist und jede, insbesondere also auch die letzte Teilung $\neq \Lambda$ ist, folgt $N_1 N_2 \ldots N_r \neq 0$. Daher ist auch $W(N_1 N_2 \ldots N_r) \neq 0$. Wir verlangen nun: Zu $\mathfrak{G}_\nu$A gehört eine Verteilung. Die Merkmalmenge ist $N_1 \ldots N_r$ und die neuen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den $W_\nu$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{W_\nu(N_1 \ldots N_r)}$. Wenn die Merkmalfolgen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ und die Gruppe $\mathfrak{S}$ von Auswahlen diese drei Axiome erfüllen, sagen wir, es liege eine (Wahrscheinlichkeits-) Theorie vor.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, werden folgende Folgerungen angegeben:

1. Ist A für $\mathfrak{G}_\nu$ singulär und läßt sich A als ein singuläres Normalprodukt darstellen, einmal enthaltend die für $\mathfrak{G}_\nu$ singulären Teilungen auf $N_1, \ldots, N_r$, das andere Mal auf $N_1', \ldots, N_r'$, so folgt aus Axiom III:

$$N_1 \ldots N_r = N_1' \ldots N_r'.$$

2. Weil Teilungen bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ nach Verabredung immer auf echte Teilmengen von $M_\nu$ gehen, folgt, daß die erste bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singuläre Teilung des Normalproduktes die Merkmalmenge verkleinert. Für bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singuläre Auswahlen mithin ist in allen Fällen $W_\nu(N_1 \ldots N_r) \neq 1$ und daher ändern sich — im Gegensatz zu regulären Auswahlen — die Wahrscheinlichkeiten ab. Daraus folgt, daß eine für $\mathfrak{G}_\nu$ reguläre Auswahl nie gleichzeitig für $\mathfrak{G}_\nu$ singulär ist. Jede Auswahl aus $\mathfrak{S}$ ist also für jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eindeutig: regulär, singulär oder irregulär.

Darüber, was bei irregulären Auswahlen aus Grundkollektivs geschieht, wissen wir nichts.

## VII. Abgeleitete Kollektivs erster Art.

Jede Merkmalfolge, welche aus einem Grundkollektiv $\mathfrak{G}_\nu$ durch Anwendung einer für $\mathfrak{G}_\nu$ regulären oder singulären Auswahl entsteht, heiße ein (aus $\mathfrak{G}_\nu$) abgeleitetes Kollektiv erster Art.

So erzeugt jedes System von Stellenauswahlen aus jedem System vorgelegter Grundkollektivs den eindeutig bestimmten Bereich aller abgeleiteten Kollektivs erster Art. Wir operieren jetzt in diesem Bereich. Weil $\hat{\mathfrak{S}}$ die Einheit $\mathsf{E}$ enthält, so folgt, daß jedes Grundkollektiv gleichzeitig ein abgeleitetes Kollektiv erster Art ist.

Da wir vorläufig es nur mit abgeleiteten Kollektivs erster Art zu tun haben, wollen wir vorläufig dafür einfach kurz „Kollektiv" sagen. Ein Kollektiv wird also erzeugt durch ein Grundkollektiv $\mathfrak{G}$ und eine Auswahl $\mathsf{A}$. Für die Gleichheit und Verschiedenheit von Kollektivs gelten nun natürlich die Festsetzungen aus I. Danach könnten auch Kollektivs, die aus verschiedenen $\mathfrak{G}$ entstammen oder durch verschiedene Auswahlen aus den gleichen $\mathfrak{G}_\nu$ abgeleitet sind, übereinstimmen. Wir wollen zunächst zeigen, daß das erstere, abgesehen von trivialen Fällen, nicht möglich ist, daß also zu jedem Kollektiv $\mathfrak{A}$ nur ein $\mathfrak{G}$ gehört, aus dem es entstand Mit $\mathfrak{A}$ müssen wir hierbei nur eine einzige triviale Beschränkung vornehmen. Wir wollen eine Merkmalfolge als konstant bezeichnen, wenn sie nur ein einziges Merkmal hat. In dieser Bezeichnung müssen wir voraussetzen, daß das betrachtete Kollektiv nicht konstant ist.

Beweis. Weil wir voraussetzten, daß in den Grundkollektivs jedes Merkmal eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit hat und weil die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten nach den Axiomen II und III in allen abgeleiteten Kollektivs bei den wirklich auftretenden Merkmalen unverändert geblieben sind, folgt, daß jedes nicht konstante Kollektiv wenigstens zwei Merkmale aufweist und daß beide Wahrscheinlichkeiten $\neq 0$ sind. Wäre nun das nicht konstante Kollektiv $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}_\alpha \mathsf{A} = \mathfrak{G}_\beta \mathsf{B}$, so wäre andererseits die Operation $\mathsf{T}(\mathsf{B}, \mathfrak{G}_\beta, N)$ für irgendeine echte Teilmenge $N$ der Merkmalmenge von $\mathfrak{G}_\beta \mathsf{B}$ eine für $\mathfrak{G}_\alpha$ reguläre Operation. Diese Teilung würde also die Verteilung von $\mathfrak{G}_\alpha \mathsf{A}$ unverändert lassen und die von $\mathfrak{G}_\beta \mathsf{B}$ selbstverständlich abändern. Daher ist die Gleichheit $\mathfrak{G}_\alpha \mathsf{A} = \mathfrak{G}_\beta \mathsf{B}$ unmöglich. Wir haben damit den

Satz. Ein nicht konstantes Kollektiv $\mathfrak{A}$ entstammt nur einem einzigen Grundkollektiv $\mathfrak{G}$; wir bezeichnen es mit $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$.

Dagegen muß angenommen werden, daß zu einem Kollektiv $\mathfrak{A}$ mehrere Auswahlen $\mathsf{A}$ gehören, die es aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ ableiten: $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}\mathsf{A}$.

Wir fragen nun, wie die einzelnen Auswahlen, deren Einwirkung auf die Grundkollektivs wir postuliert haben, auf die abgeleiteten Kollektivs $\mathfrak{A}$

einwirken. Alle nicht irregulären Auswahlen, welche $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ erzeugen, seien $A_1, A_2, \ldots$, es sei also $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}A_1 = \mathfrak{G}A_2 = \ldots$, B sei eine Auswahl.

Definition. B heißt für $\mathfrak{A}$ regulär, wenn es ein $\nu$ gibt, so daß B für $A_\nu$ bezüglich $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ regulär ist;

singulär, wenn es ein $\nu$ gibt, so daß B für $A_\nu$ bezüglich $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ singulär ist;

irregulär, wenn B für jedes $A_\nu$ bezüglich $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ irregulär ist[9]).

Ist aber $\mathfrak{A}$ konstant, so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ nicht eindeutig bestimmt. Dann nenne man B regulär, wenn es für irgendeines der möglichen $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ regulär wird, singulär, wenn es für kein $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ regulär, aber für ein $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ singulär wird, irregulär, wenn es für jedes $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ irregulär wird.

Dann folgt

Satz. $\mathfrak{A}$ sei ein Kollektiv. Die Auswahl A sei für $\mathfrak{A}$ regulär oder singulär. $\mathfrak{A}A$ ist dann wieder ein abgeleitetes Kollektiv erster Art (also kurz ein Kollektiv). Wenn A für $\mathfrak{A}$ regulär ist, so ist die Verteilung von $\mathfrak{A}A$ gleich der Verteilung von $\mathfrak{A}$. Ist A für $\mathfrak{A}$ singulär, so ergibt sich die Verteilung von $\mathfrak{A}A$ aus Axiom III (wir brauchen dies aber nicht explizit).

Eine Stellenauswahl ist offenbar für jedes $\mathfrak{A}$ eine reguläre Auswahl.

Definition. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien zwei Kollektivs. Ist wenigstens eins konstant, so heißen sie unabhängig. Ist aber keins konstant, so definieren wir so: Die nicht irregulären Auswahlen, welche $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ erzeugen, seien $A_1, A_2, \ldots$; die, welche $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ erzeugen, seien $B_1, B_2, \ldots$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen unabhängig

1. wenn $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{G}(\mathfrak{B})$,

2. wenn zwar $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{B})$, aber mindestens ein A, etwa $A_\varrho$, von mindestens einem B, etwa $B_\sigma$, total oder fast total verschieden ist.

(Es ergibt sich aus dem Folgenden, daß dann irgendein A und irgendein B höchstens halb gleich sein können.)

---

[9]) B kann für $\mathfrak{A}$ gleichzeitig regulär und singulär sein. Dieser Schönheitsfehler ist für die Theorie unwesentlich. Man kann ihn auch beseitigen: Ist B für $\mathfrak{A}$ gleichzeitig regulär und singulär, so dürfen die bezüglich $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ singulären Teilungen, die in einem Normalprodukt von $A_\nu B$ hinter $A_\nu$ auftreten, die Merkmalmenge von $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})A_\nu = \mathfrak{A}$ nicht verkleinern. Solchen Teilungen entsprechen nun aber offenbar solche Auswahlen, die fast alle Ziffern von E enthalten und können als mit E äquivalent bezeichnet werden. Da die Multiplikation mit zu E äquivalenten Auswahlen nie eine Verteilung ändern kann, lasse man diese Teilungen entweder fort oder bezeichne sie nachträglich als regulär. Dann ist B für $\mathfrak{A}$ genau eins: regulär, singulär oder irregulär. In der späteren Mitteilung werde ich die Äquivalenzrelation berücksichtigen.

Im folgenden werden die Sätze über zwei unabhängige Kollektivs dann trivial sein, wenn wenigstens eins konstant ist. Deshalb werden wir die Beweise nur für den Fall führen, daß keins konstant ist.

Wir kommen jetzt zurück auf den Begriff der Teilung in III., den wir wiederholend noch einmal präzisieren:

Definition. Ist $\mathfrak{B}$: $b_1, b_2, \ldots$ ein Kollektiv, so greife man aus $\mathfrak{B}$ alle diejenigen Glieder $b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \ldots$ heraus, die einer vorgegebenen echten Teilmenge $N$ der Merkmalmenge von $\mathfrak{B}$ angehören. Die Auswahl $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ heißt dann entstanden durch Teilung von, an oder durch $\mathfrak{B}$ auf $N$. Wir bezeichnen diese Auswahl durch $\mathsf{T}(\mathfrak{B}, N)$. Offenbar ist diese Teilung nichts anderes, als die uns schon bekannte Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{E}, \mathfrak{B}, N)$, welche, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}) \cdot \mathsf{B}$ ist, auch geschrieben werden kann als $\mathsf{T}(\mathsf{B}, \mathfrak{G}(\mathfrak{B}), N)$.

Offenbar gehört sie zu $\hat{\mathfrak{S}}$. Ferner ist offenbar, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unabhängig sind, eine Teilung durch $\mathfrak{B}$ immer eine reguläre Auswahl für $\mathfrak{A}$, eine Teilung durch $\mathfrak{A}$ ist hingegen selbstverständlich eine singuläre Auswahl für $\mathfrak{A}$. Daraus ergeben sich folgende Hauptsätze:

Hauptsatz 1. *Wendet man auf ein abgeleitetes Kollektiv erster Art eine Stellenauswahl an, so erhält man ein abgeleitetes Kollektiv erster Art mit unveränderter Verteilung.*

Hauptsatz 2. *Wendet man auf ein abgeleitetes Kollektiv erster Art eine Teilung durch ein unabhängiges Kollektiv an, so erhält man wieder ein abgeleitetes Kollektiv erster Art mit unveränderter Verteilung.*

Hauptsatz 3. *Teilt man ein Kollektiv erster Art durch sich selbst, so erhält man wieder ein abgeleitetes Kollektiv erster Art. Die Verteilung ergibt sich in diesem Falle bereits aus III.*

Folgerung. Wendet man, von Grundkollektivs oder von abgeleiteten Kollektivs erster Art ausgehend, die drei Operationen der drei Hauptsätze, Stellenauswahl, Teilung durch unabhängige Kollektivs und Teilung durch sich selbst, nacheinander beliebig oft an, so kommt man aus dem Bereich der abgeleiteten Kollektivs erster Art nicht heraus. Änderungen in der Verteilung treten nur auf bei den Teilungen von Kollektivs durch sich selbst. Diese Änderungen ergeben sich aus III.

Offenbar gilt schließlich

Satz. $\mathfrak{A}$ sei ein abgeleitetes Kollektiv erster Art, $\mathsf{A} \neq \mathsf{E}$ eine für $\mathfrak{A}$ nicht irreguläre Auswahl. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}A$ unabhängig. Etwas allgemeiner gilt: Sind $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$ zwei fast total oder total verschiedene, für $\mathfrak{A}$ nicht irreguläre Auswahlen, so sind $\mathfrak{A}\mathsf{A}_1$ und $\mathfrak{A}\mathsf{A}_2$ unabhängig. Insbesondere gilt dies also für Stellenauswahlen.

Aus Hauptsatz 2 folgt, weil zwei Grundkollektivs $\mathfrak{G}_\alpha$, $\mathfrak{G}_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ unabhängig sind, daß sie verschieden sind, es sei denn, daß beide konstant sind. Wenn wir nun solche Theorien, in denen zwei Grundkollektivs konstant sind, ausschließen, dann sind also je zwei formal verschiedene Grundkollektivs wirklich verschieden.

## VIII. Verbindung.

Die wichtigste Operation der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber die Verbindung. Dieselbe soll jetzt besprochen werden. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Merkmalfolgen $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$; $\mathfrak{B}$: $b_1, b_2, \ldots$. Die Merkmale von $\mathfrak{A}$ seien die $\varrho$-dimensionalen Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$, sie bilden die Merkmalmenge $M$. Die Merkmale von $\mathfrak{B}$ seien die $\sigma$-dimensionalen Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$, sie bilden die Merkmalmenge $U$.

Hat $P_\varkappa$ die Koordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und $Q_\lambda$ die Koordinaten $q_1, \ldots, q_\sigma$, so verstehen wir unter $P_\varkappa \times Q_\lambda$ den $\varrho+\sigma$-dimensionalen Punkt $r_1, \ldots, r_{\varrho+\sigma}$, wobei $r_1 = p_1, \ldots, r_\varrho = p_\varrho$, $r_{\varrho+1} = q_1, \ldots, r_{\varrho+\sigma} = q_\sigma$ ist. Unter der Punktmenge $M \times U$ verstehen wir die Gesamtheit der $kl$ Punkte $P_\varkappa \times Q_\lambda$. Unter der Merkmalfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verstehen wir die folgende: $c_1, c_2, \ldots$, wobei $c_\nu$ gleich dem Produkte der Punkte ist, die hier mit $a_\nu, b_\nu$ bezeichnet sind, also $c_\nu = a_\nu \times b_\nu$. Die Merkmalmenge von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist also $\varrho+\sigma$-dimensional. Sie ist gewiß in $M \times U$ enthalten. Entsprechend definieren wir das Produkt von mehr als zwei Merkmalfolgen. Bei dieser Multiplikation gilt das assoziative, aber nicht das kommutative Gesetz. Statt Produkt sagen wir auch Verbindung.

Wir betrachten jetzt Produkte von Kollektivs erster Art. Die Sätze, auf welche wir unsere Überlegungen stützen, sind diese: Teilt man ein Kollektiv $\mathfrak{A}$ erster Art durch ein zweites unabhängiges Kollektiv erster Art, so erhält man aus $\mathfrak{A}$ ein Kollektiv erster Art mit der gleichen Verteilung wie $\mathfrak{A}$. Ferner: Erzeugt die gleiche Auswahl A aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ neue Kollektivs erster Art, so sind mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die neuen ausgewählten Kollektivs wieder unabhängig.

Wir beweisen nun

Satz. *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ unabhängige Kollektivs erster Art. Man bilde $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Dann gehört zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ wieder eine Verteilung. Nennt man die Wahrscheinlichkeiten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Reihe nach $W_1, W_2, W_3$, so ist*

$$W_3(P_\varkappa \times Q_\lambda) = W_1(P_\varkappa)\, W_2(Q_\lambda).$$

Beweis. Man teile $\mathfrak{B}$ auf die Punktmenge, welche allein aus dem Punkt $Q_\lambda$ besteht. Man erhält die Auswahl A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. In $\mathfrak{A}$ A: $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ greife man die Elemente heraus, welche $P_\varkappa$ sind, es seien $a_{\alpha_{\beta_1}}, a_{\alpha_{\beta_2}} \ldots$. Dann ist, weil $\mathfrak{A}$ A dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{A}$ hat, $\lim \frac{\nu}{\beta_\nu} = W_1(P_\varkappa)$ und

$\lim \frac{\beta_\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = W_2(Q_\lambda)$. Daraus folgt $\lim \frac{\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = \lim \left( \frac{\nu}{\beta_\nu} \frac{\beta_\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} \right)$ existiert und ist gleich $W_1(P_\varkappa) W_2(Q_\lambda)$. Andererseits ist aber $\lim \frac{\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = W_3(P_\varkappa \times Q_\lambda)$, w.z.b.w.

Entsprechend ergibt sich als Resultat der Verbindung von mehr als zwei unabhängigen Kollektivs $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, mit den Wahrscheinlichkeiten $W_1, \ldots, W_n$ und den Merkmalmengen $M_1, \ldots, M_n$ von den Dimensionen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ eine neue Merkmalfolge von der Dimension $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$ mit der Merkmalmenge $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Zu der neuen Merkmalfolge $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ gehört wieder eine Verteilung, und es ist die neue Wahrscheinlichkeit

$$W(P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n) = W_1(P^1) W_2(P^2) \ldots W_n(P^n),$$

wobei $P^r$ ein Merkmal von $\mathfrak{A}_r$ bezeichnet.

Definition. Jedes Produkt unabhängiger Kollektivs erster Art nennen wir ein Kollektiv zweiter Art.

Wir denken uns also ein Kollektiv zweiter Art nicht nur als Merkmalfolge gegeben, sondern als ein Produkt von mindestens zwei Faktoren, welche Kollektivs erster Art sind[10]).

Eine Merkmalfolge kann dann durchaus als Merkmalfolge gleich einem Kollektiv zweiter Art und gleichzeitig gleich einem Kollektiv erster Art sein. Diese sind uns dann eben nur formal verschieden in ihrer Darstellung.

Definition. Ist $\mathfrak{A}$ ein Kollektiv zweiter Art, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ ($\mathfrak{A}_r$ sind Kollektivs erster Art), $\mathfrak{B}$ ein Kollektiv erster Art, so heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unabhängig, wenn jedes $\mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{B}$ unabhängig sind.

Sind $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m$ zwei Kollektivs zweiter Art. so heißen sie unabhängig, wenn jedes $\mathfrak{A}_r$ zu jedem $\mathfrak{B}_\mu$ unabhängig ist.

Damit ist für je zwei Kollektivs erster oder zweiter Art bestimmt, wann sie unabhängig sind.

Definition. Sind $M_1, \ldots, M_n$ die Merkmalmengen von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, so sollen die Teilmengen von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, welche sich als Produkt $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$ darstellen lassen, wo $N_\varrho$ eine Teilmenge von $M_\varrho$ ist, als zulässige Teilmengen der Merkmalmenge von $\mathfrak{A}$, Teilungen von $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ auf zulässige Teilmengen sollen als zulässige Teilungen be-

[10]) Hiernach besteht keine vollständige Symmetrie zwischen Kollektivs erster Art und Kollektivs zweiter Art. Die ersteren sind Merkmalfolgen, die letzteren können nicht allein als eine Merkmalfolge gegeben werden, sondern als ein Produkt von solchen. Diese Asymmetrie ist nicht wesentlich. Man kann sie vermeiden, indem man gleichzeitig alle verschiedenen möglichen Produktdarstellungen von Kollektivs zweiter Art betrachtet. Die Darstellung wird dann etwas umständlicher. Ferner erscheint mir dies nicht als wichtig genug. Daher gebe ich diese einfachere asymmetrische Darstellung.

zeichnet werden. Teilmengen und Teilungen von Kollektivs erster Art sollen sämtlich als zulässig bezeichnet werden.

Jedes Kollektiv erster oder zweiter Art werde als ein Kollektiv bezeichnet. Der Bereich dieser Kollektivs wird nicht mehr wesentlich erweitert werden.

Offenbar ergeben sich dann folgende Sätze:

Hauptsatz 1. *Eine Stellenauswahl an einem Kollektiv erzeugt wieder ein Kollektiv mit unveränderter Verteilung.*

Beweis. Für Kollektivs erster Art ist der Satz bewiesen. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n$ ein Kollektiv zweiter Art und $\Sigma$ die Stellenauswahl, so ist $\mathfrak{A}\Sigma = \mathfrak{A}_1\Sigma \dots \mathfrak{A}_n\Sigma$. Die $\mathfrak{A}_\nu\Sigma$ sind jetzt wieder Kollektivs erster Art mit der gleichen Verteilung wie $\mathfrak{A}_\nu$, und zwar sind je zwei wieder unabhängig.

Hauptsatz 2. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *seien zwei unabhängige Kollektivs. Ist* $\mathsf{T}$ *eine zulässige Teilung von* $\mathfrak{K}_2$, *so ist* $\mathfrak{K}_1\mathsf{T}$ *wieder ein Kollektiv und wieder mit derselben Verteilung wie* $\mathfrak{K}_1$.

Beweis. Sind $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ beide erster Art, so ist der Satz bewiesen. Sei also $\mathfrak{K}_1$ von zweiter Art, $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{K}_2$ von erster Art. Dann ist $\mathfrak{K}_1\mathsf{T} = \mathfrak{A}_1\mathsf{T} \dots \mathfrak{A}_n\mathsf{T}$ und die $\mathfrak{A}_\nu\mathsf{T}$ sind unabhängig und haben dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{A}_\nu$.

Ist $\mathfrak{K}_1$ von erster oder zweiter Art, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_m$ von zweiter Art, so schließe man durch den Schluß von $m$ auf $m+1$.

Hauptsatz 3. *Macht man mit einem Kollektiv eine zulässige Teilung, so erhält man wieder ein Kollektiv* (*die Verteilung folgt bereits aus III* [11]).

Beweis. Für Kollektivs erster Art ist der Satz bewiesen. Sei also $\mathfrak{K}$ von zweiter Art, $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n$. Die Teilung gehe auf die Teilmenge $N_1 \times \dots \times N_n$. Man wende nun erst auf $\mathfrak{K}$ die Teilung $\mathsf{T}(\mathfrak{A}_1, N_1)$ an. Diese Auswahl erzeugt aus $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n$ die neuen Merkmalfolgen $\mathfrak{A}_1^*, \dots, \mathfrak{A}_n^*$. Diese sind nach Hauptsatz 2 und 3 aus VII wieder Kollektivs erster Art, und zwar sind sie wieder unabhängig. Dann mache man die Auswahl $\mathsf{T}(\mathfrak{A}_2^*, N_2)$ und schließe analog weiter.

[11]) Ich werde versuchen, diese Einschränkung, daß nur zulässige Teilungen Kollektivs erzeugen, aufzuheben. Die Behandlung wird dann aber komplizierter. Vielleicht gelingt es durch eine neue Operation: Addition von Auswahlen und von Kollektivs. Jedoch erhält man auch mit der Einschränkung die wichtigen Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. An dieser Stelle ist die Arbeit von R. von Mises ergänzungsbedürftig. Auch dort kann aus den vorausgesetzten Axiomen für die Faktoren nicht die Gültigkeit des von Misesschen Axioms 2 für beliebige Teilmengen der Merkmalmenge des Produktes, sondern auch nur für zulässige Teilmengen geschlossen werden.

Zusatz. Macht man mit einem Kollektiv eine beliebige (also auch nicht zulässige) Teilung, so kann man selbstverständlich III anwenden. Es gibt also wieder eine Verteilung und man kann dieselbe angeben. Jedoch ist die neue Merkmalfolge nicht notwendig ein Kollektiv, und man kann z. B. nicht schließen, daß eine Stellenauswahl die Verteilung weiter unverändert läßt.

Hauptsatz 4. *Verbindet man unabhängige Kollektivs* $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ *mit den Merkmalmengen* $M_1, \ldots, M_n$ *und den Wahrscheinlichkeiten* $W_1, \ldots, W_n$, *so erhält man ein Kollektiv mit der Merkmalmenge* $M_1 \times \ldots \times M_n$. *Die neue Wahrscheinlichkeit ist*

$$W(P^1 \times \ldots \times P^n) = W_1(P^1) \ldots W_n(P^n),$$

*wobei* $P^\nu$ *irgendein Merkmal von* $\mathfrak{K}_\nu$ *bedeutet.*

Beweis. Ist $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m$, ..., $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_r$, so ist wegen der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_n \mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_r$. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ sind jetzt je zwei der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{Z}$ unabhängige Kollektivs erster Art. Der Satz über die Wahrscheinlichkeiten folgt jetzt aus dem entsprechenden Satze für Kollektivs erster Art.

Zu beachten ist, daß zulässige Teilmengen der Merkmalmenge von $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ jetzt auf Grund der früheren Definition nur solche Punktmengen sind, welche sich als Produkte der Teilmengen der Merkmalmengen von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_r$ oder, was dasselbe ist, welche sich als Produkte zulässiger Teilmengen von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ darstellen lassen.

Schließlich gilt der fast selbstverständliche Satz: Sind zwei untereinander unabhängige Kollektivs zu einem dritten unabhängig, so ist es auch ihr Produkt.

## IX. Hinzunahme gemischter Kollektivs.

Ein Kollektiv ist für uns bisher entweder ein abgeleitetes Kollektiv erster Art oder ein Kollektiv zweiter Art. Jetzt soll ein letztes Mal, und zwar nicht mehr sehr wesentlich, der Begriff des Kollektivs erweitert werden, indem wir alle diejenigen Merkmalfolgen, die aus einem Kollektiv durch Mischung[12]) entstehen, ebenfalls noch als Kollektivs auffassen.

Definition. Unter einem gemischten Kollektiv verstehen wir eine Merkmalfolge, welche aus einem Kollektiv erster oder zweiter Art durch Mischung entsteht. Wir denken uns aber ein gemischtes Kollektiv gegeben (nicht nur durch eine Merkmalfolge, sondern) durch ein Kollektiv erster

[12]) Vgl. die Schlußbemerkung von II.

oder zweiter Art, das Originalkollektiv, und eine Merkmaltransformation[13]). Wir nennen ein gemischtes Kollektiv von erster oder zweiter Art, je nachdem das Originalkollektiv von erster oder zweiter Art ist.

Nach II gehört zu jedem gemischten Kollektiv eine Verteilung.

Definition. Eine Teilmenge der Merkmalmenge eines gemischten Kollektivs heiße zulässig, wenn es eine zulässige Teilmenge der Merkmalmenge des Originalkollektivs gibt, aus der sie durch die Mischungstransformation entsteht. Eine Teilung an einem gemischten Kollektiv heiße zulässig, wenn es eine Teilung auf eine zulässige Teilmenge ist. Offenbar ist dann bei gemischten Kollektivs erster Art jede Teilmenge und jede Teilung zulässig.

Definition. Zwei gemischte Kollektivs heißen unabhängig, wenn die Originalkollektivs unabhängig sind.

Wir verstehen nunmehr endgültig unter einem Kollektiv ein Originalkollektiv oder ein gemischtes Kollektiv. Je zwei von ihnen sind dann entweder unabhängig oder nicht. Zwei Produkte, wo jeder Faktor des einen von jedem Faktor des anderen unabhängig ist, sind wieder unabhängig.

Es gelten dann, wie jetzt leicht folgt, die Hauptsätze 1 bis 4 von VIII. mit wörtlich unverändertem Wortlaut im Bereich aller Kollektivs. Durch die Operationen: Stellenauswahl, zulässige Teilung durch unabhängige Kollektivs, zulässige Teilung durch das Kollektiv selbst, Verbindung und (jetzt auch) Mischung kommt man also, von Kollektivs ausgehend, aus dem Bereiche aller Kollektivs nicht heraus.

## X. Beispiel einer Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es sei $\mathfrak{G}_1$: 1, 1, 1, ...; $\mathfrak{G}_2$: 1, 0, 1, 0, .... $\mathfrak{S}$ bestehe allein aus der Einheit E. Wir behaupten: Diese Grundkollektivs und diese Gruppe von Stellenauswahlen genügen den Axiomen I, II, III. Daß Axiom I erfüllt ist, ist klar. Wir stellen nun die Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$ auf. Ist A: 1, 3, 5, ..., B: 2, 4, 6, ..., welche durch Teilung von $\mathfrak{G}_2$ entstehen, so ergibt sich leicht $\hat{\mathfrak{S}}$ als die Gesamtheit aller Produkte von Elementen A und B: $A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}A^{\alpha_3}B^{\alpha_4}\ldots[A^0=B^0=E]$. Wendet man eine solche Auswahl auf $\mathfrak{G}_2$ (für $\mathfrak{G}_1$ ist das selbstverständlich) an, so bekommt man ein konstantes Kollektiv. Daraus folgt, daß trivialerweise die Axiome II und III erfüllt sind.

---

[13]) Die hierdurch bedingte neue Asymmetrie läßt sich wiederum bei etwas weitläufigerer Darstellung vermeiden.

Der Einfachheit halber schließen wir die identische Transformation als Merkmaltransformation nicht aus. Die gemischten Kollektivs umfassen dann alle (auch die im wesentlichen nicht gemischten) Kollektivs. Die letzteren stimmen mit ihren Originalkollektivs überein.

## XI. Durch Zusatzaxiom über die Stellenauswahl spezialisierte Theorie und Gesetze der großen Zahlen.

Die hier angegebene Theorie ist insofern abstrakt, als darüber, welche Auswahlen denn nun Stellenauswahlen sind, nichts vorausgesetzt wurde. Nun hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung bisher immer solche Fragen beantwortet wie z. B. diese: Wie wahrscheinlich ist es, daß beim Würfeln mit einem Würfel auf zwei nacheinander fallende Fünfen eine 1 folgt? In unserer abstrakten Theorie lassen sich diese und ähnliche, wie überhaupt jede konkrete Frage nur durch einen hypothetischen Satz beantworten: „Wenn gewisse Auswahlen für gewisse Merkmalfolgen als Grundkollektivs Stellenauswahlen sind, ...“

Will man solche hypothetischen Sätze formal vermeiden, so kann das geschehen, indem man weitere Axiome postuliert, darüber, welche Auswahlen Stellenauswahlen sind. Eine solche durch ein Zusatzaxiom spezialisierte Theorie, in welcher die oben angedeuteten Fragen beantwortet werden, soll jetzt besprochen werden.

Die Auswahl $\varkappa, \varkappa+1, \ldots$ bezeichne man mit $\mathsf{P}_\varkappa$, die Auswahl $1, 1+\lambda, 1+2\lambda, \ldots$ mit $\Delta_\lambda$. Dann wird z. B. $\mathsf{P}_\varkappa \Delta_\lambda$ die Auswahl $\varkappa, \varkappa+\lambda, \varkappa+2\lambda, \ldots$. Neben den Axiomen I, II, III fordere man jetzt noch folgendes Axiom IV: $\mathsf{P}_\varkappa$ $[\varkappa = 1, 2, \ldots]$ und $\Delta_\lambda$ $[\lambda = 1, 2, \ldots]$ sind Stellenauswahlen.

Dann sagen wir, es liege eine spezielle Theorie vor. Dann sind auch die Produkte von P's und $\Delta$'s Stellenauswahlen. Daraus folgt: Jede arithmetische Progression erzeugt eine Stellenauswahl.

Ist also $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$ ein Kollektiv in dieser speziellen Theorie, so folgt, daß neben $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ auch

$$\mathfrak{A}_2\colon\ a_2, a_3, \ldots,$$
$$\mathfrak{A}_3\colon\ a_3, a_4, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Kollektivs und zwar unabhängige Kollektivs sind, von denen jedes die gleiche Verteilung hat wie $\mathfrak{A}$. Die Betrachtung der Verbindung $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_{2+\nu}$ liefert dann z. B. die Beantwortung der Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß in $\mathfrak{A}$ die Merkmale $P_\varkappa, P_\lambda$ aufeinanderfolgen und dann im Abstand $\nu$ das Merkmal $P_\varrho$ folgt. Diese Wahrscheinlichkeit ist $W(P_\varkappa)\,W(P_\lambda)\,W(P_\varrho)$, unter $W$ die Wahrscheinlichkeit in $\mathfrak{A}$ verstanden. Ferner ergibt sich z. B. die Wahrscheinlichkeit für $P_\varrho$, wenn man schon weiß, daß das $\nu+1$-te vorhergehende (es könnte auch das folgende sein) und das $\nu$-te vorhergehende Element $P_\varkappa, P_\lambda$ sind, als $W(P_\varrho)$.

Etwas ungenauer ausgedrückt ergibt sich, wie dieses Beispiel statt des allgemeinen Falles zur Genüge zeigt: Wählt man aus einem Kollektiv eine

neue Merkmalfolge aus, indem man zur Auswahl nur die Merkmale der dem auszuwählenden Element vorhergehenden oder folgenden Elemente benutzt — diese Benutzung muß aber geschehen durch Verknüpfung der $\mathsf{P}$ und $\Delta$ —, so ergibt sich ein neues Kollektiv mit unveränderter Verteilung.

R. von Mises hat erkannt, daß mittels der fünf Grundoperationen: Stellenauswahl, Teilung an sich selbst, Teilung an unabhängigen Kollektivs, Verbindung und Mischung alle wichtigen Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich erledigen lassen. Um zwei der wichtigsten Beispiele zu behandeln, wollen wir jetzt nach dem Vorbilde von R. von Mises die Gesetze der großen Zahlen — wenigstens, nur der kürzeren Ausdrucksweise wegen, in zwei konkreten Spezialfällen — behandeln. Für das erste Gesetz der großen Zahlen beginnen wir mit einigen vorbereitenden Begriffen: $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ seien unabhängige Kollektivs. Ihre Merkmalräume mögen dieselbe Dimension haben. $P^r$ bedeute ein Merkmal der Merkmalmenge $M_r$ von $\mathfrak{K}_r$. Durch Verbindung entsteht das neue Kollektiv $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$. Die Merkmale von $\mathfrak{K}$ sind die Punkte $P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n$ und die Merkmalmenge ist $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Mit $\mathfrak{K}$ mache man jetzt eine Mischung, indem man $P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n$ ersetzt durch $P^1 + P^2 + \ldots + P^n$ [14]). Aus $\mathfrak{K}$ entsteht so das neue Kollektiv $\bar{\mathfrak{K}}$. Wir sagen $\bar{\mathfrak{K}}$ sei entstanden durch Addition der unabhängigen Kollektivs $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ und schreiben kurz $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n$.

Man transformiere $\bar{\mathfrak{K}}$ noch einmal, indem man jedes Merkmal $P$ von $\bar{\mathfrak{K}}$ durch $\frac{P}{n}$ ersetzt. Aus $\bar{\mathfrak{K}}$ entsteht so $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$. Da es durch eine Mischung entsteht, ist es wieder ein Kollektiv, wir sagen $\bar{\bar{\mathfrak{K}}}$ sei aus $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ durch Durchschnittsbildung entstanden und schreiben $\bar{\bar{\mathfrak{K}}} = \frac{\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n}{n}$.

Gehen wir nun von einem einzigen Kollektiv $\mathfrak{A}$ aus, so sind in unserer speziellen Theorie die Folgen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} = a_1, a_2, \ldots$; $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}\,\mathsf{P}_2 = a_2, a_3 \ldots; \ldots$; $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}\,\mathsf{P}_n = a_n, a_{n+1}, \ldots$ wieder Kollektivs, und zwar sind sie voneinander unabhängig.

Dann sind $\bar{\mathfrak{A}}_n = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ und $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}_n = \frac{\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n}{n}$ wieder Kollektivs. Wir sagen: $\mathfrak{A}_n$ entstehen aus $\mathfrak{A}$ durch $n$-fache Summenbildung. $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}_n$ durch $n$-fache Durchschnittsbildung.

Ist $\mathfrak{K}$ ein Kollektiv mit den $\varrho$-dimensionalen Merkmalen $P_1, \ldots, P_l$ und den Wahrscheinlichkeiten $W$, so nennen wir den $\varrho$-dimensionalen

[14]) Unter der Summe von Punkten und unter dem Produkt von Punkten mit Konstanten verstehen wir die Punkte, die durch Addition und durch Multiplikation der einzelnen Koordinaten entstehen. Das Quadrat eines Punktes erhält man durch Quadrieren der einzelnen Koordinaten, die Quadratwurzel, indem man aus jeder einzelnen Koordinate die Quadratwurzel zieht.

Punkt $\sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda W(P_\lambda) = T(\mathfrak{K})$ den Mittelwert von $\mathfrak{K}$. Aus dieser Bedeutung von $T$ folgt sofort $\sum_{\lambda=1}^{l} (P_\lambda - T) W(P_\lambda) = 0$.

Neben dem Begriff des Mittelwertes brauchen wir noch den Begriff der Streuung: Der $\varrho$-dimensionale Punkt $\sqrt{\sum (P_\lambda - T)^2 W(P_\lambda)} = S(\mathfrak{K})$ heißt die Streuung von $\mathfrak{K}$.

Sind dann $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ irgendwelche unabhängige Kollektivs gleicher Dimension mit den Mittelwerten $T^1, \ldots, T^n$, so ist

$$T(\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n) = \sum_{P^1 \ldots P^n} (P^1 + \ldots + P^n) W_1(P^1) \ldots W_n(P^n)$$

summiert über alle Punktsysteme $P^1, \ldots, P^n$. Dies ist aber gleich

$$\sum_{P^1} P^1 W_1(P^1) \cdot [\sum_{P^2 \ldots P^n} W_2(P^2) \ldots W_n(P^n)] + \ldots$$
$$+ \sum_{P^n} P^n W_n(P^n) [\sum W_1(P^1) \ldots W_{n-1}(P^{n-1})] = T^1 + \ldots + T^n$$

weil

$$\sum_{P^2 \ldots P^n} W_2(P^2) W_3(P^3) \ldots W_n(P^n) = \sum_{P^2} W_2(P^2) \ldots \sum_{P^n} W_n(P^n) = 1$$

ist, ebenso die übrigen eingeklammerten Faktoren. Ferner ist

$$T\left(\frac{\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n}{n}\right) = \frac{1}{n} T(\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n), \quad \text{also gleich} \quad \frac{T^1 + \ldots + T^n}{n}.$$

Wir beweisen nun den Satz, daß das Streuungsquadrat eines Kollektivs, welches durch Addition von unabhängigen Kollektivs entsteht, gleich der Summe der Streuungsquadrate ist, also

$$(S(\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n))^2 = (S(\mathfrak{K}_1))^2 + \ldots + (S(\mathfrak{K}_n))^2.$$

Denn

$$(S(\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n))^2 = \sum_{P^1 \ldots P^n} [(P^1 + \ldots + P^n) - (T^1 + \ldots + T^n)]^2 W_1(P^1) \ldots W_n(P^n)$$
$$= \sum_{P^1} (P^1 - T^1)^2 W_1(P^1) [\sum_{P^2 \ldots P^n} W_2(P^2) \ldots W_n(P^n)] + \ldots$$
$$+ \sum (P^n - T^n)^2 W_n P^n [\sum_{P^1 \ldots P^{n-1}} W_1(P^1) \ldots W_{n-1}(P^{n-1})]$$
$$+ 2 \sum_{P^1, P^2} (P^1 - T^1)(P^2 - T^2) W_1(P^1) W_2(P^2) [\sum_{P^3 \ldots P^n} W_3(P^3) \ldots W_n(P^n)] + \ldots$$

Hier folgen dem letzten entsprechende Glieder, in denen das Produkt von zwei Differenzen $(P^\varkappa - T^\varkappa)(P^\lambda - T^\lambda)$ auftritt. Solche Glieder sind aber 0, denn es ist z. B. das letzte ausgeschriebene Glied gleich

$$\sum (P^1 - T^1) W_1(P^1) \sum (P^2 - T^2) W_2(P^2) \cdot 1 = 0,$$

da die beiden ersten Faktoren verschwinden, also erhält man, da rechts alle eckigen Klammern den Wert 1 haben: $(S(\mathfrak{K}_1))^2 + \ldots + (S(\mathfrak{K}_n))^2$, was zu beweisen war.

Offenbar folgt daraus für die Durchschnittsbildung

$$\left(S\left(\frac{\mathfrak{K}_1+\ldots+\mathfrak{K}_n}{n}\right)\right)^2=\frac{(S(\mathfrak{K}_1))^2+\ldots+(S(\mathfrak{K}_n))^2}{n^2}.$$

Wir wenden diesen Satz an auf die Durchschnittsbildung von unabhängigen Kollektivs mit gleicher Streuung. Wir wollen speziell als Kollektivs wählen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, die wir oben aus $\mathfrak{A}$ erzeugt haben. Dann ist $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$, und $\overline{\mathfrak{A}}_n$: $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}, \frac{a_2+\ldots+a_{n+1}}{n}, \ldots$. Weil jetzt $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die gleiche Verteilung, also erst recht die gleiche Streuung $S(\mathfrak{A})$ haben, folgt $S(\overline{\mathfrak{A}}_n)=S\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$. Bildet man mithin den $n$-ten Durchschnitt mit wachsendem $n$, so ergibt sich dabei die Streuung als ein $\varrho$-dimensionaler Punkt, welcher nach 0 konvergiert.

Aus diesem Ergebnis folgt jetzt, wie allgemein bekannt, das Gesetz der großen Zahlen so: Um den Mittelwert $T(\mathfrak{A})$ lege man die feste Kugel mit dem Radius $R$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Merkmal von $\overline{\mathfrak{A}}$ in das Innere dieser Kugel fällt, sei $W_{ni}$, die, daß es in das Äußere fällt, $W_{na}$. Wir berücksichtigen nun, daß $T(\mathfrak{A})$ gleichzeitig der Mittelwert von $\overline{\mathfrak{A}}_n$ ist für jedes $n$. Dann folgt aus der Definition der Streuung, daß die Streuung des Kollektivs $\mathfrak{A}$ vom Nullpunkt mindestens die Entfernung $\sqrt{W_{na}}R^2$ hat. Weil aber der Radius $R$ fest angenommen war, folgt dann, daß bei wachsendem $n$ die Wahrscheinlichkeit $W_{na}$ nach 0, also $W_{ni}$ nach 1 konvergiert. Das ist das erste Gesetz der großen Zahlen. Man kann es ungefähr so aussprechen: Bei $n$-facher Durchschnittsbildung an einem vorgelegten Kollektiv geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Merkmal in das Innere einer unabhängig von $n$ vorgelegten Kugel um den Mittelwert des Kollektivs fällt, mit wachsendem $n$ nach 1, wird also mit wachsendem $n$ fast zur Sicherheit.

Wir wollen noch kurz einen speziellen Fall des zweiten Gesetzes der großen Zahlen behandeln. Auf einem Tische liegen drei Würfel $A, B, C$. Wir nehmen an, daß bei jedem Würfel jeder Augenzahl eine Wahrscheinlichkeit zukommt[15]), welche experimentell festgestellt ist und angibt, welche Wahrscheinlichkeiten sich ergeben, wenn man mit diesem Würfel unendlich oft würfelt. Bei dem ersten Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten der Ziffern 1 bis 6: $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, beim zweiten: $\beta_1, \ldots, \beta_6$, beim dritten: $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$. Jemand greift nun einen Würfel nach Belieben heraus und wirft $n$-mal

[15]) Ich glaube allerdings, daß es sowohl den Tatsachen wie unseren Vorstellungen besser entsprechen würde, wenn man annimmt, daß die den Augenzahlen zukommenden Wahrscheinlichkeiten nur besagen, daß diese Werte „fast mit Sicherheit" zu erwarten sind, so daß also natürlich den einzelnen Kollektivs, aber nicht den ganzen Würfeln mit Sicherheit Wahrscheinlichkeitswerte zugeordnet werden können.

nacheinander. Es erscheine etwa $n$-mal die 5. Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem ersten Würfel $A$ gewürfelt wurde?

Damit wir eine Frage in unserer Theorie erhalten, müssen wir dieser Fragestellung erst in unserer Theorie ein neues Problem zuordnen, das wir für äquivalent halten. Dazu müssen wir uns jedenfalls an Stelle des einzelnen Vorgangs eine (unendliche) Merkmalfolge konstruieren. Denken wir uns also den Vorgang: Ergreifen eines der drei Würfel und danach $n$-faches Werfen mit ihm und Ablesen der Augen unendlich oft wiederholt. Wir erhalten dann eine unendliche Merkmalfolge $\mathfrak{F}$. Die Merkmale sind $n+1$-dimensional. Die erste Komponente ist das Merkmal $A, B, C$, die zweite bis $(n+1)$-te Komponente sind Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ der Reihe 1 bis 6. Wir machen jetzt folgende Hypothesen: 1. Achtet man in der Folge $\mathfrak{F}$ nur auf die ersten Komponenten der Merkmale, so ergibt sich für $A, B, C$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, also $\frac{1}{3}$. 2. Achtet man nur auf die Merkmale, in denen die erste Komponente $A$ bzw. $B$ bzw. $C$ ist, und hierin nur auf die $(\nu+1)$-te Komponente, also $a_\nu$, so ergibt sich eine Merkmalfolge der Merkmale 1 bis 6 mit den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_6$ bzw. $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$. 3. Die $n$ Merkmalfolgen, die man erhält, wenn man nur alle die Glieder nimmt, in denen die erste Komponente $A$ bzw. $B$ bzw. $C$ ist, und dort die $(\nu+1)$-te Komponente $a_\nu$ betrachtet, genügen, angesehen als Grundkollektivs, wenn man das Element $\mathsf{E}$ als Gruppe $\mathfrak{S}$ annimmt, den Axiomen I, II, III (hier braucht man Axiom IV nicht zu fordern). Dann ergeben sich für die Folge folgende Wahrscheinlichkeiten: Für die $n+1$-dimensionalen Merkmale $P$: $A, a_1, \ldots, a_n$ bzw. $B, a_1, \ldots, a_n$ bzw. $C, a_1, \ldots, a_n$ der Reihe nach: $\frac{1}{3}\alpha_{a_1}\ldots\alpha_{a_n}$ bzw. $\frac{1}{3}\beta_{a_1}\ldots\beta_{a_n}$ bzw. $\frac{1}{3}\gamma_{a_1}\ldots\gamma_{a_n}$.

Die Frage: Weiß man, daß ein vorgelegtes System $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ herauskommt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Komponente $A$ ist, daß also mit dem Würfel $A$ gewürfelt wurde, wird dann beantwortet durch III. Man teile nämlich $\mathfrak{F}$ auf die Teilmenge der Merkmalmenge, in welcher die zweite bis $(n+1)$-te Komponente gerade $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $A$ ist dann

$$\frac{1}{3}\alpha_{\bar{a}_1}\ldots\alpha_{\bar{a}_n}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}\alpha_{\bar{a}_1}\ldots\alpha_{\bar{a}_n}+\frac{1}{3}\beta_{\bar{a}_1}\ldots\beta_{\bar{a}_n}+\frac{1}{3}\gamma_{\bar{a}_1}\ldots\gamma_{\bar{a}_n}}.$$

Wir wollen nun zur Anfangsfrage zurückkehren und annehmen, es sei $n$-mal 5 gefallen. Ferner nehmen wir jetzt an, es sei $\alpha_5 > \beta_5$ und $\alpha_5 > \gamma_5$. Offenbar wächst dann der Quotient $\frac{\alpha_5^n}{\beta_5^n+\gamma_5^n}$ mit wachsendem $n$ über alle Grenzen. Daher konvergiert $\frac{1}{3}\alpha_5^n\frac{1}{\frac{1}{3}\alpha_5^n+\frac{1}{3}\beta_5^n+\frac{1}{3}\gamma_5^n}$ mit wachsendem $n$ nach 1, d. h. also: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine $n$-fache Serie von Fünfen

mit dem Würfel geworfen wurde, für welchen 5 eine größere Wahrscheinlichkeit hat als für jeden anderen Würfel, geht mit wachsendem $n$ nach 1, wird also mit wachsendem $n$ fast zur Sicherheit.

## XII. Verhältnis zu dem von R. von Mises angegebenen Axiomensystem.

Man erhält — jedenfalls in wesentlichen Punkten — das von Misessche Axiomensystem, wenn man neben den Axiomen I, II und III ein viertes Axiom verlangt, welches den Begriff der Stellenauswahl außerordentlich weitgehend ausdehnt, nämlich

Axiom IV. Jede Auswahl A, bei deren Bestimmung die Grundkollektivs $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ nicht benutzt werden, ist eine Stellenauswahl[16]).

Dann ist also z. B. jede Auswahl $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die arithmetisch charakterisiert werden kann, eine Stellenauswahl. Wir wollen uns etwas näher mit der Berechtigung eines solchen Axioms — d. h. mit der zu erhoffenden Bewährung in der Praxis — beschäftigen. Wir werfen mit einer Münze. Dann erhalten wir eine Merkmalfolge $\mathfrak{G}$: $a_1, a_2, \ldots$, deren Merkmal Schrift und Bild ist. Die Wahrscheinlichkeiten seien vorausgesetzt als $\frac{1}{2}$. Wir fragen nach der Berechtigung von Axiom IV und (da durch dieses erst Axiom II und III Sinn bekommen) Axiom II und III für dieses $\mathfrak{G}$ als — etwa einziges — Grundkollektiv. Wir stellen eine Person X. an, welche nach Gutdünken und ohne den Ausfall zu kennen eine Auswahl A trifft und fragen, ob X. dabei die Grenzwerte $\frac{1}{2}$ verändern kann. Von einer Stelle ab werden die relativen Häufigkeiten nach unserer Voraussetzung dicht bei $\frac{1}{2}$ liegen, von der Stelle $10^{10}$ ab sei etwa die Abweichung kleiner als $\frac{1}{10}$. Da wir das ganze unendliche Spiel nicht realisieren können, wollen wir zunächst einmal von vornherein verabreden, nur bis $10^{100}$ zu spielen. X. habe die Aufgabe, aus den Würfen von 1 bis $10^{100}$ mindestens $10^{80}$ Stellen auszuwählen. Wie steht es mit dem möglichen Gewinn? Daß jetzt die Möglichkeit besteht, daß X. gewinnt (d. h. durch die Auswahl die Grenzwerte verändert), ja daß die Möglichkeit besteht, daß X. $10^{80}$-mal dauernd Schrift wählt, ist klar. Denn diese Möglichkeit wird doch gewiß nicht beeinträchtigt, wenn man das Spiel in folgender Weise etwas abändert. Wir wollen jetzt so spielen: Wir werfen erst $10^{100}$-mal und notieren den Ausfall. Dann haben wir eine Tabelle. X., welcher die Tabelle nicht kennt, wählt $10^{80}$ Stellen aus, und wir sehen in der festen Tabelle den Ausfall nach. Jetzt ist aber ganz klar, da man eine fertige Tabelle vorliegen hat, daß für X. die Möglichkeit besteht zu gewinnen. Wenn man allerdings in der Tabelle die Anzahl aller Systeme von je $10^{80}$ Stellen aufstellt, in denen

[16]) Diese etwas ungenaue Ausdrucksweisn „ohne Benutzung ...", welche zuweilen von Mises zum Vorwurf gemacht wird, läßt sich völlig exakt fassen.

die Wahrscheinlichkeiten um mindestens $\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{2}$ abweichen, und diese Anzahl durch die Anzahl aller Systeme von je $10^{80}$ Elementen der Reihe 1 bis $10^{100}$ dividiert, so bekommt man einen Quotienten, der kaum von der 0 abweicht. Dafür will ich sagen: Die „Chance“ [17]) für X., die Grenzwerte um mindestens $\frac{1}{10}$ zu verändern, ist fast gleich 0. Wählt man statt $10^{80}$ allgemein $k$ und statt $10^{100}$ allgemein $n$ $\left(\frac{n}{2} > k\right)$, statt $\frac{1}{10}$ irgendeine feste noch so kleine positive Zahl $\varepsilon$, so geht diese Chance bei festem $\varepsilon$, wie sich analytisch nachweisen läßt, mit unbegrenzt wachsendem $k$ (und demnach auch unbegrenzt wachsendem $n$) gegen 0 [18]). Es ergibt sich also

1. Ist $k$ (und demnach auch $n$) beliebig groß, so kann man doch bei festem $k$ immer noch durch arithmetische Auswahlen die Grenzwerte beliebig stark verändern.

2. Die Chance, eine solche Auswahl zu finden, geht mit wachsendem $k$ nach 0.

Ein strenger Grenzübergang mit $k$ nach $\infty$ ist mit diesen beiden Feststellungen natürlich nicht möglich. Nur wird man jedenfalls, wenn man die Chance, die Grenzwerte zu verändern, im Falle $k = \infty$ (also $n = \infty$) einführt, sie gleich 0 zu setzen haben.

R. von Mises hat für $k = \infty$ gefordert: Es ist unmöglich, die Grenzwerte zu verändern. Ich glaube aber, daß es sowohl den Tatsachen wie unserer Vorstellung besser angepaßt ist, wenn man die Möglichkeit, zu gewinnen, zuläßt.

Verbietet man dies, so halte ich dies also für falsch. Andererseits aber wird sich diese Falschheit voraussichtlich in den Anwendungen nie bemerkbar machen, weil für das Ausweisen einer Gewinnfolge die Chance 0 besteht, so daß dies — wie ich aus dem Begriff Chance glaube schließen zu dürfen — praktisch der Unmöglichkeit gleichkommt.

Die weitgehende Forderung des Axioms IV, also im wesentlichen die von Misessche Theorie [19]), hat wegen ihrer alles auf einen Schlag erledigenden Einfachheit gegenüber weniger fordernden Axiomen über die Stellenauswahl einen so großen Vorzug, daß sie sich in den Anwendungen als bei weitem überlegen erweisen wird.

---

[17]) Dieser Begriff hat im Rahmen dieser Darstellung mit dem Begriff Wahrscheinlichkeit nichts zu tun.

[18]) Es ist dies auch eine Formulierung des ersten Gesetzes der großen Zahlen.

[19]) Als rein mathematisch möchte ich diese Theorie aber deshalb nicht bezeichnen, weil, wie R. von Mises auch ausdrücklich hervorhebt, die Konsequenz zu ziehen ist, daß Kollektivs nicht mathematisch konstruiert werden können, also andere, etwa wie idealisierte Würfelfolgen, physikalische Gegebenheiten sind.

(Eingegangen am 13. Oktober 1929.)

# Ein Beitrag zur ebenen Geometrie von Laguerre.

Von

Ingebrigt Johansson in Oslo.

Inhalt.

| | | Seite |
|---|---|---|
| Einleitung | | 259 |
| § 1. | Speere oder orientierte Geraden | 261 |
| § 2. | Zykeln oder orientierte Kreise | 262 |
| § 3. | Die isotrope Projektion. Die Transformationsgruppen $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ und $\mathfrak{L}'_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ | 263 |
| § 4. | Lineare Zykelreihen | 266 |
| § 5. | Bemerkungen über orientierte Linienelemente und Tangenten-Entfernung | 268 |
| § 6. | Lineare Zykelfelder | 270 |
| § 7. | Einige Formeln | 272 |
| § 8. | Quaternionen und Biquaternionen | 273 |
| § 9. | Parameterdarstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ | 277 |
| § 10. | Zusammensetzung von Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$. Die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ | 283 |
| § 11. | Involutorische Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ | 286 |
| § 12. | Ein anderer Aufbau unserer Geometrie | 287 |

## Einleitung.

Den Anfang der Art von Geometrie, die nach Laguerre benannt wird, bilden eine Reihe von Abhandlungen, die in den Jahren 1879 bis 1883 erschienen und in den „Œuvres de Laguerre“ **2**, S. 592 bis 670 abgedruckt sind. Unter ihnen merken wir uns insbesondere eine: „Transformation par semi-droites réciproques“. Darin findet man nämlich einige Grundgedanken der Art von Geometrie, mit der wir uns beschäftigen wollen.

Später ist diese Geometrie von verschiedenen Autoren (Chasles, Klein) berührt worden. In der jüngsten Zeit ist sie von Blaschke und Thomsen in „Vorlesungen über Differentialgeometrie, III“ ausführlicher behandelt worden.

Alle diese Autoren beschränken sich aber (ausdrücklich oder stillschweigend) auf das Reelle. Jedenfalls setzen sie die verschiedenen im Imaginären auftretenden Fälle nicht auseinander. Diese Lücke in der Theorie wird hier zunächst ausgefüllt.

Weiter stellen wir uns als Ziel die Entwicklung eines unserem Gegenstande angemessenen algebraischen Apparates. Dabei soll auch den Besonderheiten reeller Figuren Rechnung getragen werden: Die Formeln werden so eingerichtet, daß reelle Figuren und Transformationen reelle Koordinaten erhalten. Anwendungen hiervon werden in weiteren Arbeiten zu machen sein; die vorliegende bezieht sich nur auf die Grundlagen der Theorie.

Die von uns näher zu betrachtende ebene Geometrie hat mit der räumlichen Euklidischen Geometrie einen einfachen Zusammenhang, der durch die sogenannte isotrope Projektion hergestellt wird. Von dieser Projektion kann man sich folgendermaßen eine Vorstellung bilden:

Wir denken uns unsere Ebene als eine Ebene des Euklidischen Raumes und stellen dann wie folgt eine Beziehung zwischen Punkten des Raumes und Kreisen der Ebene her: Durch jeden eigentlichen Punkt des Raumes legen wir den isotropen Kegel (d. h. den Kegel, dessen Erzeugenden durch den Punkt gehen und den absoluten Kegelschnitt treffen). Wir bringen sodann diesen Kegel mit unserer Ebene zum Schnitt. Die Schnittkurve ist ein Kreis. Man kann offenbar sagen, daß dieser Kreis durch Projektion des absoluten Kegelschnittes von dem betrachteten Raumpunkte aus entsteht (was die Bezeichnung „isotrope Projektion“ erklärt). Umgekehrt aber gehen durch einen Kreis der Ebene (im allgemeinen) zwei verschiedene isotrope Kegel, so daß die Beziehung: Punkt des Raumes $\leftrightarrow$ Kreis der Ebene ein-zwei-deutig ist. Dabei kann man ohne weiteres zu *orientierten Kreisen* oder *Zykeln* (bei Laguerre: cycles) übergehen, so daß man eine eineindeutige Beziehung erhält.

Denken wir uns dies schon ins Reine gebracht, so ist es klar, daß jeder Transformation der (eigentlichen) Punkte des Raumes eine Transformation der Zykeln (orientierten Kreise) der Ebene entspricht, und natürlich auch jeder Gruppe von Punkttransformationen eine Gruppe von Zykeltransformationen. Für uns sollen im Raume nur Ähnlichkeitstransformationen, und zwar insbesondere die Bewegungen und Umlegungen der Euklidischen Geometrie in Betracht kommen; wir fragen nach den entsprechenden Transformationen der Zykeln.

In den beiden ersten Paragraphen findet man die Erklärung der Begriffe Speer (orientierte Gerade) und Zykel (orientierter Kreis). Dann folgt in § 3 die isotrope Projektion mit Anwendung auf die zu untersuchenden Transformationen. Die Parameterdarstellung dieser Transformationen mit Hilfe von Biquaternionen bildet das Endziel der Untersuchung.

## § 1.

## Speere oder orientierte Geraden.

Eine eigentliche Gerade $(u_0 : u_1 : u_2)$ — nicht $(1:0:0)$ — der Euklidischen Ebene wird orientiert und in einen *Speer* (bei Laguerre: semi-droite) verwandelt, indem man $u_3 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ als vierte Koordinate hinzufügt. Je nachdem man den einen oder anderen Wert der Quadratwurzel nimmt, erhält man die eine oder andere Orientierung.

Ein eigentlicher Speer ist also ein System von vier Verhältnisgrößen:

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3,$$

zwischen denen die Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$$

besteht, derart, daß nicht zugleich $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ist. Das System

$$u_0 : u_1 : u_2 : -u_3$$

heißt der entgegengesetzte Speer.

Die Möglichkeit einer Geraden $(u_0 : u_1 : u_2)$ im allgemeinen zwei Speere zuzuordnen beruht also auf der Zweideutigkeit der Quadratwurzel $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Die beiden Wurzelwerte fallen aber zusammen, wenn $u_1^2 + u_2^2 = 0$ ist. Die Gerade heißt dann *isotrop*. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie einen der beiden absoluten Punkte $(0:1:i)$ und $(0:1:-i)$, die bei allen Ähnlichkeitstransformationen in Ruhe bleiben, enthält. Es gilt also:

*Jede eigentliche nicht-isotrope Gerade* $(u_0 : u_1 : u_2,\ u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$, *trägt zwei verschiedene Speere*: $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ *und* $(u_0 : u_1 : u_2 : -u_3)$, *wo* $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$ *ist.*

*Jede eigentliche isotrope Gerade* $(u_0 : u_1 : u_2,\ u_1^2 + u_2^2 = 0,\ u_1$ *und* $u_2$ *nicht beide* $= 0)$, *trägt einen einzigen Speer*: $(u_0 : u_1 : u_2 : 0)$, *den wir isotrop nennen wollen.*

Zu diesen eigentlichen Speeren kommt noch *ein uneigentlicher Speer* hinzu, mit den Koordinaten

$$1:0:0:0.$$

Er ist Grenzlage von eigentlichen (isotropen und nicht-isotropen) Speeren, und wird von der uneigentlichen Geraden $(1:0:0)$ getragen.

Die Menge aller Speere $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ durch einen festen Punkt $(x_0 : x_1 : x_2)$ ist durch die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 - * &= 0, \\ * + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Diese Menge bildet:

1. Wenn $x_0 \neq 0$, d. h. wenn der Punkt $x$ eigentlich ist: Ein einziges Kontinuum mit der Parameterdarstellung:

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_0 &= -(2x_1 \lambda_0 \lambda_1 + x_2 (\lambda_0^2 - \lambda_1^2)), \\ u_1 &= \quad 2x_0 \lambda_0 \lambda_1, \\ u_2 &= \quad x_0 (\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \\ u_3 &= \quad x_0 (\lambda_0^2 + \lambda_1^2). \end{aligned}$$

2. Wenn $x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, d. h. wenn der Punkt $x$ uneigentlich ist, ohne mit einem der beiden absoluten Punkte zusammenzufallen: Zwei verschiedene Kontinua mit den Parameterdarstellungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} u_0 &= \quad \lambda_0, \\ u_1 &= -x_2 \lambda_1, \\ u_2 &= \quad x_1 \lambda_1, \\ u_3 &= \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \lambda_1. \end{aligned}$$

Je nachdem man den einen oder anderen Wert der Quadratwurzel nimmt, erhält man das eine oder andere Kontinuum. Jedes der beiden Kontinua nennen wir ein *Parallelbüschel von Speeren.*

3. Wenn $x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, d. h. wenn der Punkt $x$ einer der beiden absoluten Punkte ist: Je ein doppeltzählendes Kontinuum, dessen Parameterdarstellung aus (3) durch Einsetzen von $x = (0 : 1 : i)$ oder $(0 : 1 : -i)$ entsteht:

$$(4a) \qquad \begin{aligned} u_0 &= \quad \lambda_0, \\ u_1 &= -i\lambda_1, \\ u_2 &= \quad \lambda_1, \\ u_3 &= \quad 0, \end{aligned} \qquad (4b) \qquad \begin{aligned} u_0 &= \quad \lambda_0, \\ u_1 &= \quad i\lambda_1, \\ u_2 &= \quad \lambda_1, \\ u_3 &= \quad 0. \end{aligned}$$

## § 2.

## Zykeln oder orientierte Kreise.

Ein eigentlicher Kreis (vielleicht Nullkreis) der Euklidischen Ebene mit dem Mittelpunkt $(c_0 : c_1 : c_2)$, $c_0 \neq 0$, und dem Halbmesser $\frac{c_3}{c_0}$ wird als Ort von Punkten $(x_0 : x_1 : x_2)$ durch die Gleichung

$$(5) \qquad (c_0 x_1 - c_1 x_0)^2 + (c_0 x_2 - c_2 x_0)^2 - c_3^2 x_0^2 = 0$$

dargestellt. Als Ort von Geraden $(u_0 : u_1 : u_2)$ hat er die Gleichung

$$(6) \qquad (c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2)^2 - c_3^2 (u_1^2 + u_2^2) = 0.$$

Wenn man ihn nun als Ort von Speeren $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3,\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0)$ auffaßt, so kann man in dieser Gleichung $u_1^2 + u_2^2$ durch $u_3^2$ ersetzen, so daß

$$(7) \qquad (c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2)^2 - c_3^2 u_3^2 = 0$$

herauskommt. Dies ist aber eine reduzible Gleichung, die in

$$(8) \qquad c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

und

$$(9) \qquad c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 - c_3 u_3 = 0$$

zerfällt. Jede dieser beiden Gleichungen, sagen wir, stellt einen *Zykel* dar. Die Verhältnisgrößen $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ heißen die (homogenen) Koordinaten des Zykels (8). Der andere Zykel (9), der demselben Kreis (5) angehört, heißt der *entgegengesetzte Zykel* zu (8).

Wenn der ursprüngliche Kreis (5) ein Nullkreis war $(c_3 = 0)$, fallen die beiden Zykeln (8) und (9) zusammen; wir nennen sie dann *Nullzykeln*. Jeder Nullzykel ist sich selbst entgegengesetzt.

Die Zykeln, die wir in dieser Weise erhalten — *eigentliche Zykeln* — bilden wegen der Forderung $c_0 \neq 0$ kein abgeschlossenes Kontinuum. Wir können aber das Zykelkontinuum dadurch abschließen, daß wir diese Forderung aufheben, oder also, daß wir die Orte von Speeren hinzufügen, die durch Gleichungen der Form (8) mit $c_0 = 0$ gegeben sind. Von welcher Art diese sogenannten *uneigentlichen Zykeln* sind, wollen wir am Schluß des nächsten Paragraphen sehen.

Das in dieser Weise abgeschlossene Zykelkontinuum ist ein quaternäres Gebiet, da jedem (homogenen) Wertsystem $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ ein Zykel entspricht und umgekehrt. Es ist ein natürliches Kontinuum für die später zu betrachtenden Transformationsgruppen.

Es gibt noch eine andere Weise, das Zykelkontinuum abzuschließen, so daß ein natürliches Kontinuum dieser Gruppen entsteht. Das ist in § 12 näher auseinandergesetzt.

## § 3.

### Die isotrope Projektion. Die Transformationsgruppen $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ und $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{W}_{2\cdot 6}$.

Wir wollen jetzt Beziehungen zwischen den Zykeln und Speeren der Euklidischen Ebene und den Punkten und isotropen Ebenen des Euklidischen Raumes angeben, die uns ein sogenanntes Übertragungsprinzip liefern sollen. Zunächst wollen wir aber einige Abänderungen in den Bezeichnungen vor-

nehmen, die sich im folgenden als nützlich erweisen werden. *Wir wollen nämlich sowohl für Zykeln als für Speere die Zeichen der beiden letzten Koordinaten vertauschen.* Ferner wollen wir — um Mißverständnisse zu vermeiden — *die Koordinaten von Gebilden unserer Ebene in eckige Klammern* setzen, so daß die gewöhnlichen runden Klammern für Koordinaten räumlicher Gebilde vorbehalten bleiben.

Von jetzt an sind also die Koordinaten eines Speeres $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3]$ durch die Gleichung

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0 \tag{10}$$

verbunden. Der entgegengesetzte Speer heißt $[u_0 : u_1 : -u_2 : u_3]$, und die Gerade, die diese beiden Speere trägt, heißt $[u_0 : u_1 : u_3]$. Ein isotroper Speer ist durch $u_3 = 0$ gekennzeichnet.

Der Zykel $[\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3]$ hat, sofern er eigentlich ist (d. h. $\mathfrak{x}_0 \neq 0$), den Mittelpunkt $[\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_3]$ und den Halbmesser $\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_0}$. Ein Nullzykel ist durch $\mathfrak{x}_2 = 0$ gekennzeichnet.

Geraden- *und* Punktkoordinaten unserer Ebene tragen jetzt die Indizes 0, 1, 3, Zykel- und Speerkoordinaten zugleich den Index 2.

Wir wollen nun unsere Ebene als die Ebene $(0 : 0 : 1 : 0)$ eines Euklidischen Raumes auffassen, und wir wollen ferner jedem Speer $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3]$, $u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$ eine Ebene $(u_0 : u_1 : iu_2 : u_3)$ des Raumes zuordnen. Diese Ebene ist wegen der Gleichung $u_1^2 + (iu_2)^2 + u_3^2 = 0$ isotrop, und zwar kann man offenbar eine beliebige isotrope Ebene in dieser Weise erhalten. Mit anderen Worten:

*Durch die Formeln*

$$u_0 = \mathfrak{u}_0, \quad u_1 = \mathfrak{u}_1, \quad u_2 = i\mathfrak{u}_2, \quad u_3 = \mathfrak{u}_3 \tag{11}$$

*werden die Speere* $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3,\ u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0]$ *unserer Ebene* $(0 : 0 : 1 : 0)$ *eineindeutig auf die isotropen Ebenen* $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3,\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0)$ *des Euklidischen Raumes* $R_{2.3}$ *bezogen.*

Diese Zuordnung ist auch geometrisch leicht zu fassen, indem die isotrope Ebene $(u_0 : u_1 : iu_2 : u_3)$ und unsere Grundebene $(0 : 0 : 1 : 0)$ sich in der Geraden $(-u_3 : 0 : u_1 : 0 : u_0 : 0)$ oder, was dasselbe ist, $[u_0 : u_1 : u_3]$ schneiden; dies ist aber die Gerade, die den betrachteten Speer $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3]$ trägt. Der entgegengesetzte Speer $[u_0 : u_1 : -u_2 : u_3]$ würde der anderen isotropen Ebene $(u_0 : u_1 : -iu_2 : u_3)$ durch die Gerade $[u_0 : u_1 : u_3]$ entsprechen, so daß die folgende interessante und nützliche Tatsache herauskommt:

*Die Orientierung der Geraden unserer Ebene kann — wenn der Raum zu Hilfe genommen wird — als Auszeichnung einer der beiden isotropen Ebenen durch die Gerade gedeutet werden.*

Betrachten wir jetzt einen Zykel $[\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3]$. Dieser ist als Menge aller der Speere $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3,\ u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0]$ aufzufassen, die der Gleichung

$$\mathfrak{x}_0 u_0 + \mathfrak{x}_1 u_1 + \mathfrak{x}_2 u_2 + \mathfrak{x}_3 u_3 = 0$$

genügen. Die entsprechende Menge von isotropen Ebenen $(u_0 : u_1 : i u_2 : u_3,\ u_1^2 + (i u_2)^2 + u_3^2 = 0)$ ist durch dieselbe Gleichung dargestellt, die wir jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{x}_0 u_0 + \mathfrak{x}_1 u_1 + (-i\mathfrak{x}_2)\cdot(i u_2) + \mathfrak{x}_3 u_3 = 0.$$

Sie ist also die Menge aller isotropen Ebenen durch den Punkt $(\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : -i\mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3)$, und es folgt:

*Den Zykeln* $[\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3]$ *unserer Ebene entsprechen eineindeutig die Punkte* $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ *des Raumes* $R_{2\cdot 3}$ *durch die Formeln*

$$x_0 = \mathfrak{x}_0, \quad x_1 = \mathfrak{x}_1, \quad x_2 = -i\mathfrak{x}_2, \quad x_3 = \mathfrak{x}_3. \tag{12}$$

Hierdurch ist *die isotrope Projektion* (vgl. die Einleitung) vollständig begründet und wir können nun verschiedene Arten von Transformationen in unserer Ebene durch Übertragung aus dem Raum erklären:

| Euklidischer Raum: | Laguerresche Ebene: |
|---|---|
| Ähnlichkeitstransformationen. Gruppe $G_{2\cdot 7}$. | *Laguerresche Transformationen in weiterem Sinne. Gruppe* $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$. |
| Bewegungen und Umlegungen. Gruppe $G_{2\cdot 6} + H_{2\cdot 6}$. | *Laguerresche Transformationen in engerem Sinne. Gruppe* $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ |
| Bewegungen. Gruppe $G_{2\cdot 6}$. | „*Bewegungen.*“ *Gruppe* $\mathfrak{L}_{2\cdot 6}$. |
| Umlegungen. Nebenschicht $H_{2\cdot 6}$. | „*Umlegungen.*“ *Nebenschicht* $\mathfrak{M}_{2\cdot 6}$. |

Wir wollen uns nun in erster Linie mit solchen Beziehungen beschäftigen, die gegenüber den verschiedenen eben definierten Transformationsgruppen invariant sind. Solche Beziehungen können offenbar durch Übersetzung von Beziehungen im Raume erhalten werden, die gegenüber den verschiedenen Arten von Euklidischen Transformationen invariant sind. In zweiter Linie müssen wir uns aber auch mit der Deutung dieser Beziehungen in der Euklidischen Ebene beschäftigen. Die Begriffe, mit denen wir operieren, haben wir ja aus Begriffen der Euklidischen Ebene abgeleitet.

*Man muß aber diese beiden Dinge, die Lehre von den invarianten Beziehungen und die Deutung in der Euklidischen Ebene, streng auseinanderhalten.* Das erste bildet nämlich — im Sinne des „Erlanger Programms“ [1]) — die eigentliche Laguerresche Geometrie, hat also ein selbständiges Interesse und muß folglich von dem zweiten getrennt behandelt werden.

[1]) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen usw., Math. Annalen 43. Eine Art von Geometrie = Invariantentheorie einer Transformationsgruppe.

Im folgenden werden im allgemeinen nur die invarianten Beziehungen berücksichtigt, während die Deutung dem Leser überlassen wird. Nur wo Mißverständnisse entstehen können (vielleicht schon vorhanden sind) wird auf die Deutung eingegangen.

Es muß bemerkt werden, daß in dieser kleinen Arbeit keine vollständigen Invariantentheorien der eingeführten Gruppen $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$, $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$, $\mathfrak{L}_{2\cdot 6}$ gegeben werden. Es soll von Invarianten überhaupt nicht systematisch die Rede sein. Es sollen nur einige der wichtigsten invarianten Beziehungen erwähnt werden. Es sollen ferner die zugehörigen analytischen Entwicklungen im allgemeinen nur so weit geführt werden, als es für unser eigentliches Ziel, eine einfache Parameterdarstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$, notwendig ist.

Wie wir im Euklidischen Raume drei gegenüber der Gruppe $G_{2\cdot 7}$ invariante Arten (Mengen) von Punkten haben, so können wir in der Ebene drei gegenüber der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ invariante Arten von Zykeln unterscheiden:

1. Wenn $x_0 \neq 0$, so ist der Punkt $x$ eigentlich, und die isotropen Ebenen durch ihn hüllen einen nicht-singulären Kegel ein.

2. Wenn $x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, so ist der Punkt $x$ uneigentlich, liegt aber nicht auf dem absoluten Kegelschnitt. Die isotropen Ebenen durch ihn bilden zwei verschiedene Ebenenbüschel, deren Trägerinnen Tangenten des absoluten Kegelschnittes sind.

3. Wenn $x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, so ist der Punkt $x$ uneigentlich und liegt auf dem absoluten Kegelschnitt. Die isotropen Ebenen durch ihn bilden ein doppeltzählendes Büschel, dessen Trägerin eine Tangente des absoluten Kegelschnittes ist.

1. Wenn $\xi_0 \neq 0$, so ist der Zykel $\xi$ eigentlich und besteht aus einem einzigen irreduziblen Kontinuum von Speeren.

2. Wenn $\xi_0 = 0$, $\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 \neq 0$, so ist der Zykel $\xi$ uneigentlich und besteht aus zwei verschiedenen[2]) Parallelbüscheln von Speeren.

3. Wenn $\xi_0 = 0$, $\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$, so ist der Zykel $\xi$ uneigentlich und besteht aus einem doppeltzählenden Parallelbüschel von Speeren.

## § 4.

## Lineare Zykelreihen.

Zwei verschiedene Zykeln $\xi$ und $\eta$ bestimmen eine *lineare Zykelreihe* (im folgenden kurz als Zykelreihe bezeichnet)

$$\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta,$$

[2]) Die beiden Parallelbüschel können jedoch denselben Scheitel haben. Die Speere des einen Büschels sind dann zu denen des anderen entgegengesetzt. (Dies ist eine nicht-invariante Beziehung).

als deren homogene Koordinaten wir die sechs Determinanten

$$(13)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{y}_0 & \mathfrak{y}_1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{p}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{y}_0 & \mathfrak{y}_2 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{p}_3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_3 \\ \mathfrak{y}_0 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{q}_1 &= \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{q}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_3 \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{q}_3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

benutzen können. Wir merken uns, daß die Definition von $\mathfrak{q}_2$ von dem abweicht, woran man in der Liniengeometrie des Raumes $R_{2\cdot 3}$ gewöhnt ist. Wir folgen nämlich hier der Regel, *daß in jeder Determinante die Indizes in der natürlichen Reihenfolge geordnet sein sollen.* Die Zweckmäßigkeit dieser Festsetzung wird später einleuchten.

Die sechs Koordinaten $[\mathfrak{p}:\mathfrak{q}]$ sind durch die Gleichung:

$$(14)\qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2 + \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = 0$$

miteinander verbunden.

Welches räumliche Gebilde entspricht nun dieser Zykelreihe in der Zuordnung des vorigen Paragraphen? — Offenbar die durch die beiden Punkte $(\mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:-i\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3)$ und $(\mathfrak{y}_0:\mathfrak{y}_1:-i\mathfrak{y}_2:\mathfrak{y}_3)$ bestimmte lineare Punktreihe. Die Gerade, die diese Punktreihe trägt, hat die Koordinaten

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_1 & -i\mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ \mathfrak{y}_0 & \mathfrak{y}_1 & -i\mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \end{matrix} \right\|,$$

d. h. $(\mathfrak{p}_1:-i\mathfrak{p}_2:\mathfrak{p}_3:-i\mathfrak{q}_1:-\mathfrak{q}_2:-i\mathfrak{q}_3)$.

*Es entspricht also der Zykelreihe* $[\mathfrak{p}_1:\mathfrak{p}_2:\mathfrak{p}_3:\mathfrak{q}_1:\mathfrak{q}_2:\mathfrak{q}_3]$ *die Punktreihe auf der Geraden* $(p_1:p_2:p_3:q_1:q_2:q_3)$, *wo*

$$(15)\qquad \begin{aligned} p_1 &= \mathfrak{p}_1, & p_2 &= -i\mathfrak{p}_2, & p_3 &= \mathfrak{p}_3; \\ q_1 &= -i\mathfrak{q}_1, & q_2 &= -\mathfrak{q}_2, & q_3 &= -i\mathfrak{q}_3. \end{aligned}$$

Im Euklidischen Raume gibt es bekanntlich vier gegenüber der Gruppe $G_{2\cdot 7}$ invariante Arten (Mengen) von Geraden. Dementsprechend gibt es in unserer Ebene vier gegenüber der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ invariante Arten von Zykelreihen:

1 a. Wenn $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$, so ist die Gerade eigentlich und nicht-isotrop. Sie enthält $\infty^{2\cdot 1}$ eigentliche Punkte und einen uneigentlichen. Dieser letzte liegt nicht auf dem absoluten Kegelschnitt. Es gibt zwei isotrope Ebenen, die durch alle Punkte der Geraden gehen.

1 a. Wenn $\mathfrak{p}_1^2 - \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 \neq 0$, so nennen wir die Zykelreihe *eigentlich und nicht-isotrop.* Sie enthält $\infty^{2\cdot 1}$ eigentliche Zykeln und einen uneigentlichen. Dieser letzte besteht aus zwei verschiedenen Parallelbüscheln von Speeren. Es gibt zwei Speere, die allen Zykeln der Reihe gemeinsam sind.

1 b. Wenn $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0$, ohne daß $p_1, p_2, p_3$ alle $= 0$ sind, so ist die Gerade eigentlich und isotrop. Sie enthält $\infty^{2\cdot 1}$ eigentliche Punkte und einen uneigentlichen, der dem absoluten Kegelschnitt angehört. Es gibt eine (doppeltzählende) isotrope Ebene, die durch alle Punkte der Geraden geht.

2 a. Wenn $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, aber $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 0$, so ist die Gerade uneigentlich, aber nicht Tangente des absoluten Kegelschnittes. Sie besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentlichen Punkten, darunter zwei verschiedenen, die dem absoluten Kegelschnitt angehören. Es gibt eine (doppeltzählende) isotrope Ebene, die durch alle Punkte der Geraden geht, nämlich die uneigentliche Ebene $(1:0:0:0)$.

2 b. Wenn $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ und $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0$, so ist die Gerade uneigentlich und zugleich Tangente des absoluten Kegelschnittes. Sie besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentlichen Punkten, deren einer (doppeltzählend) dem absoluten Kegelschnitt angehört. Es gibt ein ganzes Büschel von isotropen Ebenen, die durch alle Punkte der Geraden gehen.

1 b. Wenn $\mathfrak{p}_1^2 - \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 = 0$, ohne daß $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ alle $= 0$ sind, so nennen wir die Zykelreihe *eigentlich und isotrop*. Sie enthält $\infty^{2\cdot 1}$ eigentliche Zykeln und einen uneigentlichen, der aus einem doppeltzählenden Parallelbüschel von Speeren besteht. Es gibt einen (doppeltzählenden) Speer, der allen Zykeln der Reihe gemeinsam ist.

2 a. Wenn $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = 0$, aber $\mathfrak{q}_1^2 - \mathfrak{q}_2^2 + \mathfrak{q}_3^2 \neq 0$, so nennen wir die Zykelreihe *uneigentlich, aber nicht-singulär*. Sie besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentlichen Zykeln, darunter zwei verschiedenen, die aus doppeltzählenden Parallelbüscheln von Speeren bestehen. Es gibt einen (doppeltzählenden) Speer, der allen Zykeln gemeinsam ist — dies ist der uneigentliche Speer $[1:0:0:0]$.

2 b. Wenn $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = 0$ und $\mathfrak{q}_1^2 - \mathfrak{q}_2^2 + \mathfrak{q}_3^2 = 0$, so nennen wir die Zykelreihe *uneigentlich und singulär*. Sie besteht aus $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentlichen Zykeln, deren einer (doppeltzählend) aus einem doppeltzählenden Parallelbüschel von Speeren besteht. Es gibt ein ganzes Parallelbüschel von Speeren, die allen Zykeln gemeinsam sind.

## § 5.

## Bemerkungen über orientierte Linienelemente und Tangenten-Entfernung.

Wir wollen bei dem Falle 1 b des vorigen Paragraphen noch ein bißchen verweilen, um eine feinere (gegenüber der Gruppe $\mathfrak{L}_{2,6}$ nicht-invariante) Klassifikation vorzunehmen:

1 b. $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0$, ohne daß $p_1, p_2, p_3$ alle $= 0$ sind. Eigentliche isotrope Gerade.

$\alpha$) Wenn $p_2 \neq 0$, so liegt der Schnittpunkt unserer Geraden mit dem absoluten Kegelschnitt nicht in der Ebene $(0:0:1:0)$, und die isotrope Ebene durch die Gerade schneidet die Ebene $(0:0:1:0)$ in einer nicht-isotropen Geraden. Die isotropen Kegel, deren Scheitel auf unserer Geraden liegen, berühren alle die zugehörige isotrope Ebene längs dieser Geraden.

1 b. $\mathfrak{p}_1^2 - \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 = 0$, ohne daß $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ alle $= 0$ sind. Eigentliche isotrope Zykelreihe.

$\alpha$) Wenn $\mathfrak{p}_2 \neq 0$, so ist der allen Zykeln gemeinsame Speer nicht-isotrop. Die Kreise, denen die Zykeln angehören, berühren die Gerade dieses Speeres alle in demselben Punkte. Dieser Punkt bildet mit dem Speer zusammen ein *orientiertes Linienelement*, das umgekehrt die ganze Zykelreihe eindeutig bestimmt.

$\beta$) Wenn $p_2 = 0$ ist, ohne daß $q_1$ und $q_3$ beide $= 0$ sind, so liegt der Schnittpunkt unserer Geraden mit dem absoluten Kegelschnitt in der Ebene $(0:0:1:0)$, ohne daß die Gerade ganz hineinfällt, und die isotrope Ebene durch die Gerade schneidet die Ebene $(0:0:1:0)$ in einer eigentlichen isotropen Geraden. Die isotropen Kegel, deren Scheitel auf unserer Geraden liegen, berühren alle die erwähnte isotrope Ebene längs dieser Geraden.

$\gamma$) Wenn $p_2 = q_1 = q_3 = 0$, so ist unsere Gerade eine isotrope Gerade der Ebene $(0:0:1:0)$, und die isotrope Ebene durch die Gerade schneidet diese Ebene in der Geraden selbst.

$\beta$) Wenn $\mathfrak{p}_2 = 0$ ist, ohne daß $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_3$ beide $= 0$ sind, so ist der allen Zykeln gemeinsame Speer eigentlich und isotrop. Die Kreise, denen die Zykeln angehören, berühren einander alle in dem entsprechenden absoluten Punkte dreipunktig. Auch hier bestimmt die Zykelreihe ein orientiertes Linienelement (nämlich den absoluten Punkt und den hindurchgehenden Speer), aber dies reicht nicht umgekehrt aus, die Zykelreihe zu bestimmen.

$\gamma$) Wenn $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_3 = 0$, so ist der allen Zykeln gemeinsame Speer eigentlich und isotrop, und die Zykeln sind Nullzykeln, die ihre Punkte auf dem Speer haben. Hier bestimmt also die Zykelreihe kein orientiertes Linienelement.

Wir sehen also, daß eigentliche isotrope Geraden des Raumes und orientierte Linienelemente der Ebene einander im allgemeinen (d. h. im Falle $\alpha$) eineindeutig entsprechen. Diese Korrespondenz ist aber (wie die Fälle $\beta$) und $\gamma$) zeigen) nicht singularitätenfrei. Nun kann man zwar den Begriff des orientierten Linienelementes so abändern, daß eine eineindeutige und singularitätenfreie Korrespondenz entsteht. Dieser neue Begriff würde aber nichts wesentlich anderes sein als das, was wir „eigentliche isotrope Zykelreihe“ genannt haben. Wir brauchen also keinen neuen Namen.

Wie sich das alles bei einem anderen Aufbau der Geometrie von Laguerre ändert, ist in § 12 kurz besprochen.

Auch über den Begriff *Tangenten-Entfernung* zweier Zykeln möchte ich eine kleine Bemerkung machen. Die Entfernung zweier eigentlicher Punkte $x$ und $y$ $(x_0 \neq 0, y_0 \neq 0)$ des Raumes

$$\frac{\sqrt{(x_0 y_1 - x_1 y_0)^2 + (x_0 y_2 - x_2 y_0)^2 + (x_0 y_3 - x_3 y_0)^2}}{x_0 y_0}$$

ist gegenüber den Transformationen der Gruppe $G_{2\cdot 6} + H_{2\cdot 6}$ absolut-invariant. Dementsprechend ist der als *Tangenten-Entfernung* der beiden eigentlichen Zykeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ $(\mathfrak{x}_0 \neq 0, \mathfrak{y}_0 \neq 0)$ bezeichnete Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_0)^2 - (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_0)^2 + (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_0)^2}}{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0}$$

gegenüber Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ absolut-invariant.

Aber die geometrische Deutung der Tangenten-Entfernung in der Euklidischen Ebene als Entfernung der beiden Punkte, in denen einer der beiden gemeinsamen Speere (genauer: die Gerade, die diesen Speer trägt)

die beiden Zykeln (genauer: die beiden Kreise, die die Zykeln tragen) berührt, ist gegenüber der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ nicht invariant. Es ist ja hier schon der Begriff „Punkt" kein invarianter Begriff, so daß man nicht ohne weiteres von dem Abstand zweier Punkte reden kann.

## § 6.

## Lineare Zykelfelder.

Drei verschiedene Zykeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, die nicht derselben Zykelreihe angehören, bestimmen ein *lineares Zykelfeld* (im folgenden kurz als Zykelfeld bezeichnet):

$$\lambda_1 \mathfrak{x} + \lambda_2 \mathfrak{y} + \lambda_3 \mathfrak{z},$$

als dessen homogene Koordinaten wir die vier Determinanten

$$(16) \quad u_0 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad u_1 = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

benutzen, indem wir auch hier, abweichend vom Gewöhnten, die Indizes in jeder Determinante in der natürlichen Reihenfolge ordnen.

Diesem Zykelfeld entspricht im Raume offenbar das durch die drei Punkte $(\xi_0 : \xi_1 : -i\,\xi_2 : \xi_3)$, $(\eta_0 : \eta_1 : -i\,\eta_2 : \eta_3)$, $(\zeta_0 : \zeta_1 : -i\,\zeta_2 : \zeta_3)$ bestimmte ebene Punktfeld. Die Ebene, die dies Punktfeld trägt, hat die Koordinaten

$$\left\| \begin{matrix} \xi_0 & \xi_1 & -i\,\xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & -i\,\eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & -i\,\zeta_2 & \zeta_3 \end{matrix} \right\|,$$

d. h.

$$(-i\,u_0 : i\,u_1 : u_2 : i\,u_3),$$

oder

$$(u_0 : -u_1 : i\,u_2 : -u_3).$$

*Es entspricht also dem Zykelfeld* $[u_0 : u_1 : u_2 : u_3]$ *das Punktfeld der Ebene* $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$, *wo*

$$(17) \qquad u_0 = u_0, \quad u_1 = -u_1, \quad u_2 = i\,u_2, \quad u_3 = -u_3.$$

Wie man im Euklidischen Raume drei gegenüber Transformationen der Gruppe $G_{2\cdot 7}$ invariante Arten von Ebenen zu unterscheiden hat, so gibt es in unserer Ebene drei gegenüber Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ invariante Arten von Zykelfeldern.

1. Wenn $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$, so ist die Ebene eigentlich und nicht-isotrop. Sie enthält $\infty^{2\cdot 2}$ eigentliche und $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentliche Punkte; unter den letzten gibt

1. Wenn $u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 \neq 0$, so nennen nennen wir das Zykelfeld *eigentlich und nicht-isotrop*. Es enthält $\infty^{2\cdot 2}$ eigentliche und $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentliche Zykeln;

es zwei verschiedene, die dem absoluten Kegelschnitt angehören.

2. Wenn $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$, aber $u_1, u_2, u_3$ nicht alle $=0$, so ist die Ebene eigentlich und isotrop. Sie enthält $\infty^{2\cdot 2}$ eigentliche und $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentliche Punkte; unter den letzten gibt es einen (doppeltzählenden), der dem absoluten Kegelschnitt angehört. (Es gibt eine isotrope Ebene, die durch alle diese Punkte geht, nämlich die Ebene $(u_0:u_1:u_2:u_3)$ selbst.)

3. Die uneigentliche Ebene $(1:0:0:0)$ enthält alle $\infty^{2\cdot 2}$ uneigentlichen Punkte darunter $\infty^{2\cdot 1}$, die dem absoluten Kegelschnitt angehören. (Es gibt eine isotrope Ebene, die durch alle Punkte geht, nämlich die Ebene $(1:0:0:0)$ selbst.)

unter den letzten gibt es zwei verschiedene, die aus doppeltzählenden Parallelbüscheln von Speeren bestehen.

2. Wenn $u_1^2-u_2^2+u_3^2=0$, aber $u_1, u_2, u_3$ nicht alle $=0$, so nennen wir das Zykelfeld *eigentlich und isotrop*. Es enthält $\infty^{2\cdot 2}$ eigentliche und $\infty^{2\cdot 1}$ uneigentliche Zykeln; unter den letzten gibt es einen (doppeltzählenden), der aus einem doppeltzählenden Parallelbüschel von Speeren besteht. Es gibt einen Speer, der allen Zykeln angehört, nämlich der Speer $[u_0:-u_1:u_2:-u_3]$.

3. *Das uneigentliche Zykelfeld* $[1:0:0:0]$ besteht aus allen $\infty^{2\cdot 2}$ uneigentlichen Zykeln, darunter $\infty^{2\cdot 1}$, die aus doppeltzählenden Parallelbüscheln von Speeren bestehen. Alle Zykeln haben den Speer $[1:0:0:0]$ gemeinsam.

Wenn wir die unter 2. und 3. genannten Zykelfelder unter dem Namen *isotrope Zykelfelder* zusammenfassen, so sehen wir, daß zwischen den isotropen Zykelfeldern und den Speeren eine eineindeutige singularitätenfreie Beziehung besteht:

$$\begin{array}{ll} \text{Isotropes Zykelfeld} & [u_0:u_1:u_2:u_3] \\ \longleftrightarrow \text{ Speer} & [u_0:-u_1:u_2:-u_3]. \end{array}$$

Die Zykeln eines Feldes enthalten alle den entsprechenden Speer. *Diese Beziehung läßt sich nun auf Koordinatengleichheit reduzieren, wenn wir festsetzen, daß von jetzt an die zweite und die vierte Speerkoordinate mit entgegengesetztem Vorzeichen geschrieben werden sollen.*

Es wäre vielleicht besser gewesen diese Abänderung schon im Anfang des § 3 vorzunehmen. Es ist aber eine Frage, ob sie nicht dann gar zu merkwürdig erschienen sein würde. Unter anderem ist ja nach dieser Ab-Abänderung der Zykel $[\mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3]$ als die Menge von Speeren $[u_0:u_1:u_2:u_3,\ u_1^2-u_2^2+u_3^2=0]$ aufzufassen, die der Gleichung

$$\mathfrak{x}_0 u_0 - \mathfrak{x}_1 u_1 + \mathfrak{x}_2 u_2 - \mathfrak{x}_3 u_3 = 0 \tag{18}$$

genügen, und (um eine gegenüber der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ nicht-invariante Beziehung zu erwähnen) der Speer $[u_0:u_1:u_2:u_3]$ gehört dann zur Geraden $[u_0:-u_1:-u_3]$.

Wir wollen diese Abänderung jetzt vornehmen, damit die Speerkoordinaten als Spezialfälle von Koordinaten von Zykelfeldern erscheinen. *Wir erreichen so den großen Vorteil, daß die Transformationsformeln für Speere genau dieselben werden wie die für Zykelfelder.*

## § 7.

## Einige Formeln.

Wir haben in unserer Ebene drei Arten von Begriffen eingeführt, die in ähnlicher Beziehung zueinander stehen wie die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene des Raumes $R_{2\cdot3}$; das sind die Zykeln, die (linearen) Zykelreihen und die (linearen) Zykelfelder. Unter den letzten sind nunmehr die Speere als Spezialfälle eingeschlossen.

Das an die Worte Vereinigte Lage, Verbinden und Schneiden geknüpfte Formelsystem für Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes $R_{2\cdot3}$ besitzt natürlich in unserer Ebene ein Analogon. Die Formeln werden aber auch nur analog, nicht ganz gleich, und der Grund dafür ist, *daß wir* in den Determinanten, die die Koordinaten von Zykelreihen und Zykelfelder mittels Zykelkoordinaten ausdrücken (die Formeln (13) des § 4 und (16) des § 6), *immer die Indizes in der natürlichen Reihenfolge ordnen.*

Unser Formelsystem, das sowohl direkt entwickelt als aus dem Raume abgeleitet werden kann, besteht nun aus den Formeln (13) und (14) des § 4, (16) des § 6 und den folgenden:

Der Zykel $\mathfrak{x}$ gehört zum Zykelfeld $\mathfrak{u}$, wenn

$$\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{u}_0 - \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{u}_2 - \mathfrak{x}_3\,\mathfrak{u}_3 = 0. \tag{19}$$

Eine Zykelreihe $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ und ein ihr nicht angehörender Zykel $\mathfrak{x}$ bestimmen ein Zykelfeld $\mathfrak{u}$ mit den Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_0 &= \quad\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{q}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{q}_3,\\
\mathfrak{u}_1 &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{q}_1 \quad\ - \mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{p}_2,\\
\mathfrak{u}_2 &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_3 \quad\ + \mathfrak{x}_3\mathfrak{p}_1,\\
\mathfrak{u}_3 &= \mathfrak{x}_0\mathfrak{q}_3 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_1 \quad\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Das Verschwinden aller dieser Größen $\mathfrak{u}_i$ ist die Bedingung dafür, daß der Zykel $\mathfrak{x}$ zur Zykelreihe $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ gehört.

Eine Zykelreihe $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ und ein sie nicht enthaltendes Zykelfeld $\mathfrak{u}$ haben einen Zykel $\mathfrak{x}$ gemein mit den Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_0 &= \quad\ \mathfrak{u}_1\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{u}_2\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{p}_3,\\
\mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{u}_0\mathfrak{p}_1 \quad\ - \mathfrak{u}_2\mathfrak{q}_3 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{q}_2,\\
\mathfrak{x}_2 &= \mathfrak{u}_0\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{u}_1\mathfrak{q}_3 \quad\ + \mathfrak{u}_3\mathfrak{q}_1,\\
\mathfrak{x}_3 &= \mathfrak{u}_0\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{u}_1\mathfrak{q}_2 + \mathfrak{u}_2\mathfrak{q}_1 \quad\ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Das Verschwinden aller dieser Größen $\mathfrak{x}_i$ ist die Bedingung dafür, daß das Zykelfeld $\mathfrak{u}$ die Zykelreihe $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ enthält.

Zwei Zykelreihen $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}':\mathfrak{q}'$ haben einen Zykel gemein und liegen in einem Zykelfeld, wenn

$$(22) \qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1' - \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2' + \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3' + \mathfrak{q}_1\mathfrak{p}_1' - \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_2' + \mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_3' = 0.$$

Zwei verschiedene Zykelfelder $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ haben eine Zykelreihe $\mathfrak{p}:\mathfrak{q}$ gemein mit den Koordinaten

$$(23) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{q}_1 &= \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_0' & u_1' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{q}_2 = \begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ u_0' & u_2' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{q}_3 = \begin{vmatrix} u_0 & u_3 \\ u_0' & u_3' \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{p}_1 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2' & u_3' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{p}_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{p}_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Drei verschiedene Zykelfelder $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \mathfrak{u}''$, die keine Zykelreihe gemein haben (d. h. nicht linear abhängig sind), haben einen Zykel $\mathfrak{x}$ gemein mit den Koordinaten

$$(24) \quad \mathfrak{x}_0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} u_0 & u_2 & u_3 \\ u_0' & u_2' & u_3' \\ u_0'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_3 \\ u_0' & u_1' & u_3' \\ u_0'' & u_1'' & u_3'' \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_3 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0' & u_1' & u_2' \\ u_0'' & u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden aller dieser Größen $\mathfrak{x}_i$ ist die Bedingung dafür, daß die Zykelfelder $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \mathfrak{u}''$ eine Zykelreihe gemeinsam haben.

Wir bemerken, daß auch in diesen Determinanten die Indizes die natürliche Reihenfolge innehalten.

## § 8.

## Quaternionen und Biquaternionen.

Aus den gewöhnlichen Quaternionen oder — wie wir lieber sagen wollen — *Quaternionen erster Art*

$$(25) \qquad a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

mit der folgenden Multiplikationstafel für die Einheiten

$$(26) \qquad \begin{array}{cccc} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -1 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -1 \end{array}$$

erhält man durch eine imaginäre lineare Transformation

$$(27) \qquad \begin{aligned} 1 &= 1, & e_1 &= i e_1, & e_2 &= e_2, & e_3 &= i e_3, \\ a_0 &= a_0, & a_1 &= -i a_1, & a_2 &= a_2, & a_3 &= -i a_3 \end{aligned}$$

die *Quaternionen zweiter Art*

$$(28) \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3$$

mit der folgenden Multiplikationstafel für die Einheiten

$$(29)\qquad \begin{array}{cccc} 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 1 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 \\ e_3 & -e_2 & -e_1 & 1 \end{array}$$

In beiden Fällen nennt man die erste Komponente $a_0$ ($\mathfrak{a}_0$) den *Skalarteil*, und erklärt den *Vektorteil* $a_v$ ($\mathfrak{a}_v$) und die *konjugierte* Quaternion $\tilde{a}$ ($\tilde{\mathfrak{a}}$) durch die Gleichungen

$$(30)\qquad \begin{aligned} a &= a_0 + a_v, & \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_v, \\ \tilde{a} &= a_0 - a_v, & \tilde{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}_v. \end{aligned}$$

Es gilt dann, wie man leicht bestätigt:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \tilde{\tilde{a}} &= a, & \tilde{\tilde{\mathfrak{a}}} &= \mathfrak{a}, \\ a + \tilde{a} &= 2a_0, & \mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{a}} &= 2\mathfrak{a}_0, \\ a - \tilde{a} &= 2a_v, & \mathfrak{a} - \tilde{\mathfrak{a}} &= 2\mathfrak{a}_v, \\ \widetilde{ab} &= \tilde{b}\cdot\tilde{a}, & \widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} &= \tilde{\mathfrak{b}}\cdot\tilde{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

Man merke sich in den beiden letzten Gleichungen die Reihenfolge der Faktoren. Es folgt weiter:

$$(32)\qquad \begin{aligned} a\tilde{b} + b\tilde{a} &= a\tilde{b} + \widetilde{a\tilde{b}} = & \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}} + \widetilde{\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}} = \\ &= 2(a\tilde{b})_0 = & &= 2(\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}})_0 = \\ &= 2(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), & &= 2(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a} \end{aligned}$$

Vor allem aber merken wir uns den als *Norm* von $a$ ($\mathfrak{a}$) bezeichneten Ausdruck

$$(33)\qquad \begin{aligned} N(a) = a\tilde{a} &= & N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}} &= \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, & &= \mathfrak{a}_0^2 - \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 - \mathfrak{a}_3^2. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(34)\qquad \begin{aligned} N(ab) = ab\cdot\widetilde{ab} &= & N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\cdot\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} &= \\ = ab\,\tilde{b}\tilde{a} \quad = a\cdot N(b)\cdot\tilde{a} &= & = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\tilde{\mathfrak{b}}\tilde{\mathfrak{a}} \quad = \mathfrak{a}\cdot N(\mathfrak{b})\cdot\tilde{\mathfrak{a}} &= \\ = a\tilde{a}\cdot N(b) = N(a)\cdot N(b), & & = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}}\cdot N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{b}). & \end{aligned}$$

Die zu $a$ ($\mathfrak{a}$) inverse Quaternion drückt sich — unter der Voraussetzung $N(a) \neq 0$ ($N(\mathfrak{a}) \neq 0$) — so aus:

$$(35)\qquad a^{-1} = \frac{1}{N(a)}\cdot\tilde{a}, \qquad \mathfrak{a}^{-1} = \frac{1}{N(\mathfrak{a})}\cdot\tilde{\mathfrak{a}},$$

was leicht verifiziert werden kann.

*Biquaternionen* — erster und zweiter Art — erhält man durch Zusammenstellung zweier Quaternionen $a$ und $b$ ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) zu einer Größe der Form

$$A = a + b\varepsilon, \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\varepsilon, \tag{36}$$

wo $\varepsilon$ ein Symbol bedeutet, mit dem assoziativ, distributiv und kommutativ gerechnet werden soll und dessen Quadrat $\varepsilon^2$ in allen Rechnungen durch eine gewisse (beliebig gewählte, aber festbleibende) reelle Zahl ersetzt werden soll. Je nach Wahl dieser Zahl bekommen wir verschiedene Systeme von Biquaternionen, die aber nicht alle „wesentlich" verschieden sind, da man eine beliebige unter ihnen durch eine reelle lineare Transformation immer auf einen der drei Fälle

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon^2 = -1, \qquad \varepsilon^2 = 0$$

zurückführen kann. Die beiden ersten Fälle ($\varepsilon^2 = 1$ und $\varepsilon^2 = -1$) können ferner durch eine imaginäre lineare Transformation ($\varepsilon' = i\varepsilon$) ineinander überführt werden, während der letzte Fall ($\varepsilon^2 = 0$) auch im komplexen Gebiet eine Sonderstellung einnimmt.

Obgleich wir im folgenden nur die Bezeichnungen „Biquaternionen erster und zweiter Art" benutzen, werden in Wirklichkeit sechs verschiedene Arten gleichzeitig behandelt, nämlich:

| | |
|---|---|
| Biquaternionen 1. Art mit $\varepsilon^2 = +1$, | Biquaternionen 2. Art mit $\varepsilon^2 = +1$, |
| „ „ „ $\varepsilon^2 = -1$, | „ „ „ $\varepsilon^2 = -1$, |
| „ „ „ $\varepsilon^2 = 0$. | „ „ „ $\varepsilon^2 = 0$. |

Ausgeschrieben lauten die Biquaternionen $A$ und $\mathfrak{A}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A &= (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + (b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)\cdot\varepsilon, \\ \mathfrak{A} &= (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3) + (\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1 e_1 + \mathfrak{b}_2 e_2 + \mathfrak{b}_3 e_3)\cdot\varepsilon. \end{aligned} \tag{37}$$

Sie sind mithin als höhere komplexe Größen mit acht Einheiten

$$\begin{aligned} &1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ \varepsilon,\ \varepsilon e_1,\ \varepsilon e_2,\ \varepsilon e_3 \\ \text{oder}\quad &1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ \varepsilon,\ \varepsilon e_1,\ \varepsilon e_2,\ \varepsilon e_3 \end{aligned} \tag{38}$$

aufzufassen. Jede Gleichung zwischen Biquaternionen vertritt also acht Gleichungen zwischen gewöhnlichen komplexen (oder, nach Umständen, reellen) Zahlen.

Wir nennen $A_0 = a_0 + b_0\varepsilon$ ($\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0\varepsilon$) den *Skalarteil*, $A_\nu = a_\nu + b_\nu\varepsilon$ ($\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{a}_\nu + \mathfrak{b}_\nu\varepsilon$) den *Vektorteil*, und führen *zwei Arten von Konjugierten* ein, nämlich: $\tilde{A} = \tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon$ ($\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}}\varepsilon$) und $\hat{A} = a - b\varepsilon$ ($\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}\varepsilon$). Zwischen allen diesen Begriffen bestehen natürlich eine Menge Beziehungen,

von denen die wichtigsten angeführt werden sollen:

$$
\begin{aligned}
&A = a + b\varepsilon = A_0 + A_\nu, && \mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\varepsilon = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_\nu,\\
&\tilde{A} = \tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon = A_0 - A_\nu, && \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}}\varepsilon = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_\nu,\\
&\hat{A} = a - b\varepsilon = \hat{A}_0 + \hat{A}_\nu, && \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}\varepsilon = \hat{\mathfrak{A}}_0 + \hat{\mathfrak{A}}_\nu,\\
&\hat{\tilde{A}} = \tilde{a} - \tilde{b}\varepsilon = \hat{A}_0 - \hat{A}_\nu, && \hat{\tilde{\mathfrak{A}}} = \tilde{\mathfrak{a}} - \tilde{\mathfrak{b}}\varepsilon = \hat{\mathfrak{A}}_0 - \hat{\mathfrak{A}}_\nu.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Ferner sind die Zeichen $_0$, $_\nu$, $\tilde{}$, $\hat{}$ miteinander vertauschbar (so daß beispielsweise $\hat{\tilde{A}} = \tilde{\hat{A}}$ und $(\hat{A}_\nu) = (\hat{A})_\nu$), und es gelten die Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{A}} = \hat{\hat{A}} = A, && \tilde{\tilde{\mathfrak{A}}} = \hat{\hat{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A},\\
&\widehat{(AB)} = \hat{A}\cdot\hat{B}, && \widehat{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} = \hat{\mathfrak{A}}\cdot\hat{\mathfrak{B}},\\
&\widetilde{(AB)} = \tilde{B}\cdot\tilde{A}, && \widetilde{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} = \tilde{\mathfrak{B}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}},\\
&\widehat{\widetilde{(AB)}} = \hat{\tilde{B}}\cdot\hat{\tilde{A}}, && \widehat{\widetilde{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}} = \hat{\tilde{\mathfrak{B}}}\cdot\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Natürlich ist bei Biquaternionen, ähnlich wie bei Quaternionen, die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes im allgemeinen wesentlich. Wir wollen uns jedoch merken, daß mit skalaren Biquaternionen (d. h. mit Biquaternionen, deren Vektorteile verschwinden) überall kommutativ gerechnet werden kann. Solche Biquaternionen enthalten nämlich unter den acht Einheiten (38) nur 1 und $\varepsilon$, und mit ihnen kann nach Voraussetzung kommutativ gerechnet werden.

Ein Beispiel von einer skalaren Biquaternion liefert die *Norm* einer beliebigen Biquaternion $A$ ($\mathfrak{A}$), die wir so definieren:

$$
\begin{aligned}
N(A) &= A\tilde{A} && N(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{A}}\\
&= (a\tilde{a} + b\tilde{b}\cdot\varepsilon^2) + (a\tilde{b} + b\tilde{a})\varepsilon, && = (\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{b}}\cdot\varepsilon^2) + (\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{a}})\varepsilon.
\end{aligned} \tag{41}
$$

Genau wie bei Quaternionen findet man (vgl. (34)):

$$
N(AB) = N(A)\cdot N(B), \qquad N(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = N(\mathfrak{A})\cdot N(\mathfrak{B}). \tag{42}
$$

Die zu $A$ ($\mathfrak{A}$) inverse Biquaternion drückt sich so aus:

$$
A^{-1} = \frac{1}{N(A)}\cdot\tilde{A}, \qquad \mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{N(\mathfrak{A})}\cdot\tilde{\mathfrak{A}}. \tag{43}
$$

Die Voraussetzung ist hierbei, daß $\frac{1}{N(A)}$ und $\frac{1}{N(\mathfrak{A})}$ existieren. Sonst existieren auch $A^{-1}$ und $\mathfrak{A}^{-1}$ nicht. Aus $AA^{-1} = 1$ folgt nämlich $N(A)\cdot N(A^{-1}) = 1$, d. h. $\frac{1}{N(A)}$ existiert (und ist gleich $N(A^{-1})$). Es sei bemerkt, daß $N(A) \neq 0$ für die Existenz von $\frac{1}{N(A)}$ nicht hinreicht, was durch die folgenden Beispiele hervorgeht: 1. $N(A) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 1$, 2. $N(A) = 1 + i\varepsilon$, $\varepsilon^2 = -1$, 3. $N(A) = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$.

Wir wollen jetzt einige spezielle Biquaternionen betrachten, nämlich die, deren Normen gewöhnliche komplexe Zahlen sind. Sie sollen als *Biquaternionen mit Zahlennormen* bezeichnet werden und sind nach der Gleichung (41) dadurch gekennzeichnet, daß

$$a\tilde{b} + b\tilde{a} = 0, \qquad \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{a}} = 0, \tag{44}$$

oder ausgeschrieben (vgl. (32)):

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 = 0. \tag{45}$$

Nur diese $\infty^{2\cdot 7}$ Biquaternionen erster Art mit Zahlennormen werden in den Studyschen Parameterdarstellungen der Gruppe $G_{2\cdot 6}$ und der Nebenschicht $H_{2\cdot 6}$ (vgl. § 3) benutzt.

Nur diese $\infty^{2\cdot 7}$ Biquaternionen zweiter Art mit Zahlennormen werden in den hier vorzuführenden Parmeterdarstellungen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6}$ und der Nebenschicht $\mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ (vgl. § 3) benutzt.

Aus der Gleichung (42) folgt unmittelbar: *Das Produkt zweier Biquaternionen mit Zahlennormen ist wieder eine Biquaternion mit Zahlennorm.*

Ferner überzeugt man sich leicht, daß *die aus Biquaternionen mit Zahlennormen $A$ und $\mathfrak{A}$ abgeleiteten Konjugierten $\tilde{A}$, $\hat{A}$, $\hat{\tilde{A}}$ ($\tilde{\mathfrak{A}}$, $\hat{\mathfrak{A}}$, $\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}$) auch Zahlennormen haben.*

Mittels der Gleichung (43) und der danach folgenden Bemerkungen folgt: *Die Inverse einer Biquaternion mit Zahlennorm existiert, wenn die Norm nicht verschwindet, und ist eine neue Biquaternion mit nicht-verschwindender Zahlennorm.*

Das Wesentlichste in diesen Sätzen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: *Die Biquaternionen mit nicht-verschwindenden Zahlennormen bilden bei Zusammensetzung durch Multiplikation eine Gruppe.*

## § 9.

## Parmeterdarstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$.

Die Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen im Euklidischen Raume, die Study in seiner Arbeit „Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik“ (Sitz.-Ber. d. Berl. Math.-Ges. 12) mitgeteilt hat, ist kurz die folgende:

Wir schreiben die homogenen Punktkoordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, die homogenen Geradenkoordinaten $(p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3)$ und die homogenen Ebenenkoordinaten $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ folgendermaßen in *Biquaternionen erster Art mit $\varepsilon^2 = 0$* zusammen:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)\varepsilon = x_0 + x_\nu \varepsilon, \\ P &= (p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3) + (q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3)\varepsilon = p_\nu + q_\nu \varepsilon, \\ U &= (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) + u_0 \varepsilon = u_\nu + u_0 \varepsilon. \end{aligned} \tag{46}$$

Wir bemerken, daß diese Biquaternionen Zahlennormen haben.

Die Transformationsformeln für Punkte, Geraden und Ebenen bei der allgemeinsten Bewegung lassen sich dann, wenn $A = a + b\varepsilon$ eine *Biquaternion erster Art* ($\varepsilon^2 = 0$) *mit nicht-verschwindender Zahlennorm* bedeutet, folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} X' &= A^{-1} X \hat{A}, \\ P' &= A^{-1} P A, \\ U' &= A^{-1} U \hat{A}, \end{aligned} \tag{47}$$

$(G_{2\cdot 6})$

oder ausführlicher geschrieben (damit die spezielle Form der einzelnen Biquaternionen zum Vorschein komme):

$$\begin{aligned} x_0' + x_\nu' \varepsilon &= (a + b\varepsilon)^{-1} (x_0 + x_\nu \varepsilon)(a - b\varepsilon), \\ p_\nu' + q_\nu' \varepsilon &= (a + b\varepsilon)^{-1} (p_\nu + q_\nu \varepsilon)(a + b\varepsilon), \\ u_\nu' + u_0' \varepsilon &= (a + b\varepsilon)^{-1} (u_\nu + u_0 \varepsilon)(a - b\varepsilon), \end{aligned} \tag{48}$$

$(G_{2\cdot 6})$

wo (da $N(a + b\varepsilon)$ eine nicht-verschwindende Zahl sein soll)

$$a\tilde{b} + b\tilde{a} = 0, \qquad a\tilde{a} \neq 0. \tag{49}$$

Die analoge Darstellung der Umlegungen heißt

$$\begin{aligned} \hat{X}' &= C^{-1} X \hat{C}, \\ \hat{P}' &= -C^{-1} P C, \\ \hat{U}' &= C^{-1} U \hat{C}, \end{aligned} \tag{50}$$

$(H_{2\cdot 6})$

oder ausführlicher geschrieben

$$\begin{aligned} x_0' - x_\nu' \varepsilon &= (c + d\varepsilon)^{-1} (x_0 + x_\nu \varepsilon)(c - d\varepsilon), \\ p_\nu' - q_\nu' \varepsilon &= -(c + d\varepsilon)^{-1} (p_\nu + q_\nu \varepsilon)(c + d\varepsilon), \\ u_\nu' - u_0' \varepsilon &= (c + d\varepsilon)^{-1} (u_\nu + u_0 \varepsilon)(c - d\varepsilon), \end{aligned} \tag{51}$$

$(H_{2\cdot 6})$

wo

$$c\tilde{d} + d\tilde{c} = 0, \qquad c\tilde{c} \neq 0. \tag{52}$$

Die Formeln (47) und (50) liefern natürlich ohne weiteres auch die „Bewegungen" und „Umlegungen" der Geometrie von Laguerre, wenn wir für $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $(p_1 : p_2 : p_3 : q_1 : q_2 : q_3)$ und $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ durch die Formeln (12) in § 3, (15) in § 4 und (17) in § 6 $[\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3]$, $[\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2 : \mathfrak{p}_3 : \mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_2 : \mathfrak{q}_3]$ und $[\mathfrak{u}_0 : \mathfrak{u}_1 : \mathfrak{u}_2 : \mathfrak{u}_3]$ einführen. Es werden aber dann die reellen Transformationen nicht durch reelle Biquaternionen $A$, $C$ dargestellt. Jetzt soll gezeigt werden, daß man durch Übergang zu Biquaternionen *zweiter* Art eine solche Darstellung gewinnt. Dieser Übergang besteht einfach in der folgenden imaginären Transformation der Einheiten

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 = i e_1, \qquad \mathfrak{e}_2 = e_2, \qquad \mathfrak{e}_3 = i e_3, \\ \mathfrak{E} = -i\varepsilon. \end{aligned} \tag{53}$$

Es wird, wenn man gleichzeitig die Formeln (12), (15) und (17) benutzt:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)\varepsilon \\ &= \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{x}_1 e_1 - i\mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)\varepsilon \\ &= \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= (p_1 e_1 + p_2 e_1 + p_3 e_3) + (q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_2)\varepsilon \\ &= (\mathfrak{p}_1 e_1 - i\mathfrak{p}_2 e_2 + \mathfrak{p}_3 e_3) + (-i\mathfrak{q}_1 e_1 - \mathfrak{q}_2 e_2 - i\mathfrak{q}_3 e_3)\varepsilon \\ &= -i[(\mathfrak{p}_1 e_1 + \mathfrak{p}_2 e_2 + \mathfrak{p}_3 e_3) + (\mathfrak{q}_1 e_1 + \mathfrak{q}_2 e_2 + \mathfrak{q}_3 e_3)E], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= (u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) + u_0\varepsilon \\ &= (-\mathfrak{u}_1 e_1 + i\mathfrak{u}_2 e_2 - \mathfrak{u}_3 e_3) + \mathfrak{u}_0\varepsilon \\ &= i[(\mathfrak{u}_1 e_1 + \mathfrak{u}_3 e_2 + \mathfrak{u}_3 e_3) + \mathfrak{u}_0 E]. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

(54)
$$\left|\begin{array}{ll} \mathfrak{X} = & \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)E = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_\nu E, \\ \mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_1 e_1 + \mathfrak{p}_2 e_2 + \mathfrak{p}_3 e_3) + (\mathfrak{q}_1 e_1 + \mathfrak{q}_2 e_2 + \mathfrak{q}_3 e_3)E = \mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{q}_\nu E, \\ \mathfrak{U} = (\mathfrak{u}_1 e_1 + \mathfrak{u}_2 e_2 + \mathfrak{u}_3 e_3) + \mathfrak{u}_0 E & = \mathfrak{u}_\nu + \mathfrak{u}_0 E, \end{array}\right.$$

so folgt

(55)
$$X = \mathfrak{X}, \qquad P = -i\mathfrak{P}, \qquad U = i\mathfrak{U}.$$

Die Biquaternionen erster Art $A$ und $C$ gehen bei der Transformation (53) in Biquaternionen zweiter Art über, etwa

(56)
$$A = \mathfrak{A}, \qquad C = \mathfrak{C},$$

und es haben natürlich auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Zahlennormen.

Setzen wir nun (55) und (56) in (47) und (50) ein, so erhalten wir die folgenden Transformationsformeln für Zykeln, (lineare) Zykelreihen und (lineare) Zykelfelder:

(57)
$$\left|\begin{array}{ll} \mathfrak{X}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{A}}, & \\ \mathfrak{P}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}, & (\mathfrak{L}_{2\cdot 6}) \\ \mathfrak{U}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{U}\hat{\mathfrak{A}}, & \end{array}\right.$$

(58)
$$\left|\begin{array}{ll} \hat{\mathfrak{X}}' = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{X}\hat{\mathfrak{C}}, & \\ \hat{\mathfrak{P}}' = -\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{C}, & (\mathfrak{M}_{2\cdot 6}) \\ \hat{\mathfrak{U}}' = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{U}\hat{\mathfrak{C}}. & \end{array}\right.$$

Jetzt verstehen wir, warum eine Abänderung in der Bezeichnung im Anfang des § 3 vorgenommen wurde, und warum uns solche ungewöhnliche

Koordinatendefinitionen wie in (13) in § 4 und (16) in § 6 begegnet sind. Wenn wir nämlich ohne solche Merkwürdigkeiten diese Darstellungen unserer „Bewegungen“ und „Umlegungen“ haben wollten, hätten wir in die Formeln (54) mehrere Minuszeichen in ganz unregelmäßiger Weise einführen müssen. Wir haben unsere Bezeichnungen nach der Natur der Quaternionen zweiter Art eingerichtet.

Da $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{U}$ „elastische“ Biquaternionen sind (d. h. solche, deren Koordinaten homogene Größen sind, so daß Multiplikation mit einem nichtverschwindenden Zahlenfaktor gleichgültig ist), so ist es zweckmäßig, für $\mathfrak{A}^{-1}$ und $\mathfrak{C}^{-1}$ ihre Werte nach den Formeln (43) des § 8 einzuführen. Für die erste der Formeln (57) erhält man dann beispielsweise

$$N(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{X}' = \tilde{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{X}\, \hat{\mathfrak{A}}.$$

Den Zahlenfaktor $N(\mathfrak{A})$ können wir uns aber in die elastische Biquaternion $\mathfrak{X}'$ eingezogen denken, so daß wir ebensogut

$$\mathfrak{X}' = \tilde{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{X}\, \hat{\mathfrak{A}}$$

schreiben können[3]). Wenn wir so mit allen Formeln (57) und (58) verfahren, erhalten wir

(59)
$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{X}' &= \tilde{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{X}\, \hat{\mathfrak{A}}, \\ \mathfrak{P}' &= \tilde{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{A}, \qquad (\mathfrak{L}_{2\cdot 6}) \\ \mathfrak{U}' &= \tilde{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{U}\, \hat{\mathfrak{A}}, \end{aligned}}$$

(60)
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathfrak{X}}' &= \tilde{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{X}\, \hat{\mathfrak{C}}, \\ \hat{\mathfrak{P}}' &= \tilde{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{C}, \qquad (\mathfrak{M}_{2\cdot 6}) \\ \hat{\mathfrak{U}}' &= \tilde{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{U}\, \hat{\mathfrak{C}}. \end{aligned}}$$

Wenn wir diese Formeln teilweise ausschreiben, so daß die Struktur von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ sichtbar wird, erhalten wir

(61)
$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_0' + \mathfrak{x}_\nu' E &= (\tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}} E)(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_\nu E)(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} E), \\ \mathfrak{p}_\nu' + \mathfrak{q}_\nu' E &= (\tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}} E)(\mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{q}_\nu E)(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} E), \qquad (\mathfrak{L}_{2\cdot 6}) \\ \mathfrak{u}_\nu' + \mathfrak{u}_0' E &= (\tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}} E)(\mathfrak{u}_\nu + \mathfrak{u}_0 E)(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} E), \end{aligned}}$$

[3]) Study macht diese Abänderungen in seinen Formeln nicht, weil seine Biquaternionen $X, P, U$ nicht „elastisch“ sind; er betrachtet nämlich Punkte, Geraden und Ebenen mit *Gewichten* und gibt seinen Formeln dadurch eine weitere Bedeutung.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_\nu' E &= (\tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{\mathfrak{d}} E)(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_\nu E)(\mathfrak{c} - \mathfrak{d} E),\\
\mathfrak{p}_\nu' - \mathfrak{q}_\nu' E &= (\tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{\mathfrak{d}} E)(\mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{q}_\nu E)(\mathfrak{c} + \mathfrak{d} E), \qquad (\mathfrak{M}_{2\cdot 6})\\
\mathfrak{u}_\nu' - \mathfrak{u}_0' E &= (\tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{\mathfrak{d}} E)(\mathfrak{u}_\nu + \mathfrak{u}_0 E)(\mathfrak{c} - \mathfrak{d} E),
\end{aligned}
\tag{62}
$$

mit den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}} + \mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{a}} &= 0, \quad \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}} \neq 0,\\
\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{d}} + \mathfrak{d}\tilde{\mathfrak{c}} &= 0, \quad \mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{c}} \neq 0,
\end{aligned}
\tag{63}
$$

die aussagen, daß die Biquaternionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ nicht-verschwindende Zahlennormen haben. Ausgeschrieben heißen sie (vgl. (41), (32) und (33) des § 8)

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 = 0, \quad a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \neq 0 \tag{64}$$

und

$$c_0 b_0 - c_1 b_1 + c_2 b_2 - c_3 b_3 = 0, \quad c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 \neq 0. \tag{65}$$

Damit man besser verstehe, wieviel in unseren Formeln enthalten ist, schreiben wir die Formeln (59) oder (61) für die „Bewegungen“ auch noch ausführlich. Sie lauten dann

$$
\begin{aligned}
\xi_0' &= \alpha_{00}\xi_0,\\
\xi_1' &= \alpha_{10}\xi_0 - \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 - \alpha_{13}\xi_3,\\
\xi_2' &= \alpha_{20}\xi_0 - \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 - \alpha_{23}\xi_3,\\
\xi_3' &= \alpha_{30}\xi_0 - \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 - \alpha_{33}\xi_3,
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1' &= -\alpha_{11}\mathfrak{p}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{p}_2 - \alpha_{13}\mathfrak{p}_3,\\
\mathfrak{p}_2' &= -\alpha_{21}\mathfrak{p}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{p}_2 - \alpha_{23}\mathfrak{p}_3,\\
\mathfrak{p}_3' &= -\alpha_{31}\mathfrak{p}_1 + \alpha_{32}\mathfrak{p}_2 - \alpha_{33}\mathfrak{p}_3,\\
\mathfrak{q}_1' &= -\beta_{11}\mathfrak{p}_1 + \beta_{12}\mathfrak{p}_2 - \beta_{13}\mathfrak{p}_3 - \alpha_{11}\mathfrak{q}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{q}_2 - \alpha_{13}\mathfrak{q}_3,\\
\mathfrak{q}_2' &= -\beta_{21}\mathfrak{p}_1 + \beta_{22}\mathfrak{p}_2 - \beta_{23}\mathfrak{p}_3 - \alpha_{21}\mathfrak{q}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{q}_2 - \alpha_{23}\mathfrak{q}_3,\\
\mathfrak{q}_3' &= -\beta_{31}\mathfrak{p}_1 + \beta_{32}\mathfrak{p}_2 - \beta_{33}\mathfrak{p}_3 - \alpha_{31}\mathfrak{q}_1 + \alpha_{32}\mathfrak{q}_2 - \alpha_{33}\mathfrak{q}_3,
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u}_0' &= \alpha_{00}\mathfrak{u}_0 - \alpha_{01}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{02}\mathfrak{u}_2 - \alpha_{03}\mathfrak{u}_3,\\
\mathfrak{u}_1' &= \quad - \alpha_{11}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{u}_2 - \alpha_{13}\mathfrak{u}_3,\\
\mathfrak{u}_2' &= \quad - \alpha_{21}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{u}_2 - \alpha_{23}\mathfrak{u}_3,\\
\mathfrak{u}_3' &= \quad - \alpha_{31}\mathfrak{u}_1 + \alpha_{32}\mathfrak{u}_2 - \alpha_{33}\mathfrak{u}_3,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
\alpha_{00} &= \quad a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2,\\
\alpha_{11} &= -a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2,\\
\alpha_{22} &= \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,\\
\alpha_{33} &= -a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,
\end{aligned}
\tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{23} = 2(a_2 a_3 + a_0 a_1), \quad \alpha_{32} = 2(a_2 a_3 - a_0 a_1),\\
(70)\qquad &\alpha_{13} = 2(a_1 a_3 + a_0 a_2), \quad \alpha_{31} = 2(a_1 a_3 - a_0 a_2),\\
&\alpha_{12} = 2(a_1 a_2 + a_0 a_3), \quad \alpha_{21} = 2(a_1 a_2 - a_0 a_3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{10} = 2(a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_0 b_1 + a_1 b_0),\\
(71)\qquad &\alpha_{20} = 2(a_1 b_3 - a_3 b_1 - a_0 b_2 + a_2 b_0),\\
&\alpha_{30} = 2(a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_0 b_3 + a_3 b_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{01} = 2(a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_0 b_1 - a_1 b_0),\\
(72)\qquad &\alpha_{02} = 2(a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_2 b_0),\\
&\alpha_{03} = 2(a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_0 b_3 - a_3 b_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_{11} = 2(-a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3) = 4(-a_0 b_0 + a_1 b_1) = 4(\quad a_2 b_2 - a_3 b_3),\\
(73)\quad &\beta_{22} = 2(\quad a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = 4(\quad a_0 b_0 + a_2 b_2) = 4(\quad a_1 b_1 + a_3 b_3),\\
&\beta_{33} = 2(-a_0 b_0 - a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = 4(-a_0 b_0 + a_3 b_3) = 4(-a_1 b_1 + a_2 b_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_{23} = 2(a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_0 b_1 + a_1 b_0),\\
(74)\qquad &\beta_{13} = 2(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_0 b_2 + a_2 b_0),\\
&\beta_{12} = 2(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_0 b_3 + a_3 b_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_{32} = 2(a_2 b_3 + a_3 b_2 - a_0 b_1 - a_1 b_0),\\
(75)\qquad &\beta_{31} = 2(a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0),\\
&\beta_{21} = 2(a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_0 b_3 - a_3 b_0).
\end{aligned}
$$

Für die „Umlegungen“ ergeben sich ganz analoge Formeln.

*Was die entwickelten Formeln,* (57) *und* (58), *oder* (59) *und* (60), *oder* (61) *und* (62), *leisten, ist nun folgendes*:

*Sie ordnen jeder „Bewegung“ und jeder „Umlegung“ eine „elastische“ Biquaternion zweiter Art* ($\varepsilon^2 = 0$) *mit nicht-verschwindender Zahlennorm zu, und umgekehrt, und zwar so, daß reelle Transformationen und reelle Biquaternionen einander entsprechen*;

oder in der gewöhnlichen analytischen Sprache:

*Sie ordnen jeder „Bewegung“ und jeder „Umlegung“ ein System von acht homogenen Koordinaten* ($a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : b_0 : b_1 : b_2 : b_3$) *bzw.* ($c_0 : c_1 : c_2 : c_3 : d_0 : d_1 : d_2 : d_3$) *zu, die die Beziehungen* (64) *und* (65) *erfüllen, und umgekehrt, und zwar so, daß reelle Transformationen und reelle Koordinaten einander entsprechen*;

oder in geometrischer Sprache:

*Sie ordnen jeder „Bewegung“ und jeder „Umlegung“ einen Punkt einer nicht-singulären* $M_{2\cdot 6}^2$ *zu, und — unter Ausschließung einer* $M_{2\cdot 5}^4$

*dieser $M_{2\cdot 6}^2$ — auch umgekehrt, und zwar so, daß reelle Transformationen und reelle Punkte einander entsprechen.*

*Man sieht leicht, daß die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6}$ und die Nebenschicht $\mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ je zwei reelle Züge haben.* Die reellen „elastischen" Biquaternionen zweiter Art ($\varepsilon^2 = 0$) mit nicht-verschwindenden Zahlennormen können nämlich sowohl positive als negative Normen haben, und man kann eine Biquaternion mit positiver Norm nicht im Reellen stetig so ändern, daß schließlich eine Biquaternion mit negativer Norm entsteht, ohne eine Biquaternion mit verschwindender Norm zu passieren. (Daß ähnliches für die Gruppe $G_{2\cdot 6}$ und die Nebenschicht $H_{2\cdot 6}$ des Raumes nicht zutrifft, beruht darauf, daß reelle Biquaternionen *erster* Art ($\varepsilon^2 = 0$) mit nicht-verschwindenden Zahlennormen immer positive Normen haben.)

## § 10.

## Zusammensetzung von Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$. Die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$.

Wir wollen die „Bewegung", die zur Biquaternion $\mathfrak{A}$ gehört, kurz als die „Bewegung" $\mathfrak{A}$ bezeichnen und analog für „Umlegungen" verfahren.

Wenn wir zunächst eine „Bewegung" $\mathfrak{A}$ und dann noch eine $\mathfrak{A}'$ ausführen:

$$\mathfrak{x}' = \tilde{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{x}'' = \tilde{\mathfrak{A}}'\mathfrak{x}'\hat{\mathfrak{A}}',$$

so ist das Resultat

$$\mathfrak{x}'' = \tilde{\mathfrak{A}}'(\tilde{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{A}})\,\hat{\mathfrak{A}}' = (\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'})\cdot\mathfrak{x}\cdot(\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'})$$

die neue „Bewegung" $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$.

Führen wir zunächst die „Bewegung" $\mathfrak{A}$ und dann die „Umlegung" $\mathfrak{C}$ aus:

$$\mathfrak{x}' = \tilde{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{A}}, \qquad \hat{\mathfrak{x}}'' = \tilde{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{x}'\hat{\mathfrak{C}},$$

so ist das Resultat

$$\hat{\mathfrak{x}}'' = \tilde{\mathfrak{C}}\,(\tilde{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{A}})\,\hat{\mathfrak{C}} = (\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{C}})\cdot\mathfrak{x}\cdot(\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}})$$

eine „Umlegung" $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

Führen wir aber diese beiden Transformationen in der umgekehrten Reihenfolge aus:

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \tilde{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{C}}, \qquad \mathfrak{x}'' = \tilde{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x}'\hat{\mathfrak{A}},$$

wird das Resultat

$$\hat{\mathfrak{x}}'' = \hat{\tilde{\mathfrak{A}}}\,\hat{\mathfrak{x}}'\mathfrak{A} = \hat{\tilde{\mathfrak{A}}}\,(\tilde{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{C}})\,\mathfrak{A} = (\widetilde{\mathfrak{C}\hat{\mathfrak{A}}})\cdot\mathfrak{x}\cdot(\widehat{\mathfrak{C}\hat{\mathfrak{A}}})$$

die „Umlegung" $\mathfrak{C}\hat{\mathfrak{A}}$.

Führen wir schließlich zwei „Umlegungen" $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ nacheinander aus:

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \tilde{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{C}}, \qquad \hat{\mathfrak{x}}'' = \tilde{\mathfrak{C}}'\mathfrak{x}'\hat{\mathfrak{C}}'.$$

so kommt

$$\mathfrak{x}'' = \hat{\mathfrak{E}}'\hat{\mathfrak{x}}'\mathfrak{E}' = \hat{\mathfrak{E}}'(\tilde{\mathfrak{E}}\mathfrak{x}\hat{\mathfrak{E}})\mathfrak{E}' = (\widetilde{\mathfrak{E}\hat{\mathfrak{E}}'})\cdot\mathfrak{x}\cdot(\widehat{\mathfrak{E}\hat{\mathfrak{E}}'}),$$

also die „Bewegung“ $\mathfrak{E}\hat{\mathfrak{E}}'$, heraus.

Diese Ergebnisse stellen wir in einer Tafel zusammen ($\mathfrak{A}$ bedeutet „Bewegung“, $\mathfrak{E}$ „Umlegung“):

(76)

| Erste Transformation | Zweite Transformation | Resultierende Transformation |
|---|---|---|
| $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{A}'$ | $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'$ |
| $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{E}$ | $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{A}\,\mathfrak{E}$ |
| $\mathfrak{E}$ | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}\,\hat{\mathfrak{A}}$ |
| $\mathfrak{E}$ | $\mathfrak{E}'$ | $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{E}\,\hat{\mathfrak{E}}'$ |

Die Schreibweise mit Biquaternionen gibt also auch für die Zusammensetzung unserer Transformationen bequeme Ausdrücke. Damit man den Inhalt dieser Tafel besser verstehe, will ich als Beispiel die Formel:

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'$$

auch ausführlich schreiben; sie lautet dann:

(77)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_0'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1' - \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3',\\
\mathfrak{a}_1'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3' - \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2',\\
\mathfrak{a}_2'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3' - \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1',\\
\mathfrak{a}_3'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_3' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2' - \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1',\\
\mathfrak{b}_0'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1' - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3'\\
&\quad + \mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1' - \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2' + \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3',\\
\mathfrak{b}_1'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_1' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2'\\
&\quad + \mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_1' + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_3' - \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_2',\\
\mathfrak{b}_2'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_2' + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1'\\
&\quad + \mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_2' + \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3' - \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_1',\\
\mathfrak{b}_3'' &= \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2' - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1'\\
&\quad + \mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_3' + \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2' - \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_1'.
\end{aligned}$$

Jetzt folgt leicht, daß die zur „Bewegung“ $\mathfrak{A}$ inverse Transformation die „Bewegung“ $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist. Nach der Tafel (76) ist ja nämlich die Zusammengesetzte von den „Bewegungen“ $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ die „Bewegung“ $\mathfrak{A}\,\tilde{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A}) =$ einer Zahl; bei dieser Transformation werden (vgl. die Formeln (59)) die Ko-

ordinaten nur mit der Zahl $(N(\mathfrak{A}))^2$ multipliziert; die Transformation ist also die Identität. Genau in derselben Weise verifiziert man auch, daß die Inverse der „Umlegung“ $\mathfrak{C}$ die „Umlegung“ $\hat{\mathfrak{C}}$ ist, also gilt die Tafel ($\mathfrak{A}$ bedeutet „Bewegung“, $\mathfrak{C}$ „Umlegung“):

(78)

| Ursprüngliche Transformation | Inverse Transformation |
|---|---|
| $\mathfrak{A}$ | $\tilde{\mathfrak{A}}$ |
| $\mathfrak{C}$ | $\hat{\mathfrak{C}}$ |

Will man für die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ eine analoge Parameterdarstellung mit „bilinearer Zusammensetzung“ (vgl. Formeln (77)) haben, muß man (wie bei der Gruppe $G_{2\cdot 7}$ des Euklidischen Raumes) ein komplexes Zahlensystem mit *zwölf* Einheiten benutzen. Hier wollen wir uns mit der folgenden weniger schönen Darstellung begnügen: Sei $\Lambda$ die durch die Formeln

(79)
$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0' &= \mathfrak{x}_0, \\ \mathfrak{x}_1' &= k\mathfrak{x}_1, \\ \mathfrak{x}_2' &= k\mathfrak{x}_2, \\ \mathfrak{x}_3' &= k\mathfrak{x}_3, \end{aligned} \qquad (k \neq 0) \qquad (\Lambda)$$

definierte eingliedrige Untergruppe von $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$.

*Dann läßt sich jeder Transformation $T$ aus $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ auf eine und nur eine Weise eine Transformation $T'$ der Form $\Lambda$ und eine Transformation $T''$ aus $\mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ so zuordnen, daß $T = T'T''$ ist.*

Dies folgt unmittelbar durch Übertragung aus dem Raum. Es läßt sich nämlich jede Ähnlichkeitstransformation im Raume auf eine und nur eine Weise aus einer Streckung um den Koordinatenanfangspunkt und einer Bewegung zusammensetzen.

*Jede Transformation der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ kann hiernach durch eine nicht-verschwindende Zahl $k$ und eine „elastische“ Biquaternion zweiter Art $\mathfrak{A}$ ($\varepsilon^2 = 0$) mit nicht-verschwindender Zahlennorm gekennzeichnet werden.* Insbesondere gibt $k = +1$ die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6}$ und $k = -1$ die Nebenschicht $\mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ an.

Die Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 7}$ hat vier reelle Züge, da im Reellen die folgenden vier nicht miteinander stetig zusammenhängenden Fälle auftreten können:

1. $k > 0$, $N(\mathfrak{A}) > 0$, 2. $k > 0$, $N(\mathfrak{A}) < 0$, 3. $k < 0$, $N(\mathfrak{A}) > 0$,
4. $k < 0$, $N(\mathfrak{A}) < 0$.

## § 11.

### Involutorische Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$.

Eine Übersicht über die involutorischen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ erhält man am leichtesten durch Übertragung aus dem Raum:

*Euklidischer Raum:*

*Involutorische Bewegungen:*

$\infty^{2\cdot 4}$ Spiegelungen an je einer eigentlichen nicht-isotropen Geraden (oder Umwendungen um je eine solche Gerade). Alle Punkte und Ebenen der Geraden (der Spiegelungs- oder Umwendungsachse) bleiben in Ruhe.

*Involutorische Umlegungen:*

1. $\infty^{2\cdot 3}$ Spiegelungen an eigentlichen Punkten. Der der Umlegung zugeordnete Punkt sowie alle seine Geraden und Ebenen bleiben in Ruhe.

2. $\infty^{2\cdot 3}$ Spiegelungen an eigentlichen nicht-isotropen Ebenen. Die der Umlegung zugeordnete Ebene sowie alle ihre Punkte und Geraden bleiben in Ruhe.

*Laguerresche Ebene:*

*Involutorische „Bewegungen":*

$\infty^{2\cdot 4}$ *„Spiegelungen" an eigentlichen nicht-isotropen Zykelreihen.* Die der „Bewegung" zugeordnete Zykelreihe sowie alle ihre Zykeln und alle sie enthaltenden Zykelfelder bleiben in Ruhe.

*Involutorische „Umlegungen":*

1. $\infty^{2\cdot 3}$ *„Spiegelungen" an eigentlichen Zykeln.* Der der „Umlegung" zugeordnete Zykel sowie alle ihn enthaltenden Zykelreihen und Zykelfelder bleiben in Ruhe.

2. $\infty^{2\cdot 3}$ *„Spiegelungen" an eigentlichen nicht-isotropen Zykelfeldern.* Das der „Umlegung" zugeordnete Zykelfeld sowie alle seine Zykeln und Zykelreihen bleiben in Ruhe.

Analytische Ausdrücke dieser Transformationen erhält man sehr einfach mit Hilfe der Tafel (78).

Damit die „Bewegung" $\mathfrak{A}$ involutorisch sei, d. h. mit der inversen „Bewegung" $\tilde{\mathfrak{A}}$ identisch sei, ist notwendig, daß $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ als „elastische" Biquaternionen äquivalent sind, daß also

$$\mathfrak{A} = \varrho\,\tilde{\mathfrak{A}},$$

wo $\varrho$ eine nicht-verschwindende Zahl ist. Diese Biquaternionengleichung ist mit den folgenden acht Zahlengleichungen gleichbedeutend:

$$\begin{aligned} a_0 &= \varrho\, a_0, & a_1 &= -\varrho\, a_1, & a_2 &= -\varrho\, a_2, & a_3 &= -\varrho\, a_3 \\ b_0 &= \varrho\, b_0, & b_1 &= -\varrho\, b_1, & b_2 &= -\varrho\, b_2, & b_3 &= -\varrho\, b_3. \end{aligned}$$

Da wir nicht $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ haben können, muß $\varrho$ entweder den Wert $+1$ oder den Wert $-1$ haben.

1. $\varrho = +1$ gibt $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Wegen den Bedingungen (64) folgt ferner $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$. Die Biquaternion $\mathfrak{A}$ reduziert sich also auf eine nicht-verschwindende Zahl $a_0$ und stellt die identische Transformation dar. Diese Transformation nennt man nicht involutorisch.

2. $\varrho = -1$ gibt $a_0 = b_0 = 0$, und die Bedingungen (64) gehen in

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \neq 0$$

über. Die Biquaternion $\mathfrak{A} = a_\nu + b_\nu E$ ist folglich — nach der zweiten Formel (54) und § 4 — einer eigentlichen nicht-isotropen Zykelreihe zugeordnet. Die „Bewegung" ist die „Spiegelung" an dieser Zykelreihe.

Damit die „Umlegung" $\mathfrak{C}$ involutorisch sei, d. h. mit der inversen „Umlegung" $\hat{\mathfrak{C}}$ identisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{C}$ und $\hat{\mathfrak{C}}$ als „elastische" Biquaternionen äquivalent sind, also daß

$$\mathfrak{C} = \varrho \hat{\mathfrak{C}},$$

wo $\varrho$ eine nicht-verschwindende Zahl ist. Dies ist mit den folgenden acht Gleichungen gleichbedeutend:

$$c_0 = \varrho c_0, \quad c_1 = -\varrho c_1, \quad c_2 = -\varrho c_2, \quad c_3 = -\varrho c_3,$$
$$b_0 = -\varrho b_0, \quad b_1 = \varrho b_1, \quad b_2 = \varrho b_2, \quad b_3 = \varrho b_3.$$

Wie oben folgt $\varrho = +1$ oder $\varrho = -1$.

1. $\varrho = +1$ gibt $b_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Die erste der Bedingungen (65) ist dann befriedigt, die zweite gibt $c_0 \neq 0$. Unsere Biquaternion $\mathfrak{C} = c_0 + b_\nu E$ ist folglich — nach der ersten Formel (54) — einem eigentlichen Zykel zugeordnet. Die „Umlegung" ist die Spiegelung an diesem Zykel.

2. $\varrho = -1$ gibt $c_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Die erste der Bedingungen (65) ist dann befriedigt, die zweite gibt $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 \neq 0$. Unsere Biquaternion $\mathfrak{C} = c_\nu + b_0 E$ ist folglich — nach der dritten Formel (54) — einem eigentlichen nicht-isotropen Zykelfeld zugeordnet. Die „Umlegung" ist die Spiegelung an diesem Zykelfeld.

Einige von diesen involutorischen Transformationen waren schon Laguerre bekannt. Das waren die Spiegelungen an Zykelfeldern, die bei ihm den Namen „transformations par semi-droites reciproques" trugen. Durch sie läßt sich die ganze Gruppe $\mathfrak{L}_{2\cdot 6} + \mathfrak{M}_{2\cdot 6}$ erzeugen, genau so wie im Euklidischen Raume die Gruppe $G_{2\cdot 6} + H_{2\cdot 6}$ durch die Spiegelungen an Ebenen erzeugt wird.

## § 12.

## Ein anderer Aufbau unserer Geometrie.

Wir haben in unserer Darstellung der ebenen Geometrie von Laguerre den Parallelismus mit der räumlichen Euklidischen Geometrie stark hervorgehoben; die „Übertragung aus dem Raum" ist ja unsere wichtigste Beweismethode gewesen.

Nun wissen wir aber, daß das (ursprünglich offene) Punktkontinuum des Euklidischen Raumes in zwei Weisen zu einem natürlichen Kontinuum der Gruppe $G_{2\cdot 7}$ abgeschlossen werden kann, nämlich: 1. zu einem projektiven Raum $R_{2\cdot 3}$ (was natürlich ist, wenn wir die Euklidische Geometrie in die projektive Geometrie einbauen), 2. zu einem Möbiusschen Raum $M^2_{2\cdot 3}$ (was natürlich ist, wenn wir die Euklidische Geometrie in die konforme Geometrie einbauen). Wir haben (am Schluß des § 2) unser Zykelkontinuum so abgeschlossen, daß die Zykeln eineindeutig den Punkten eines $R_{2\cdot 3}$ zugeordnet werden können. Es muß also möglich sein, das Zykelkontinuum anders abzuschließen, so daß die Zykeln eineindeutig auf die Punkte einer $M^2_{2\cdot 3}$ bezogen werden. Und das können wir in der Tat leicht ausführen.

Als „Ebene", in der Geometrie von Laguerre getrieben werden soll, wählen wir jetzt eine Möbiussche Ebene, d. h. eine reelle nicht-singuläre quadratische Mannigfaltigkeit ($M^2_{2\cdot 2}$) von zwei komplexen Dimensionen (im projektiven Raume von drei Dimensionen) und mit dem Trägheitsindex ein; ihre Gleichung sei

$$-\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0. \tag{80}$$

Der Punkt $(1:0:0:1)$ und die Punkte der beiden durch ihn gehenden Erzeugenden sollen jetzt uneigentliche Punkte heißen.

Ein Kreis dieser $M^2_{2\cdot 2}$, d. h. der Schnitt mit einer (projektiven) Ebene

$$\varphi_0\xi_0+\varphi_1\xi_1+\varphi_2\xi_2+\varphi_3\xi_3=0, \tag{81}$$

wird dadurch orientiert und in einen Zykel verwandelt, daß man zu den vier ursprünglichen Kreiskoordinaten $(\varphi_0:\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3)$ eine fünfte

$$\varphi_4=\sqrt{-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2} \tag{82}$$

hinzufügt. Je nachdem man den einen oder anderen Wert der Quadratwurzel nimmt, erhält man die eine oder andere Orientierung. Die fünf Zykelkoordinaten $(\varphi_0:\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3:\varphi_4)$ befriedigen die Gleichung

$$-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2-\varphi_4^2=0, \tag{83}$$

und zwar können alle Größen $\varphi_i$ reell angenommen werden, wenn der Kreis $(\varphi_0:\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3)$ reellpunktig war. Setzen wir nun

$$x_0=\varphi_0,\quad x_1=\varphi_1,\quad x_2=\varphi_2,\quad x_3=\varphi_3,\quad x_4=i\varphi_4 \tag{84}$$

(isotrope Projektion)

und deuten wir $(x_0:x_1:x_2:x_3:x_4)$ als Punktkoordinaten in einem $R_{2\cdot 4}$, so erhalten wir als Bild unseres Zykelkontinuums die nicht-singuläre $M^2_{2\cdot 3}$

$$-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0,$$

die, da sie den Trägheitsindex eins hat, als ein Möbiusscher Raum (konformgeometrisch abgeschlossener Euklidischer Raum) aufgefaßt werden kann.

Hierdurch ist schon bewiesen, daß unser Zykelkontinuum auf die Punkte eines Möbiusschen Raumes eineindeutig und singularitätenfrei abgebildet werden kann. Da wir aber jetzt einen neuen Orientierungsprozeß für die Kreise benutzt haben, so bleibt noch übrig einzusehen, daß dieser für eigentliche Kreise mit dem früheren (§ 2) übereinstimmt. Das ist in der Tat leicht. Eigentliche Kreise sind jetzt die ebenen Schnitte der Fläche (80), die den Punkt $(1:0:0:1)$ nicht enthalten. Sie sind teils Nicht-Nullkreise $(-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2\neq 0,\ \varphi_4$ zweideutig), die je zwei Zykeln liefern, teils Nullkreise $(-\varphi_0^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2=0,\ \varphi_4$ eindeutig $=0)$, die nur je einen Zykel liefern. Dies ist aber genau so, wie in § 2.

Die uneigentlichen Kreise, d. h. die ebenen Schnitte durch den Punkt $(1:0:0:1)$, sind auch teils Nicht-Nullkreise, die je zwei Zykeln liefern, teils Nullkreise, die nur je einen Zykel liefern. Diese uneigentlichen Zykeln können sehr zweckmäßig Speere genannt werden; sie entsprechen nämlich eineindeutig und sogar singularitätenfrei den von uns in § 1 eingeführten Speeren. In dieser zweiten „Geometrie von Laguerre" erscheinen also die Speere als Zykeln einer besonderen Art, was in der ersten (von uns genauer untersuchten) nicht der Fall war.

Wenn man die Geometrie von Laguerre in die Kreisgeometrie von Lie einbauen will, ist der hier skizzierte zweite Weg der vernünftigere. Da nämlich die Kreisgeometrie von Lie die isotrope Projektion der konformen Geometrie des Raumes ist, so verhält sich in der Ebene die Geometrie von Laguerre zu der von Lie wie im Raum die Euklidische Geometrie zur konformen.

Obgleich die zweite Geometrie von Laguerre im ganzen außerhalb des Rahmens dieser Abhandlung liegt, dürfte die folgende Eigentümlichkeit erwähnt werden: Bei der isotropen Projektion (84) entsprechen einander isotrope Geraden des Raumes und orientierte Linienelemente der Ebene eineindeutig und singularitätenfrei, wenn man nur festsetzt, daß jede isotrope Gerade der Ebene als ein einziges orientiertes Linienelement betrachtet werden soll. Das war in der ersten Geometrie von Laguerre nicht angängig.

Das Zykelkontinuum der zweiten Geometrie von Laguerre ist dasselbe wie das der Kreisgeometrie von Lie, das schon bekannt ist[4]). Das in dieser Abhandlung benutzte erste Zykelkontinuum habe ich aber sonst nicht gesehen.

---

[4]) Die eingehendste Behandlung der Kreisgeometrie von Lie ist enthalten in den Abhandlungen von Study in den Math. Annalen 86, 87, 88 und 89.

Man kann sich vielleicht wundern, daß auf die Abschließung des Zykelkontinuums so großes Gewicht gelegt wird. Der Grund dafür ist aber einfach der, daß viele Sätze, insbesondere in der abzählenden Geometrie, davon abhängen. Man kann ja z. B. algebraische Zykelreihen und Zykelfelder als Analoga von algebraischen Kurven und Flächen des Raumes einführen, und erhält für sie — wie im Raum für Kurven und Flächen — ganz verschiedene charakteristische Zahlen, je nachdem man das eine oder das andere Zykelkontinuum zugrunde legt.

Ich hoffe, in einer späteren Abhandlung zeigen zu können, daß man bei Übertragung von Sätzen der abzählenden Geometrie des Raumes nicht immer ganz triviale Resultate erhält.

(Eingegangen am 20. Oktober 1929.)

# Déformation d'une surface avec un réseau conjugué formé de lignes coniques ou cylindriques et remarques sur un article de M. Liebmann.

Par

Bertrand Gambier à Lille.

## § 1.

## Introduction.

Sous le titre « Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen », M. Liebmann a publié dans ce Journal [Mathematische Zeitschrift **30** (1929), p. 173—184] un article dont les résultats sont tous déjà donnés dans mon Mémoire: « *Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent* », paru au Journal de Liouville, 9e série, t. 1 (1922), p. 19—76; la portion précise de mon article relative au problème de M. Liebmann va de la page 51 à la page 75. La lecture de l'article de M. Liebmann, ainsi que des remarques ajoutées par M. Axel Schur (p. 185) et M. Otto Volk (p. 186—187), montre que ces auteurs ignoraient complètement mes résultats: la question de priorité n'a, du moins à mes yeux, aucune espèce d'importance, d'autant plus que les résultats relatifs à la déformation (mais non ceux relatifs aux mécanismes) avaient été déjà plus ou moins explicités par Peterson dans ses Mémoires Russes, malheureusement trop longtemps ignorés, et surtout par Mlodziejowski: *Über aufeinander abwickelbare P-Flächen* [Math. Annalen **63** (1907), p. 62—84]; ce dernier auteur introduit des mécanismes de l'espace à 4 dimensions, tandis que les miens appartiennent à l'espace à 3 dimensions: en 1922, j'ignorais les résultats (d'ailleurs très incomplets, malgré leur élégance) de Mlodziejowski.

Ce travail a donc pour but, non de soulever une question de priorité, mais de présenter un exposé d'ensemble sur les surfaces applicables (couples ou systèmes $\infty^1$) ayant un réseau conjugué commun formé, dans les deux familles, de lignes *cylindriques* ou *coniques*: réseau doublement cylindrique,

réseau cylindrique-conique, réseau doublement conique. *Toutes ces surfaces sont maintenant déterminées: leur recherche se ramène à celles des mécanismes de mon Mémoire déjà cité*: en 1922, je ne l'avais remarqué que pour les réseaux *doublement cylindriques*, c'est-à-dire surfaces de translation (cas déjà traité par Peterson et Bianchi) et pour les réseaux *cylindrique-coniques*; le réseau *doublement conique* s'obtient lui aussi par les mécanismes, comme l'a montré depuis mon élève, M. Vasseur, qui, sur mes conseils, a étudié la déformation avec réseau conjugué permanent; M. Vasseur a pu aussi montrer les avantages spéciaux aux mécanismes de l'espace à 3 dimensions et à ceux de l'espace à 4 dimensions.

## § 2.

## Mécanismes trans-, dé-formables.

1. — Soient deux courbes planes ou gauches de l'espace $E_3$,

$(a)$ lieu du point $a$ $[a_1(\alpha), a_2(\alpha), a_3(\alpha)]$,

$(b)$ lieu du point $b$ $[b_1(\beta), b_2(\beta), b_3(\beta)]$.

On joint un point $a$, *arbitraire*, de $(a)$ à un point $b$, *arbitraire*, de $(b)$. Supposons qu'il existe un nouveau couple de courbes

$(A)$ lieu de $A$ $[A_1(\alpha), A_2(\alpha), A_3(\alpha)]$,

$(B)$ lieu de $B$ $[B_1(\beta), B_2(\beta), B_3(\beta)]$

tel que, *quels que soient* $\alpha$ *et* $\beta$, on ait $ab = AB$; le couple $(a)$, $(b)$ est dit former un *mécanisme transformable* en le mécanisme $(A)$, $(B)$. Il peut arriver qu'il existe $\infty^1$ couples (ou même $\infty^2$, ou $\infty^3$) couples $(A)$, $(B)$, dépendant d'un paramètre $t$ continu (ou même de $t$ et $t_1$, ou même de $t$, $t_1$ et $t_2$), tels que chacun soit transformable en $(a)$, $(b)$; mais alors la variation continue du paramètre $t$ (et même de $t_1, t_2$) fournit évidemment une série de mécanismes $[(A), (B)]$ *déformables* par continuité les uns en les autres; quant au mécanisme $[(a), (b)]$, il peut, dans ce cas, être l'une des configurations particulières de $[(A), B]$, mais il peut arriver aussi, nous en verrons des exemples, que cette circonstance n'arrive pas et que chaque mécanisme $[(A), (B)]$ soit *déformable* en les autres et simplement *transformable* en $(a)$, $(b)$.

2. — Je rappelle maintenant quelques résultats relatifs à deux surfaces applicables $S$, $S'$ et à leur réseau conjugué commun $(\alpha, \beta)$. Soit $S_1$ la seconde nappe focale de la congruence des tangentes aux courbes $\beta =$ constante de $S$, puis $S_1'$ la nappe analogue relative à $S'$; $M, M'$ étant deux points homologues de $S$ et $S'$, puis $M_1$ et $M_1'$ les seconds points focaux correspondants sur $S_1$ et $S_1'$, on sait que $MM_1 = M'M_1'$; quand $M$ décrit une courbe $\alpha =$ constante de $S$, le point $M_1$ décrit l'arête de rebrousse-

ment de la développable lieu de la droite $MM_1$; or cette développable est applicable sur celle qu'engendre $M'M_1'$; *si donc la courbe particulière* $\alpha = \alpha_0$ *est conique ou cylindrique sur* $S$, *la courbe homologue de* $S'$ *l'est aussi*; si donc *toutes* les courbes $\alpha$ de $S$ sont coniques, les cônes ayant leurs sommets répartis sur une courbe $(a)$, et si *toutes* les courbes $\beta$ ont la même propriété, les cônes ayant leurs sommets sur la courbe $(b)$, la surface $S'$ donnera aussi un réseau doublement conique et deux courbes $(A)$, $(B)$: d'après ce qui a été dit, les triangles homologues $Mab$, $M'AB$ sont égaux, car $Ma = M'A$, $Mb = M'B$, $\hat{M} = \hat{M}'$; *on a donc* $ab = AB$, *et le mécanisme* $(a)$, $(b)$ *est transformable en le mécanisme* $(A)$, $(B)$. Telle est la remarque si simple et élégante que M. Vasseur a faite: ce qui vient d'être expliqué est *nécessaire*; nous verrons plus loin que le mécanisme $(a)$, $(b)$ doit satisfaire à de nouvelles conditions; nous voyons, en tous cas, qu'il est nécessaire de fournir dès maintenant une classification détaillée des mécanismes trans-(ou dé-)formables. J'ai obtenu 8 types: je vais en donner le tableau synoptique.

3. — *Mécanisme* I (*déformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ droite,} & (A) \text{ droite,} \\ (b) \text{ courbe arbitraire,} & (B) \text{ courbe [déterminée par } (b)]. \end{cases}$$

Un déplacement d'ensemble de $(a)$, $(b)$ d'une part et de $(A)$, $(B)$ de l'autre, donne

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 0, & A_3 = a_3, \quad b_3 = B_3, \\ A_1 = A_2 = 0, & b_1^2 + b_2^2 = B_1^2 + B_2^2. \end{cases}$$

On peut considérer encore ce mécanisme comme formé de l'espace tout entier et d'une droite. Chaque point de l'espace est soumis à une rotation arbitraire (variable d'un point à un autre) autour de la droite.

4. — *Mécanisme* II (*déformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ point fixe,} & (A) \text{ cercle d'axe } (B), \\ (b) \text{ courbe arbitraire,} & (B) \text{ droite.} \end{cases}$$

On peut, avec une constante $C$ arbitraire, qui est le paramètre de déformation, écrire

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = A_3 = 0, & B_1 = B_2 = 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - B_3^2 = A_1^2 + A_2^2 = C. \end{cases}$$

5. — *Mécanisme* III (*déformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ droite normale au plan de } (b), & (A) \text{ même définition que } (a), \\ (b) \text{ courbe plane arbitraire,} & (B) \text{ même définition que } (b). \end{cases}$$

On a, avec $C$, paramètre de déformation,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = A_1 = A_2 = 0, & b_3 = B_3 = 0, \\ A_3^2 = a_3^2 + C, & B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C. \end{cases}$$

6. — *Mécanisme* IV (*transformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ conique}, & (A) \text{ droite}, \\ (b) \text{ courbe plane quelconque dans un plan principal de } (a), & (B) \text{ courbe gauche}. \end{cases}$$

Ici chaque partie $[(a), (b)]$ ou $[(A), (B)]$, prise *isolément*, forme un mécanisme *déformable*: $[(A), (B)]$ est du type I, tandis que $[(a), (b)]$ appartient au type déformable VII; néanmoins, et cela justifie une remarque faite plus haut, l'ensemble ne forme qu'un mécanisme transformable. Quand la conique $(a)$ est à centre, on peut prendre, $h$ et $C$ étant des constantes *fixes*,

$$\begin{cases} (a) \quad 0 \quad a_2 \quad a_3, & (A) \quad 0 \quad 0 \quad h a_3, \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3, & (B) \quad B_1 \quad B_2 \quad \dfrac{b_3}{h}, \end{cases}$$

$$a_2^2 + a_3^2 (1 - h^2) = B_1^2 + B_2^2 + \frac{b_3^2}{h^2}(1 - h^2) - b_1^2 = C.$$

Si la conique $(a)$ est une parabole, on peut prendre, avec des constantes *fixes*, $C$ et $m$,

$$\begin{cases} (a) \quad 0 \quad a_2 \quad a_3, & (A) \quad 0 \quad 0 \quad a_3, \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3, & (B) \quad B_1 \quad B_2 \quad b_3 - m, \end{cases}$$

$$a_2^2 - 2ma_3 = B_1^2 + B_2^2 - b_1^2 - 2mb_3 = C.$$

7. — *Mécanisme* V (*déformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ conique}, & (A) \text{ même définition que } (a), \\ (b) \text{ courbe arbitraire}, & (B) \text{ même définition que } (b). \end{cases}$$

Par un déplacement d'ensemble de $[(A), (B)]$, on peut faire *coïncider* $(A)$ *avec une conique homofocale à* $(a)$; si $(a)$ est une conique à centre, on peut, avec un paramètre $C$ *arbitraire*, qui est le paramètre de déformation, écrire

$$\begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0, & (A) \quad \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1 \quad \dfrac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2 \quad 0, \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3, & (B) \quad \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}} b_1 \quad \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}} b_2 \quad B_3, \end{cases}$$

$$\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{a_2^2}{\beta^2} - 1 = 0, \qquad \frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} - 1 = 0, \qquad B_3^2 = C + b_3^2 - \frac{b_1^2 C}{\alpha^2 - C} - \frac{b_2^2}{\beta^2}$$

$\alpha$ et $\beta$ sont des constantes *fixes*.

Si $(a)$ est une parabole, on peut prendre

$$\begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0, \qquad (A) \quad a_1 \quad a_2\sqrt{\dfrac{p-m}{p}} \quad 0, \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3, \qquad (B) \quad b_1 - m \quad b_2\sqrt{\dfrac{p}{p-m}} \quad B_3, \\ a_2^2 - 2pa_1 = 0, \quad \dfrac{mb_3^2}{p-m} + B_3^2 - b_3^2 - 2mb_1 + m^2 = 0. \end{cases}$$

$m$ est alors le paramètre de déformation; $p$ est fixe.

8. — *Mécanisme* VI (*transformable*).

$$\begin{cases} (a) \text{ courbe tracée sur une quadrique de révolution,} \\ (b) \text{ axe de cette quadrique,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A) \text{ même définition que } (b), \text{ les quadriques coïncidant,} \\ (B) \text{ même définition que } (a). \end{cases}$$

On remarque que $[(a), (b)]$, pris isolément, est du type I. — Si la quadrique est à centre, on peut prendre avec deux constantes $C$, $h$ *fixes*,

$$(a) \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3, \qquad (A) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a_3}{h},$$

$$(b) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{B_3}{h}, \qquad (B) \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C.$$

Les courbes $(a)$, $(B)$ sont chacune, *arbitraire*, sur la quadrique. — Si la quadrique est un paraboloïde de révolution, on prend

$$\begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3, \qquad (A) \quad 0 \quad 0 \quad a_3, \\ (b) \quad 0 \quad 0 \quad b_3, \qquad (B) \quad B_1 \quad B_2 \quad b_3 + m, \\ a_1^2 + a_2^2 + 2ma_3 - m^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2mb_3 = C. \end{cases}$$

$m$, $C$ sont des constantes *fixes* ($m = 0$ donne un cylindre).

9. — *Mécanisme* VII (*déformable*).

$$\begin{cases} (a), (b) \text{ deux courbes planes arbitraires placées} \\ \qquad\qquad \text{dans des plans rectangulaires,} \\ (A), (B) \text{ même définition.} \end{cases}$$

Tandis que les autres mécanismes *déformables* (I, II, III, V) font intervenir pour leur déformation, I une fonction arbitraire d'une variable, et II, III, V un paramètre unique, ce mécanisme contient au contraire, *trois* paramètres de déformation, $h$, $C$, $m$. On écrit

$$\begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0, \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} (A) \quad ha_1 \quad A_2 \quad 0, \\ (B) \quad \frac{b_1}{h}+m \quad 0 \quad B_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2^2 = a_1^2(1-h^2)+a_2^2+2mha_1-C, \\ B_3^2 = b_1^2\left(1-\frac{1}{h^2}\right)+b_3^2-2m\frac{b_1}{h}+C-m^2. \end{cases}$$

On peut remarquer que, si l'on a $h \neq \pm 1$, on peut, *par un changement d'origine sur* $Ox$, supposer $m=0$; mais alors, le tableau précédent ne contient plus que deux paramètres explicites $h, C$: *il ne faut pas oublier celui qui résulte du choix arbitraire de l'origine* $O$ *sur* $Ox$; s'il s'agit d'un couple unique $(a, b)$ transformé en $(A, B)$, cet oubli n'a pas d'importance, mais s'il s'agit d'une *déformation continue*, on ne doit pas l'oublier.

10. — *Mécanisme* VIII (*transformable*). $(a)$, $(b)$ sont deux courbes quelconques tracées respectivement sur deux quadriques $Q, Q'$ homofocales (dont l'une peut être réduite à un plan principal de l'autre quadrique); $(A)$ est la courbe de $Q'$ déduite de $(a)$ par l'affinité d'Ivory qui transforme $Q$ en $Q'$; $(B)$ est la courbe déduite de $(b)$ sur $Q$ par cette même affinité.

11. — En résumé, on peut dire:

*Il existe, dans l'espace à* 3 *dimensions, un mécanisme transformable et un seul: c'est le mécanisme* VIII, *que l'on peut regarder comme formé de deux quadriques homofocales.*

*Il existe divers mécanismes déformables: la condition nécessaire et suffisante pour qu'un mécanisme formé de deux courbes soit déformable est que l'une d'elles soit une conique ou une droite, ou bien que les deux courbes soient planes dans deux plans rectangulaires: ce dernier mécanisme peut, si l'on préfère, être regardé comme formé de deux plans rectangulaires.*

*On a trouvé deux mécanismes hybrides* (IV) *et* (VI) *qui sont transformables seulement, bien que chaque couple forme un système déformable.*

## § 3.

## Déformation sur une base doublement conique.

Ce paragraphe résume les travaux de M. Vasseur, imprimés aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure (1930).

1. — Peterson appelle *base de déformation* d'un surface $S$ un réseau conjugué susceptible de rester encore conjugué sur une surface $S'$ applicable sur $S$; un *réseau conjugué arbitraire* de $S$ ne peut servir de base; une base *quelconque* n'est conjuguée que sur deux surfaces $S, S'$; Peterson l'appelle *base simple*; dès qu'une base est conjuguée sur trois surfaces, elle

est conjuguée sur $\infty^1$ surfaces; Peterson l'appelle alors base *principale*. J'ai, plus haut, indiqué que si une base, simple ou principale comprend, sur une surface, une ou plusieurs lignes coniques ou cylindriques, ces lignes sont encore coniques ou cylindriques sur les autres. D'autre part Peterson a montré qu'une surface $S$, rapportée à un réseau doublement conique, peut être représentée par les formules

$$(1)\qquad x=\frac{\int a_1\,d\alpha-\int b_1\,d\beta}{\alpha-\beta},\quad y=\frac{\int a_2\,d\alpha-\int b_2\,d\beta}{\alpha-\beta},\quad z=\frac{\int a_3\,d\alpha-\int b_3\,d\beta}{\alpha-\beta}.$$

Le cône circonscrit suivant la ligne $\alpha=$ constante a pour sommet $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, $a_3(\alpha)$; de même, le cône de sommet $b_1(\beta)$, $b_2(\beta)$, $b_3(\beta)$. Intégrant par parties, ces formules peuvent s'écrire

$$(1')\quad \begin{cases} x=\dfrac{a_1\alpha-\bar a_1-(b_1\beta-\bar b_1)}{\alpha-\beta},\quad y=\dfrac{a_2\alpha-\bar a_2-(b_2\beta-\bar b_2)}{\alpha-\beta},\quad z=\dfrac{a_3\alpha-\bar a_3-(b_3\beta-\bar b_3)}{\alpha-\beta},\\ \dfrac{d\bar a_1}{da_1}=\dfrac{d\bar a_2}{da_2}=\dfrac{d\bar a_3}{da_3}=\alpha,\quad \dfrac{d\bar b_1}{db_1}=\dfrac{d\bar b_2}{db_2}=\dfrac{d\bar b_3}{db_3}=\beta. \end{cases}$$

La surface $S'$, applicable sur $S$, relative à cette base $(\alpha,\beta)$ donne les formules semblables

$$\begin{cases} X=\dfrac{A_1\alpha-\bar A_1-(B_1\beta-\bar B_1)}{\alpha-\beta},\quad Y=\dfrac{A_2\alpha-\bar A_2-(B_2\beta-\bar B_2)}{\alpha-\beta},\quad Z=\dfrac{A_3\alpha-\bar A_3-(B_3\beta-\bar B_3}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{d\bar A_1}{dA_1}=\dfrac{d\bar A_2}{dA_2}=\dfrac{d\bar A_3}{dA_3}=\alpha,\quad \dfrac{d\bar B_1}{dB_1}=\dfrac{d\bar B_2}{dB_2}=\dfrac{d\bar B_3}{dB_3}=\beta. \end{cases}$$

On constate aussitôt que les conditions nécessaires et suffisantes d'applicabilité sont

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\bar a_1}{da_1}=\dfrac{d\bar a_2}{da_2}=\dfrac{d\bar a_3}{da_3}=\dfrac{d\bar A_1}{dA_1}=\dfrac{d\bar A_2}{dA_2}=\dfrac{d\bar A_3}{dA_3}=\alpha,\\ \dfrac{d\bar b_1}{db_1}=\dfrac{d\bar b_2}{db_2}=\dfrac{d\bar b_3}{db_3}=\dfrac{d\bar B_1}{dB_1}=\dfrac{d\bar B_2}{dB_2}=\dfrac{d\bar B_3}{dB_3}=\beta,\\ S(a_1-b_1)^2=S(A_1-B_1)^2,\\ S(a_1-b_1)(\bar a_1-\bar b_1)=S(A_1-B_1)(\bar A_1-\bar B_1),\\ S(\bar a_1-\bar b_1)^2=S(\bar A_1-\bar B_1)^2, \end{cases}$$

de sorte que l'on n'a pas seulement *un* mécanisme trans- ou dé-formable, comme cela avait été prévu au paragraphe précédent, mais *deux* mécanismes $[(a),(b);(A),(B)]$ et $[(\bar a),(\bar b);(\bar A),(\bar B)]$ intimement associés l'un à l'autre: *les tangentes aux points homologues de* $(\bar a)$ *et* $(a)$ *sont parallèles; de même pour* $(\bar A)$ *et* $(A)$, *et de plus, les arcs infiniment petits de* $(\bar a)$ *et* $(a)$ *ont le même rapport que ceux de* $(\bar A)$ *et* $(A)$; *même énoncé pour* $(b),(\bar b),(B),(\bar B)$; *l'angle* $(\overrightarrow{a\,b},\overrightarrow{a\,\bar b})$ *est égal à l'angle* $(\overrightarrow{A\,B},\overrightarrow{A\,\bar B})$ *quels que soient les points* $a$, $b$ *sur les courbes* $(a)$ *et* $(b)$.

2. — Ce qui précède entraîne quelques remarques: la réciprocité des deux mécanismes est évidente, de sorte que nous obtenons aussitôt un nouveau couple $(\Sigma, \Sigma')$, analogue à $(S, S')$

$$(4)\quad \begin{cases} (\Sigma) \quad x_1 = \dfrac{\bar{a}_1 \dfrac{1}{\alpha} - a_1 - \left(\bar{b}_1 \dfrac{1}{\beta} - b_1\right)}{\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{\beta(a_1\alpha - \bar{a}_1) - \alpha(b_1\beta - \bar{b}_1)}{\alpha - \beta}, \\ (\Sigma') \quad X_1 = \dfrac{\bar{A}_1 \dfrac{1}{\alpha} - A_1 - \left(\bar{B}_1 \dfrac{1}{\beta} - B_1\right)}{\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta}} = \dfrac{\beta(A_1\alpha - \bar{A}_1) - \alpha(B_1\beta - \bar{B}_1)}{\alpha - \beta}. \end{cases}$$

D'autre part si le couple $(a), (b)$ a une liaison intrinsèque avec $S$, et de même $(\bar{a}), (\bar{b})$ avec $\Sigma$, il n'y a pas de relation intrinsèque entre $S$ et le couple $(\bar{a}), (\bar{b})$, car on peut écrire ($\lambda, \mu$ constants)

$$x = \frac{a_1(\mu\alpha + \lambda) - (\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1) - [b_1(\mu\beta + \lambda) - (\lambda b_1 + \mu \bar{b}_1)]}{\mu\alpha + \lambda - (\mu\beta + \lambda)},$$

ce qui revient à remplacer le couple $(\bar{a}), (\bar{b})$ par le couple $\lambda(a) + \mu(\bar{a})$, $\lambda(b) + \mu(\bar{b})$ en appelant ainsi les courbes lieux des points $\lambda a_1 + \mu \bar{a}_1$, $\lambda a_2 + \mu \bar{a}_2$, $\lambda a_3 + \mu \bar{a}_3$, etc. C'est cette possibilité qui complique la recherche.

On constate aisément que l'on peut remplacer, au point de vue des mécanismes doubles

$$\{(a), (b); (\bar{a}), (\bar{b})\}, \quad \{(A), (B); (\bar{A}), (\bar{B})\}$$

par les mécanismes ($\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ constantes)

$$\{\lambda(a) + \mu(\bar{a}), \lambda(b) + \mu(\bar{b}); \quad \lambda'(a) + \mu'(\bar{a}), \lambda'(b) + \mu'(\bar{b})\},$$
$$\{\lambda(A) + \mu(\bar{A}), \lambda(B) + \mu(\bar{B}); \lambda'(A) + \mu'(\bar{A}), \lambda'(B) + \mu'(\bar{B})\}$$

et cela revient à trouver deux nouvelles surfaces de cette espèce, applicables l'une sur l'autre, à savoir $\lambda S + \mu\Sigma$, $\lambda S' + \mu\Sigma'$, ce qui fait donc, (à une homothétie près), $\infty^1$ nouveaux couples déduits sans calcul du couple $S, S'$; si même la surface $S'$ déduite de $S$ contient un paramètre de déformation, de façon à obtenir une déformation *continue* de $S$, la surface $\lambda S' + \mu\Sigma'$ représente elle aussi une déformée *continue* de $\lambda S + \mu\Sigma$. On voit aisément que $\lambda S + \mu\Sigma$ est la surface la plus générale, à réseau doublement conique, *parallèle* (au sens de Peterson) à la surface $S$ suivant le réseau conjugué $(\alpha, \beta)$; les théorèmes bien connus de Peterson trouvent alors leur emploi pour fournir $\lambda S' + \mu\Sigma'$ comme déformée de $\lambda S + \mu\Sigma$.

3. — La classification des mécanismes est basée sur les relations linéaires à coefficients constants liant les dérivées

$$\frac{da_1}{d\alpha}, \frac{da_2}{d\alpha}, \frac{da_3}{d\alpha}, \frac{dA_1}{d\alpha}, \frac{dA_2}{d\alpha}, \frac{dA_3}{d\alpha}$$

ou

$$\frac{db_1}{d\beta}, \quad \frac{db_2}{d\beta}, \quad \frac{d\beta_3}{d\beta}, \quad \frac{dB_1}{d\beta}, \quad \frac{dB_2}{d\beta}, \quad \frac{dB_3}{d\beta}.$$

Mais alors, le mécanisme $[(\bar a), (\bar b); (\bar A), (\bar B)]$ est du même type que $[(a), (b), (A), (B)]$. On s'aperçoit aisément que, $\alpha$ et $\beta$ étant des variables effectives, les types VII et VIII conduisent seuls à un résultat acceptable et que la donnée du mécanisme $[(a), (b); (A), (B)]$ choisi d'ailleurs *arbitrairement* dans le type en jeu fournit, *sans intégration*, un mécanisme $[(\bar a), (\bar b); (\bar A), (\bar B)$ dépendant de 3 constantes nouvelles. Prenons d'abord le mécanisme VII

$$(5) \qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0, \qquad (A) \quad h a_1 \quad A_2 \quad 0 \\ a_1^2(1-h^2) + a_2^2 - A_2^2 + 2mh a_1 - C = 0. \end{cases}$$

On écrit avec trois constantes nouvelles $\bar C$, $C'$, $\bar m$

$$(6) \qquad \begin{cases} (\bar a) \quad \bar a_1 \quad \bar a_2 \quad 0, \qquad (\bar A) \quad h\bar a_1 \quad \bar A_2 \quad 0, \\ \bar a_1^2(1-h^2) + \bar a_2^2 - \bar A_2^2 + 2\bar m h \bar a_1 - \bar C = 0, \\ a_1 \bar a_1 (1-h^2) + a_2 \bar a_2 - A_2 \bar A_2 + h(\bar m a_1 + m \bar a_1) - C' = 0, \\ \bar a_1 \frac{da_1}{d\alpha_1}(1-h^2) + \bar a_2 \frac{da_2}{d\alpha_1} - \bar A_2 \frac{dA_2}{d\alpha_1} + h\bar m \frac{da_1}{d\alpha_1} = 0. \end{cases}$$

Ces équations, où $\alpha_1$ signifie le paramètre provisoire, au moyen duquel on exprime $a_1$, $a_2$, $A$, donnent les courbes $(\bar a)$, $(\bar A)$ cherchées. On peut pendre pour inconnue auxiliaire le déterminant $J$

$$J = \begin{vmatrix} \bar a_1 \sqrt{1-h^2} + \dfrac{\bar m h}{\sqrt{1-h^2}} & \bar a_2 & i\bar A_2 \\ a_1 \sqrt{1-h^2} & a_2 & iA_2 \\ \dfrac{da_1}{d\alpha_1}\sqrt{1-h^2} & \dfrac{da_2}{d\alpha_1} & i\dfrac{dA_2}{d\alpha_1} \end{vmatrix}$$

(si toutefois $h^2 \neq 1$); le carré $J^2$ s'obtient aussitôt; on trouve

$$i\sqrt{\left\{\left(\frac{da_1}{d\alpha_1}\right)^2(1-h^2) + \left(\frac{da_2}{d\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{dA_2}{d\alpha_1}\right)^2\right\}\left\{\left(C' + \frac{h^2 m\bar m}{1-h^2}\right)^2 - \left(\bar C + \frac{h^2\bar m^2}{1-h^2}\right)\left(C + \frac{h^2 m^2}{1-h^2}\right)\right\}}$$

et l'on n'a plus que des équations linéaires à résoudre pour obtenir $\bar A_2$, $\bar a_1$, $\bar a_2$. Le calcul de $(\bar b)$ et $(\bar B)$ se fait de même: on a

$$(6) \qquad \begin{cases} (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3, \qquad (B) \quad \frac{b_1}{h} + m \quad 0 \quad B_3, \\ b_1^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + b_3^2 - B_3^2 - 2m\frac{b_1}{h} + C - m^2 = 0, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} (\bar b)\quad \bar b_1\ \ 0\ \ \bar b_3, \qquad (\bar B)\quad \dfrac{\bar b_1}{h}+\bar m\ \ 0\ \ B_3, \\ \bar b_1^2\left(1-\dfrac{1}{h^2}\right)+\bar b_3^2-\bar B_3^2-2\,\bar m\,\dfrac{\bar B_1}{h}+\bar C-\bar m^2=0, \\ b_1\bar b_1\left(1-\dfrac{1}{h^2}\right)+b_3\bar b_3-B_3\bar B_3-\dfrac{1}{h}(\bar m B_1+m\bar B_1)+C'-m\bar m=0, \\ \bar b_1\dfrac{db_1}{d\beta_1}\left(1-\dfrac{1}{h^2}\right)+\bar b_3\dfrac{db_3}{d\beta_1}-\bar B_3\dfrac{dB_3}{d\beta_1}-\dfrac{\bar m}{h}\dfrac{dB_1}{d\beta}=0. \end{cases}$$

$\beta_1$ est, comme $\alpha_1$, un paramètre provisoire. On constate aisément que l'on a

$$\frac{d\bar a_1}{da_1}=\frac{d\bar a_2}{da_2}=\ldots=\alpha, \qquad \frac{d\bar b_1}{db_1}=\frac{d\bar b_3}{db_3}=\ldots=\beta$$

de sorte que les fonctions $\alpha$, $\beta$ se trouvent elles-mêmes obtenues. Le cas $h^2=1$ est un cas de simplification considérable pour les calculs ($h^2=1$, $m=0$ est un cas encore plus simple).

4. — Pour le mécanisme VIII, $(a)$ et $(A)$ sont sur deux quadriques homofocales $Q$, $Q'$; pour ne pas allonger, supposons ces quadriques à centre. On a

$$(8)\quad \begin{cases} a_1^2(1-l^2)+a_2^2(1-m^2)+a_3^2(1-n^2)=C \qquad (Q), \\ A_1^2\left(1-\dfrac{1}{l^2}\right)+A_2^2\left(1-\dfrac{1}{m^2}\right)+A_3^2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=-C \qquad (Q'), \\ A_1=la_1, \qquad A_2=ma_2, \qquad A_3=na_3. \end{cases}$$

$(a)$ est tracée arbitrairement sur $Q$; $(A)$ s'en déduit par l'affinité d'Ivory sur $Q'$; la courbe $(b)$ est tracée arbitrairement sur $Q'$ et $(B)$ s'en déduit par les équations

$$(9)\qquad B_1=\frac{b_1}{l}, \qquad B_2=\frac{b_2}{m}, \qquad B_3=\frac{b_3}{n}.$$

Sans restreindre le couple $(S, S')$ on peut supposer que $(\bar a)$ est sur la même quadrique $Q$ que $(a)$, et $(\bar A)$ sur $Q'$; la courbe $(\bar a)$ est *parallèle* à la courbe $(a)$ et il suffit de résoudre le système

$$(10)\quad \begin{cases} \bar a_1^2(1-l^2)+\bar a_2^2(1-m^2)+\bar a_3^2(1-n^2)=C, \\ a_1\bar a_1(1-l^2)+a_2\bar a_2(1-m^2)+a_3\bar a_3(1-n^2)=C', \\ \bar a_1(1-l^2)\,da_1+\bar a_2(1-m^2)\,da_2+\bar a_3(1-n^2)\,da_3=0. \end{cases}$$

5. — Il se présente ici une difficulté sérieuse pour la recherche d'une *base* de déformation, doublement conique, *principale*, et non pas *simple*: déformation *continue* à un paramètre, et non plus simplement un couple de deux surfaces applicables. Si le mécanisme $(a, b)$ est simplement *transformable* en le mécanisme $(A, B)$, il est clair que le système $(a, b; \bar a, \bar b)$ et

le système $(A, B; \bar{A}, \bar{B})$ fournissent simplement un couple; le type VIII donne donc simplement des couples isolés.

Soit donc un mécanisme du type VII, $(a, b)$, déformable à trois paramètres en $(A, B)$; le mécanisme $(\bar{a}, \bar{b})$ dépend, *en général*, des paramètres $C, h, m$. Pour obtenir $\infty^1$ déformées de $S$, remarquons que le système (5), (6) donne $A_2, \bar{A}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ en fonction de $a_1, a_2$ et $\frac{da_2}{da_1}$ (en prenant comme paramètre $\alpha_1$ la fonction $a_1$); on désire que $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ soient *fixes*, mais que $A_2, \bar{A}_2$ dépendent d'*un* paramètre (on sait que ce paramètre est unique) de déformation $t$; $C, h, m, \bar{C}, C', \bar{m}$ seront donc des fonctions de $t$, mais $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ seront indépendants de $t$. Si donc on élimine $A_2, \bar{A}_2$ d'entre les 4 équations (5), (6), on trouve deux équations rationnelles et algébriques

$$(11) \quad f\left(a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, a_2, C, h, m, \bar{C}, C', \bar{m}\right) = 0, \quad \varphi(a_1, a_2, \ldots) = 0$$

dont le premier membre peut être écrit

$$(12) \qquad \sum_1^n T_i U_i = 0$$

chaque $T_i$ dépendant de $C, h, m, \bar{C}, C' \bar{m}$, donc de $t$ seul, chaque $U_i$ de $a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$, donc de $a_1$ seul. Or une équation telle que (12) entraîne un certain nombre $p$ de relations linéaires entre les $U_i$ et $n - p$ relations linéaires concomitantes entre les $T_i$; ces relations remplacent complètement le système (11). Or chaque équation (11) fournit au moins 2 relations entre les $U_i$, de sorte que l'on obtient au moins 4 relations

$$(13) \quad F_1\left[a_1, a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2\right] = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0.$$

Ces relations peuvent être résolues en $a_2, \frac{da_2}{da_1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ considérées comme variables provisoirement indépendantes; la condition de compatibilité est que $\frac{da_1}{da_2}$ coïncide effectivement avec la dérivée de $a_2$ par rapport à $a_1$; mais s'il y a des solutions, il résulte du procédé même que l'on a employé que les *surfaces obtenues sont algébriques et que leur déformation elle-même est algébrique.* La discussion complète par ce procédé est assez pénible: en tous cas elle s'achève aisément en prenant le cas de simplification $h = 1$, $m = 0$, qui donne deux types de surfaces unicursales que je vais indiquer explicitement en vertu de leurs propriétés géométriques curieuses. Il est probable que Peterson qui a donné, pour ce cas précis de réseau conique-conique, de nombreux exemples de couples avait su ramener la question à la recherche des mécanismes doubles, mais qu'il avait été arrêté par la détermination des mécanismes doubles *déformables.*

6. — Le premier exemple est

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $a_1,$ | $a_2^2 = 2a_1,$ | $0$ |
| $(b)$ | $b_1,$ | $0,$ | $b_3^2 = 1 - 2b_1$ |
| $(A)$ | $a_1,$ | $A_2^2 = 2a_1 - C,$ | $0$ |
| $(B)$ | $b_1,$ | $0,$ | $B_3^2 = 1 - 2b_1 + C$ |
| $(\bar{a})$ | $\bar{a}_1 = \frac{3a_1^2}{2},$ | $\bar{a}_2 = a_1 a_2,$ | $0$ |
| $(\bar{b})$ | $\bar{b}_1 = \frac{1}{2} - 2b_1 + \frac{3}{2}b_1^2,$ | $0,$ | $\bar{b}_3 = b_3(b_1 - 1)$ |
| $(\bar{A})$ | $\bar{a}_1$ | $\bar{A}_2 = A_2(a_1 + C),$ | $0$ |
| $(\bar{B})$ | $\bar{b}_1 + C,$ | $0,$ | $\bar{B}_3 = B_3(b_1 + C - 1)$ |

$\alpha = 3a_1$, $\beta = 3b_1 - 2$; $C$ est le paramètre de déformation.

*Les courbes $(a), (b)$ sont deux paraboles focales; $(A), (B)$ se déduit de ce couple par une translation parallèle à $Ox$ égale à $\frac{C}{2}$; $C$ est le paramètre de déformation. La surface $S$ subit simplement une auto-application continue (avec glissement le long de $Ox$); la surface $\Sigma$ ne jouit pas de cette propriété.*

7. — Le second exemple est obtenu pour *un couple $(a), (b)$ formé de deux coniques focales, ellipse-hyperbole (cercle et axe exclus); $(\bar{a}), (\bar{b})$ sont deux paraboles focales de grandeur arbitraire dont les plans coïncident avec ceux de $(a)$ et $(b)$; le parallélisme des tangentes suffit à établir la correspondance entre $(a)$ et $(\bar{a})$, ou $(b)$ et $(\bar{b})$. Le couple $(A, B)$ se déduit de $(a, b)$ par une homothétie de rapport $D$, où $D$ est la paramètre de déformation, et $(\bar{A}, \bar{B})$ se déduit de $(\bar{a}, \bar{b})$ par une homothétie de rapport $\frac{1}{D^2}$; la surface $S_D$ est homothétique à $S_1$ dans le rapport $D$, la surface $\Sigma_D$ à $\Sigma_1$ dans le rapport $\frac{1}{D^2}$.*

8. — Pour obtenir toutes les surfaces à base principale doublement conique, il y a avantage à se servir, *en même temps que des mécanismes doubles*, de la méthode imaginée par MM. Cosserat, Demoulin, Tzitzéica, Egoroff et Bianchi pour les déformations à un paramètre; la surface doit être l'enveloppe du plan

$$x\theta_1(u, v) + y\theta_2(u, v) + z\theta_3(u, v) + \theta_4(u, v) = 0 \qquad (14)$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sont quatre solutions d'une même équation de Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \theta M(u,v) \tag{15}$$

liées par la relation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = U(u) + V(v). \tag{16}$$

Le résultat important, trouvé directement par l'étude des mécanismes doubles de M. Vasseur, que les cônes circonscrits ont leurs sommets répartis sur deux courbes *planes*, prouve que l'équation (15) est de rang *deux*. (MM. Egoroff et Masloff ont donné de ce résultat une démonstration inexacte et M. Vasseur a mis en évidence la faute de raisonnement.) L'équation (15) est donc ici réductible à la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{-2\theta}{(u-v)^2} \tag{17}$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta = 2\frac{U-V}{u-v} - (U'+V'). \tag{18}$$

Pour que les lignes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ soient toutes coniques, il est nécessaire et suffisant de prendre

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = p_2(u), & u_2 = \sqrt{-p_4(u)}, & u_3 = 0, & u_4 = \pi_2(u); \\ v_1 = 0, & v_2 = 0, & v_3 = -\sqrt{-q_4(v)}, & v_4 = 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

ou $p_2, p_4, q_4$ sont des polynômes de degré égal (ou inférieur) à leur indice, liés par l'identité

$$p_2^2 = p_4 + q_4. \tag{20}$$

Comme l'intégrale $\theta$ donnée par (18) ne change pas si on augmente $U$ d'un polynôme arbitraire de degré 2 en $u$, et $V$ du *même* polynôme (en $v$), on voit que le tableau (19) peut être remplacé par le tableau (19′)

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = 0, & u_2 = \sqrt{-p_4(u)}, & u_3 = 0, & u_4 = 0; \\ v_1 = -p_2(v), & v_2 = 0, & v_3 = -\sqrt{-q_4(v)}, & v_4 = -\pi_2(v). \end{array}\right. \tag{19′}$$

Comme un changement de signe général des $u_i$ et $v_i$ est indifférent, on a ainsi manifesté la réciprocité parfaite des lignes $u$, $v$ sur la surface. La courbe $(a)$ est, dans le plan $z = 0$, l'enveloppe de la droite

$$x\,p_2(u) + y\sqrt{-p_4(u)} + \pi_2(u) = 0 \tag{20}$$

et la courbe $(b)$, dans le plan $y = 0$, l'enveloppe de la droite

$$x\,p_2(v) + z\sqrt{-q_4(v)} + \pi_2(v) = 0. \tag{21}$$

Il existe seulement 3 polynômes de degré 2, linéairement indépendants; remplacer $\pi_2(u)$ par $\lambda\pi_2(u)$, où $\lambda$ est une constante, revient à remplacer la

surface $S$ par la surface homothétique $\lambda S$; remplacer $\pi_2(u)$ par $\pi_2(u)+\lambda p_2$ revient à faire glisser la surface de $\lambda$ le long de $Ox$; quand on remplace $\pi_2$ par un autre polynôme $\bar{\pi}_2$, on trouve un autre mécanisme $(\bar{a}, \bar{b})$ formant avec $(a, b)$ le mécanisme double que nous avons étudié et donnant la surface $\Sigma$. Il n'y a plus qu'à indiquer les polynômes $P_2, P_4, Q_4, \Pi_2, \bar{\Pi}_2$ correspondant aux déformées (continues) $S', \Sigma'$ ou $\lambda S'+\mu\Sigma'$, de $S, \Sigma, \lambda S+\mu\Sigma$. C'est ici que l'alliance des deux méthodes est précieuse pour éviter de longs calculs. Si on pose

$$(22)\qquad \begin{cases} q_4(u) \equiv d_0 u^4 + 4 d_1 u^3 + 6 d_2 u^2 + 4 d_3 u + d_4, \\ p_2(u) \equiv e_0 u^2 + 2 e_1 u + e_2 \end{cases}$$

on a

$$(23)\quad \theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2 = p_2'^2(u) - \frac{p_4'^2(u)}{4 p_4(u)} - \frac{q_4'^2(v)}{4 q_4(v)} - 4 d_0(u^2-v^2) - 8 d_1(u-v)$$

de sorte que l'on peut prendre

$$(24)\qquad \begin{cases} U = p_2'^2(u) - \dfrac{p_4'^2(u)}{4 p_4(u)} - 4 d_0 u^2 - 8 d_1 u = \dfrac{m_4(u)}{p_4(u)}, \\ V = \dfrac{-q_4'^2(v)}{4 q_4(v)} + 4 d_0 v^2 + 8 d_1 v = \dfrac{n_4(v)}{q_4(v)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que $m_4$ et $n_4$ sont des polynômes de degré 4 (ou inférieur); la fraction $\frac{m_4}{p_4}$ n'est réductible que si $p_4$ a une racine double, triple ou quadruple: *nous ne la réduirons pas*; de même pour $\frac{n_4}{q_4}$. Au cours de la déformation, les fonctions $U$ et $V$ sont remplacées par $\frac{l'U}{1+lU}+l''$, $\frac{l'V}{2-lV}-l''$, où $l$ est le paramètre de déformation, et où $l', l''$ sont deux constantes *arbitraires* dont le rôle s'élimine automatiquement; il suit de là que nous pouvons prendre

$$(25)\qquad P_4 \equiv \lambda(p_4 + l m_4), \qquad Q_4 \equiv \mu(q_4 - l n_4).$$

$\lambda$, $\mu$ étant deux coefficients constants dont le rapport seul est déterminé en fonction de $l$, par la condition que $P_4+Q_4$ soit un carré $P_2^2$; dans le cas *général*, en exprimant que $\lambda(p_4+lm_4)+\mu(q_4-ln_4)$ est carré parfait, on obtient deux équations rationnelles en $\lambda:\mu$ et $l$, qui n'ont en $\lambda:\mu$ qu'une racine, rationnelle, commune, tendant vers 1 si $l$ tend vers zéro; le calcul de $\lambda:\mu$ peut d'ailleurs être évité. Remarquons d'autre part que l'on a, d'après (20) et (21)

$$(26)\qquad a_1 = \frac{2 p_4 \pi_2' - \pi_2 p_4'}{p_2 p_4' - 2 p_4 p_2'}, \qquad a_2 = \sqrt{-p_4}\,\frac{p_2'\pi_2 - p_2\pi_2'}{p_2 p_4' - 2 p_4 p_2'};$$

$$(27)\qquad b_1 = \frac{2 q_4 \pi_2 - \pi_2 q_4'}{p_2 q_4' - 2 q_4 p_2'}, \qquad b_3 = \sqrt{-q_4}\,\frac{p_2'\pi_2 - p_2\pi_2'}{p_2 q_4' - 2 q_4 p_2'}.$$

$a_1$ et $b_1$ sont le quotient de deux polynômes de degré 4 et de plus $p_2' \pi_2 - p_2 \pi_2'$ est de degré 2. D'autre part on a

$$(28) \quad \begin{cases} A_1 = h a_1, & A_3^2 = a_1^2 (1 - h^2) + a_3^2 + 2 m h a_1 - C; \\ B_1 = \frac{b_1}{h} + m, & B_3^2 = b_1^2 \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) + b_3^2 - 2 m \frac{b_1}{h} + C - m^2. \end{cases}$$

Il en résulte que $A_1, B_1, A_3, B_3$ pouvant s'exprimer par les formules analogues à (26) et (27), avec $P_3, P_4, Q_4, \Pi_3$, que le polynôme, de degré 8,

$$(1 - h^2)(2 p_4 \pi_2' - \pi_2 p_4')^2 - p_4 (p_2' \pi_2 - p_2 \pi_2')^2$$
$$+ 2 m h (2 p_4 \pi_2' - \pi_2 p_4')(p_2 p_4' - 2 p_4 p_2') - C (p_2 p_4' - 2 p_4 p_2')^2$$

doit être divisible par $P_4$, ou $(p_4 + l m_4)$, [ou du moins par les facteurs impairs de $p_4 + l m_4$, quand il existe un facteur multiple]; le quotient doit être carré parfait; dans le cas général, cela fait pour les inconnues $C, h, m$ un total de $4 + 2$ ou 6 équations, compatibles, qui les déterminent; (dans certains cas particuliers, il faudra avoir recours aux conditions analogues pour $B_3$); mais alors $A_1, A_3, B_1, B_3$ sont connus; le signe des radicaux pour $A_3$ et $B_3$ se détermine de sorte que pour $l = 0$, $A_3$ se réduise à $a_1$ et $B_3$ à $b_3$. On a d'autre part $U_1 A_1' + U_3 A_3' = 0$ de sorte que la proportionnalité de $U_1$ et $U_3$ à $A_3'$ et $-A_1'$ permet (à un facteur près numérique) d'avoir $U_1 = P_3$ et $U_3 = \sqrt{-P_4}$, où $P_3$ et $P_4$ sont des polynômes de degré 2 et 4; le nombre $\lambda$ est donc connu, $[P_4 \equiv \lambda (p_4 + l m_4)]$; on a de même $Q_4$ et le nombre $\mu$. La surface $S$ et sa déformée $S'$ sont donc obtenues, puisque nous avons les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ correspondantes, le polynôme $\Pi_3$ étant égal à $-(U_1 A_1 + U_3 A_3)$; mais il est commode au lieu de calculer $x, y, z$ par les différentiations, de revenir aux formules (1) et (2); il n'y a donc qu'à choisir un polynôme $\bar{\pi}_3$ arbitraire (non proportionnel à $p_3$, ni $\pi_3$) et de définir la surface $\Sigma$ correspondant à $p_3, p_4, q_4$ et $\bar{\pi}_3$; elle donne $(\bar{a})$, $(\bar{b})$ et la méthode déjà suivie donne de la même façon $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ et les constantes $\bar{C}, \bar{m}$, (car $h$ est déjà connu; on a alors $\alpha = \frac{d \bar{A}_1}{d A_1} = \frac{d \bar{a}_1}{d a_1}$ et $\beta = \frac{d b_1}{d b_1}$: on peut écrire les formules (1), (2). La méthode est très souple, en raison même des nombreuses équations surabondantes et compatibles qu'elle fait intervenir, de sorte qu'elle ne se trouve pas arrêtée, même dans les cas particuliers. On peut maintenant se proposer de classer les surfaces: pour cela on peut d'abord remarquer que la variation de $\pi_3$ ne fait que remplacer (à une translation près le long de $Ox$) $S$ par une surface $\lambda S + \mu \Sigma$, de sorte qu'en rangeant dans une même famille les surfaces parallèles à $S$ (surfaces renfermant un paramètre de forme $\lambda : \mu$ et un paramètre de grandeur $\lambda$) il suffit de tenir compte de la variation de $p_3$ et $q_4$; quand on effectue sur $u, v$ la même

substitution $\left(u; \frac{au+b}{cu+d}\right)$, $p_2(u)$ se trouve remplacé par $(cu+d)^2 p_2\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)$ et $q_4(v)$ par $(cv+d)^4 q_4\left(\frac{av+b}{cv+d}\right)$ de sorte qu'il y a finalement $\infty^4$ familles de l'espèce indiquée, $\infty^6$ surfaces au total. On peut rendre $p_2$ égal à $1$, $u$, $u^2+1$ suivant qu'il a une racine double, deux racines distinctes, réelles ou imaginaires, et profiter des paramètres restants de l'homographie pour simplifier encore $q_4$ ou $p_4$.

9. Pour le premier exemple donné précédemment, on peut prendre $u = a_1$, $v = b_1 - 1$, et l'on a, en ne donnant les valeurs que pour $C$ quelconque ($S$ s'obtenant pour $C = 0$), les coordonnées

$$(29)\quad \begin{cases} (A)\ [u, \sqrt{2u-C}, 0]; & (B)\ [v+1, 0, \sqrt{C-1-2v}], \\ (\bar{A})\ \left[\frac{3u^2}{2}, \sqrt{2u-C}(u-C), 0\right]; & (\bar{B})\ \left[C+v+\frac{3v^2}{2}, 0, \sqrt{C-1-2v}(v+\right. \end{cases}$$

Les coordonnées tangentielles de la parabole $(A)$ font prendre $U_1, U_2, U_4$ proportionnelles à $1$, $-\sqrt{2u-C}$, $u-C$ et comme, en se servant de $(\bar{A})$, l'expression $A_1 - \sqrt{2u-C}\, A_2$ est un polynôme de degré 2, on prend

$$(30)\quad \begin{cases} u_1 = 1, & u_2 = -\sqrt{2u-C}, & u_3 = 0, & u_4 = u-C, \\ v_1 = 0, & v_2 = 0, & v_3 = \sqrt{C-1-2v}, & v_4 = 0, \end{cases}$$

$$(31)\quad x = \frac{\frac{3u^2}{2} - \left(\frac{3v^2}{2}+3v+1-C\right)}{3u-3v-1}, \qquad y = \frac{(2u-C)^{\frac{3}{2}}}{3u-3v-1}, \qquad z = \frac{(C-1-2v)^{\frac{3}{2}}}{3u-3v-1}.$$

On peut remarquer que prendre $u_4 = u$ au lieu de $u - C$ revient à une translation de $S_C$ le long de $Ox$; or les expressions $(1, -\sqrt{2u-C}, \sqrt{C-1-2v}, u)$ deviennent, si l'on pose $u = \frac{C}{2} + u'$, $v = \frac{C}{2} + v'$, $\left(1, -\sqrt{2u'}, \sqrt{-1-2v'}, u' + \frac{C}{2}\right)$ de sorte que la surface $S_C$ ne diffère de $S_0$ que par une translation le long de $Ox$, les points $(u, v)$ de $S_0$ et $\left(\frac{C}{2}+u, \frac{C}{2}+v\right)$ de $S_C$ se correspondant dans cette translation; la déformation en jeu de $S$ revient donc simplement à une auto-application. On voit de plus qu'en prenant

$$(32)\quad \begin{cases} u_1 = u+k, & u_2 = -(u+k)\sqrt{2u}, \\ v_3 = (u+k)\sqrt{-1-2v}, & u_4 = u(u+k), \end{cases}$$

où $k$ est une constante quelconque nous définissons une nouvelle surface $S$ admettant encore $(a)$, $(b)$ pour lieu des sommets des cônes circonscrits: mais alors $(A)$, $(B)$ est un couple de coniques focales à centre, d'excentricité variable au cours de la déformation.

10. — Pour le second exemple, $\omega$ étant une constante numérique, on obtient les formules, où $D$ est le paramètre variable de déformation,

$$\begin{cases} (A) & A_1 = u\,Ch^2\omega, & A_2 = \sqrt{D^2 - u^2\,Ch^2\omega}, & A_3 = 0, \\ (B) & B_1 = v\,Sh^2\omega, & B_2 = 0, & B_3 = \sqrt{v^2\,Sh^2\omega - D^2}, \\ (\bar{A}_1) & \bar{A}_1 = \dfrac{u^2\,Ch^2\omega - 1}{2u^2}, & \bar{A}_2 = \dfrac{A_2}{u\,D^2}, & \bar{A}_3 = 0, \\ (\bar{B}_1) & \bar{B}_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{D^2} + \dfrac{v^2\,Sh^2\omega - 1}{2v^2}, & \bar{B}_2 = 0, & \bar{B}_3 = \dfrac{-B_3}{v\,D^2}. \end{cases}$$

Les équations tangentielles des coniques à centre $(A)$, $(B)$ prouvent que l'on doit prendre $U_1, U_2, U_4$ proportionnelles à $u$, $\sqrt{D^2 - u^2\,Ch^2\omega}$, $-D^2$; or l'expression $A_1 u + A_2\sqrt{D^2 - u^2\,Ch^2\omega}$ est égale $-D^2$, tandis que $\bar{A}_1 u + \bar{A}_2\sqrt{D^2 - u^2\,Ch^2\omega}$ est égale à $u\,Ch^2\omega\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D^2}\right) + \frac{1}{2u}$, de sorte que pour obtenir pour $U_4$ et $\overline{U}_4$ des polynômes de degré 2, on doit prendre

$$(34) \qquad \begin{cases} U_1 = u^2, & U_2 = u\sqrt{D^2 - u^2\,Ch^2\omega}, \\ U_4 = -u\,D^2, & \overline{U}_4 = u^2\,Ch^2\omega\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D^2}\right) + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs réduire, par translation $\overline{U}_4$ à $\frac{1}{2}$ et ces formules (34) prouvent aussitôt que, sur $S_1$ et $S_D$, les nappes $(u_0, v_0)$ de $S_1$ et $(Du_0, Dv_0)$ de $S_D$ sont homothétiques, le rapport $\frac{S_D}{S_1}$ étant égal à $D$. De même sur $\Sigma_1, \Sigma_D$ les nappes $(u_0, v_0)$ de $\Sigma_1$ et $(Du_0, Dv_0)$ de $\Sigma_D$ sont homothétiques, le rapport $\frac{\Sigma_D}{\Sigma_1}$ étant égal à $\frac{1}{D^2}$.

On voit aisément que prendre

$$(35) \quad U_1 = u(ku+1), \quad U_2 = (ku+1)\sqrt{1 - u^2\,Ch^2\omega}, \quad U_4 = -(ku+1)$$

ne donne que les surfaces déjà obtenues par (32); on a ainsi établi un lien entre les deux exemples.

11. — Les surfaces réelles à réseau conjugué doublement conique, dans le cas de déformation continue, donnent des réseaux *réels*, car deux plans imaginaires conjugués ne peuvent être perpendiculaires. Dans le cas de couples isolés, on peut au contraire obtenir des surfaces réelles et un réseau formé de courbes imaginaires conjuguées.

Nous reviendrons plus loin sur la comparaison de notre méthode et celle de Mlodziejowski.

## § 4.

## Base cylindrique-conique.

1. — La surface

$$(S) \qquad X = Ab_1 - \int a_1\,dA, \quad Y = Ab_2 - \int a_2\,dA, \quad Z = Ab_3 - \int a_3\,dA$$

où $b_1, b_2, b_3$ sont fonctions d'un paramètre $\beta$ et $a_1, a_2, a_3$, $A$ d'un paramètre $\alpha$, admet les lignes $\beta =$ constante comme lignes *cylindriques*, le plan tangent étant, le long de cette ligne, parallèle à la droite $(b_1', b_2', b_3')$ et les lignes $\alpha =$ constante comme lignes *coniques*, le sommet du cône circonscrit suivant la ligne $\alpha =$ constante étant le point $\int A\,da_1$, $\int A\,da_2$, $\int A\,da_3$. Le $ds^2$ de cette surface est

$$ds^2 = A^2(db_1^2 + db_2^2 + db_3^2) + 2A\,dA[(b_1 - a_1)\,db_1 + (b_2 - a_2)\,db_2 + (b_3 - a_3)\,db_3] + [(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2]\,dA^2.$$

Le réseau $\alpha, \beta$ est conjugué. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $S$ soit applicable sur la surface $S'$ de même définition

$$(S') \quad X' = AB_1 - \int A_1\,dA, \quad Y' = AB_2 - \int A_2\,dA, \quad Z' = AB_3 - \int A_3\,dA$$

se réduisent à

$$(2) \quad \begin{cases} (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = (B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 + (B_3 - A_3)^2, \\ db_1^2 + db_2^2 + db_3^2 = dB_1^2 + dB_2^2 + dB_3^2. \end{cases}$$

La première condition exprime que $[(a), (b)]$ forme un mécanisme transformable en le mécanisme $[(A), (B)]$, et la seconde exprime de plus que les arcs des courbes $(b)$ et $(B)$ sont égaux. Ces résultats ont été indiqués par Peterson et Darboux; ce dernier s'est borné à indiquer le cas de déformation continue, déjà trouvé par Peterson: les cônes ont leurs sommets répartis sur une droite à distance finie ($Oz$ par exemple), tandis que les cylindres ont leurs génératrices perpendiculaires à $Oz$: le réseau est donc doublement conjugué au sens de M. G. Kœnigs.

En 1922, dans le Mémoire déjà cité, j'ai déterminé les mécanismes *transformables* qui satisfont à la seconde égalité (2). M. Liebmann, au contraire, a pris en bloc les deux équations (2), sans connaître mes résultats.

2. — Je résume ce que j'ai trouvé:

Si le mécanisme $(a)$, $(b)$ subit un déplacement d'ensemble, ou une symétrie, il en est de même de la surface $S$; cette simple remarque permet immédiatement d'écarter le cas de surfaces $S$ et $S'$ égales ou symétriques[1]).

---

[1]) M. Liebmann a remplacé cette remarque par une autre, de portée plus générale et très élégante. Si deux surfaces $S$, $S_1$ sont égales ou symétriques, on a $E = E_1$, $F = F_1$, $G = G_1$; $D^2 = D_1^2$; $D'^2 = D_1'^2$; $D''^2 = D_1''^2$, les notations étant celles de Gauss; les trois dernières se réduisent à 2; elles sont équivalentes à

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 = S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2, \qquad S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2 = S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}\right)^2, \qquad S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2 = S\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\right)^2.$$

C'est la remarque de M. Liebmann.

On voit aussitôt que ni $(a)$ ni $(b)$ ne doivent se réduire à un point, que $(b)$ ne doit pas être une droite. Seuls les mécanismes III, IV, V sont à retenir. (Le cas échéant, il peut être nécessaire d'échanger les noms des courbes $(a)$ et $(b)$.)

3. — Le mécanisme III fournit les surfaces de Peterson-Darboux, à réseau nécessairement réel,

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{cccc|cccc} (a) & 0 & 0 & a_3 & (A) & 0 & 0 & A_3 \\ (b) & b_1 & b_2 & 0 & (B) & B_1 & B_2 & 0 \end{array}\right|,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (S) & X = A b_1, & Y = A b_2, & Z = \int a_3\, dA, \\ (S') & X' = A B_1, & Y' = A B_2, & Z' = \int A_3\, dA, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(5)\qquad \begin{cases} B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C, \\ B_1'^2 + B_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2, \\ A_3^2 = a_3^2 + C, \end{cases}$$

où $C$ est un paramètre continu de déformation. J'ai indiqué des exemples particuliers de surfaces toutes algébriques obtenues dans ce cas comme application de la méthode classique de résolution de l'équation de degré 3. J'ai indiqué des résultats curieux sur les régions de $S$ et $S'$ qui se correspondent point réel pour point réel: j'ai indiqué le moyen d'obtenir une surface $S$ partagée en $2n$ régions alternativement recouvertes ou non par l'une, déterminée, des surfaces $S'$ correspondantes, $n$ étant un entier arbitraire.

4. — Le type IV fournit simplement des *couples*: $h$ et $C$ sont deux constantes fixes et l'on a une première solution

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{cccc|cccc} (a) & 0 & a_2 & a_3 & (A) & 0 & 0 & h a_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 & (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}\right|.$$

On a les relations

$$(7)\qquad a_2^2 + a_3^2 (1 - h^2) = C,$$

$$(8)\qquad b_3 = h B_3,$$

$$(9)\qquad \begin{cases} b_1^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 (1 - h^2) - C, \\ b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2 (1 - h^2). \end{cases}$$

*La courbe $(a)$ est une conique, la courbe $(b)$ est une courbe plane située dans un plan principal de $(a)$; la courbe $A$ est l'axe des $z$.*

On a aussi

$$(S)\quad X = A b_1, \qquad Y = -\int a_2\, dA, \qquad Z = A b_3 - \int a_3\, dA,$$

$$(S')\quad X' = A B_1, \qquad Y' = A B_2, \qquad Z' = A B_3 - h \int a_3\, dA.$$

Ce cas a été, bien entendu, obtenu par M. Liebmann p. 182 de son mémoire. — J'ai indiqué une construction géométrique élégante pour résoudre le système (9): la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ est l'arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable $D$ circonscrite à la quadrique de révolution $Q$

$$Q: \quad x^2 + y^2 + z^2(1 - h^2) - C = 0.$$

On peut profiter de cette remarque pour avoir des couples $S, S'$ algébriques; ou bien encore déterminer des couples $S, S'$ partagés en $2n$ secteurs se correspondant alternativement point réel pour point réel ou point imaginaire pour point réel.

La seconde solution correspond au tableau

$$(10) \qquad \begin{cases} (a) \quad 0 \quad a_2 \quad a_3, & (A) \quad 0 \quad 0 \quad a_3 + \frac{m}{2}, \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3, & (B) \quad B_1 \quad B_2 \quad b_3 - \frac{m}{2} \end{cases}$$

avec les relations

$$(11) \qquad \begin{cases} a_2^2 - 2m a_3 = B_1^2 + B_2^2 - 2m b_3 + m^2 - b_1^2 = 0, \\ b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2. \end{cases}$$

On construit la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ comme arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable circonscrite au paraboloïde $x^2 + y^2 - 2mz = 0$; on fait les mêmes remarques que plus haut pour les couples algébriques ou les couples ne se recouvrant que partiellement. Pour les surfaces réelles, les réseaux trouvés sont toujours réels.

5. — Le type V donne aussi des couples. Si je prends le premier cas, où $(a)$, $(A)$ sont coniques homofocales à centre, et $(b)$, $(B)$ des courbes gauches, on a

$$(12) \qquad \begin{cases} (a) \quad a_1, \quad a_2, \quad 0, & (A) \quad \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1, \quad \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2, \quad 0, \\ (b) \quad b_1, \quad b_2, \quad b_3, & (B) \quad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}} b_1, \quad \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}} b_2, \quad B_3, \\ \frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{a_2^2}{\beta^2} - 1 = 0, & \frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} - 1 = 0, \\ B_3^2 = C + b_3^2 - \frac{b_1^2 C}{\alpha^2 - C} - \frac{b_2^2 C}{\beta^2 - C}, \\ B_3'^2 = b_3'^2 - \frac{b_1'^2 C}{\alpha^2 - C} - \frac{b_2'^2 C}{\beta^2 - C} \end{cases}$$

la courbe $b_1, b_2, b_3$ est l'arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable $D$ circonscrite à la quadrique $Q$

$$z^2 - \frac{C x^2}{\alpha^2 - C} - \frac{C y^2}{\beta^2 - C} + C = 0.$$

On a

$$S) \qquad X = A b_1 - \int a_1 \, dA, \qquad Y = A b_2 - \int a_2 \, dA, \qquad Z = A b_3,$$

$$S_1) \qquad X_1 = \frac{A \alpha b_1}{\sqrt{\alpha^2 - C}} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} \int a_1 \, dA, \quad Y_1 = \frac{A \beta b_2}{\sqrt{\beta^2 - C}} - \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} \int a_2 \, dA, \quad Z_1 = A B_3.$$

Dans le cas où $(a)$, $(A)$ sont des paraboles on peut prendre le tableau

$$(13) \qquad \begin{cases} (a) \quad a_1, \quad a_2, \quad 0, \qquad (A) \quad a_1, \qquad a_2 \sqrt{\dfrac{p-m}{p}}, \quad 0, \\ (b) \quad b_1, \quad b_2, \quad b_3, \qquad (B) \quad b_1 - m, \quad b_2 \sqrt{\dfrac{p}{p-m}}, \quad B_3, \\ a_2^2 - 2 p a_1 = 0, \quad \dfrac{m b_2^2}{p-m} + B_3^2 - b_3^2 - 2 m b_1 + m^2 = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{m b_2'^2}{p-m} + B_3'^2 - b_3'^2 \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

On construit la courbe $(b_1, b_2, b_3)$ comme arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$\frac{m y^2}{p-m} - z^2 - 2 m x + m^2 = 0.$$

On fait toujours les mêmes remarques pour les couples algébriques ou les couples se recouvrant partiellement. Sur les surfaces réelles, les réseaux trouvés sont nécessairement réels.

Ce type a été signalé par M. Liebmann page 180—181 de son mémoire, sans remarquer que si les courbes $(a)$ et $(A)$ sont des coniques à centre, l'une est égale à une conique homofocale à l'autre. On a ainsi constaté que mon mémoire de 1922 et celui de M. Liebmann retrouvent les mêmes résultats et c'est une vérification que les résultats sont à la fois exacts et complets.

## § 5.

## Base doublement cylindrique.

Les résultats relatifs à ce cas sont connus depuis longtemps. On trouve deux cas de déformation continue:

1° Surfaces minima associées,

2° Surfaces de translation à profils de translation plans dans deux plans rectangulaires (Peterson et Bianchi).

*On trouve ensuite un unique cas donnant des couples, et se rattachant encore aux mécanismes: la surface S est engendrée par la translation de deux courbes $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$: l'indicatrice des courbures de $(\mathcal{A})$ est une conique sphérique $(a)$, celle de $(\mathcal{B})$ une conique sphérique $(b)$ homofocale à $(a)$ et de la même famille;*

*la surface $S_1$ est engendrée de même par la translation de deux courbes $(\mathcal{A}_1)$ et $(\mathcal{B}_1)$ telles que l'indicatrice $(A)$ de $(\mathcal{A}_1)$ coïncide avec $(b)$, et celle $(B)$ de $(\mathcal{B}_1)$ avec $(a)$; le point $a$ de $(a)$ étant donné, on obtient le point homologue $A$ de $(A)$ en coupant $(A)$ ou $(b)$ par la conique homofocale à $(a)$, $(b)$, de la famille complémentaire, issue de $a$. On a $ab = AB$ les distances étant comptées soit suivant les cordes, soit suivant les arcs de grand cercle. Le couple $(a)$, $(b)$ forme un mécanisme transformable en $(A)$, $(B)$, qui rentre dans le type* VIII: *il suffit en effet de réduire les quadriques $Q$ et $Q_1$ à deux cônes homofocaux et de couper $Q$ et $Q_1$ par une même sphère. Une des coniques peut dégénérer en grand cercle; si les deux coniques deviennent deux grands cercles orthogonaux, on obtient la déformation continue déjà signalée.*

Peterson a signalé le premier ce cas de couples applicables. J'ai étudié en détail ces surfaces aux Nouvelles Annales de Mathématiques, 4° Série, t. XX, 1920. Pour les couples, les réseaux trouvés peuvent être réels ou imaginaires conjugués.

## § 6.

## Méthode de Mlodziejowski.

Mlodziejowski remarque qu'en écrivant

$$x = \frac{u_1 - v_1}{u_5 - v_5}, \qquad y = \frac{u_2 - v_2}{u_5 - v_5}, \qquad z = \frac{u_3 - v_3}{u_5 - v_5} \tag{1}$$

puis

$$X = \frac{U_1 - V_1}{u_5 - v_5}, \qquad Y = \frac{U_2 - V_2}{u_5 - v_5}, \qquad Z = \frac{U_3 - V_3}{u_5 - v_5} \tag{2}$$

où les $u_i$, $U_i$ dépendent d'un paramètre $u$, et les $v_i$, $V_i$ d'un paramètre $v$, on a des surfaces rapportées à un réseau conjugué formé de lignes coniques ou cylindriques; les plans tangents à la seconde surface, par exemple, le long de la courbe $u = \text{const.}$ passent par le point $\left(\frac{dU_1}{du}, \frac{dU_2}{du}, \frac{dU_3}{du}, \frac{du_5}{du}\right)$ de sorte que la ligne est conique ou cylindrique suivant que $u_5$ est variable ou constant. Les conditions d'applicabilité peuvent s'écrire dans tous les cas en introduisant deux nouvelles fonctions $U_5$ de $u$, $V_5$ de $v$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_1^3 (u_i - v_i)^2 - \sum_1^3 (U_i - V_i)^2 = (u_5 - v_5)(U_5 - V_5),\\
&\sum_1^3 \left(\frac{du_i}{du}\right)^2 - \sum_1^3 \left(\frac{dU_i}{du}\right)^2 = \frac{du_5}{dU}\,\frac{dU_5}{du},\\
&\sum_1^3 \left(\frac{dv_i}{dv}\right)^2 - \sum_1^3 \left(\frac{dV_i}{dv}\right)^2 = \frac{dv_5}{dv}\,\frac{dV_5}{dv}.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} u_4 = \dfrac{u_5 - U_5}{2}, \quad v_4 = \dfrac{v_5 - V_5}{2}, \\ U_4 = \dfrac{u_5 + U_5}{2}, \quad V_4 = \dfrac{v_5 + V_5}{2} \end{cases}$$

les équations (3) s'écrivent sous la forme très symétrique

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_1^4 (u_1 - v_1)^2 = \sum_1^4 (U_1 - V_1)^2, \\ \sum_1^4 \left(\dfrac{du_1}{du}\right)^2 = \sum_1^4 \left(\dfrac{dU_1}{du}\right)^2, \\ \sum_1^4 \left(\dfrac{dv_1}{dv}\right)^2 = \sum_1^4 \left(\dfrac{dV_1}{dv}\right)^2. \end{cases}$$

On est donc amené à déterminer tous les mécanismes dé- ou trans-formables de l'espace à 4 dimensions, puis à ne conserver parmi eux que ceux où l'arc de la courbe $(a)$ est égal à l'arc de la courbe $(A)$, pendant que $(b)$ et $(B)$ ont aussi le même arc. On voit ensuite qu'un tel mécanisme étant donné, on obtient diverses surfaces de l'espace à 3 dimensions suivant celle des quatre coordonnées que l'on appelle $x_4$ plutôt que $x_1, x_2, x_3$ dans l'espace $(x_1, x_2, x_3, x_4)$; d'ailleurs les courbes $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ peuvent être remplacées par les courbes $(u_1, u_2, u_3, -u_4)$, $(v_1, v_2, v_3, -v_4)$ sans toucher aux courbes $(U_1, U_2, U_3, U_4)$, $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ de sorte que $u_5$ et $U_5$ s'échangent ainsi que $v_5$ et $V_5$; M. Vasseur a développé ces idées, amorcées par Mlodziejowski et montré comment les transformations conformes de l'espace à 8 dimensions, si l'on adopte les idées de Mlodziejowski, ou de l'espace à 6 dimensions, si l'on se sert des mécanismes doubles, permettent d'expliquer bien des résultats. Pour la déformation continue, et lignes coniques, la méthode de Mlodziejowski introduit une grosse difficulté, en raison de ce que $u_5$ fait intervenir à la fois $(a)$ et $(A)$; Mlodziejowski n'a pu obtenir ces déformations continues sur base doublement conique. Il est hors de doute que Peterson, qui n'a pas eu le temps de publier tous ses résultats, avait dû imaginer la théorie des mécanismes doubles qui donne sans difficulté tous les couples et que lui-même a été arrêté ensuite pour les mécanismes à déformation continue.

## § 6.

## Bibliographie.

Je me contente de signaler les notes ou mémoires qui se rapportent au problème précis des bases de déformation cylindriques ou coniques.

Egoroff, Transformation de Laplace et systèmes conjugués persistants. (Comptes Rendus, Paris, 145 (1907), p. 1256—1259.

Peterson, Annales de Toulouse **7** (1905), p. 5—107.

Mlodziejowski, Über aufeinander abwickelbare $P$-Flächen (Math. Annalen **63** (1907), S. 62—84).

Masloff, Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris **186** (1928), p. 1345—1347; **187** (1928), p. 794—796; **188** (1929), p. 756—758.

Vasseur, Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris **186** (1928), p. 1604; **187** (1928), p. 1109—1112; **188** (1929), p. 29—31; **188** (1929), p. 603—604; **188** (1919), p. 761—763.

Liebmann, Math. Zeitschr. **30** (1929), p. 173—184.

B. Gambier, Nouvelles Annales de Mathématiques, 4$^e$ Série, **20** (1920); Journal de Liouville, 9$^e$ Série, **1** (1922), p. 19—76; Annales Scientifiques de Jassy **16** (1929), p. 301—338.

M. Vasseur m'a communiqué le manuscrit de sa thèse, encore inédite, qui paraîtra aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure en 1930 et je m'en suis servi pour la rédaction du § 3.

Paris, le 12 Janvier 1930.

(Eingegangen am 15. Januar 1930.)

# Über die Untergruppen freier Gruppen.

Von

Friedrich Levi in Leipzig.

Die echten Untergruppen einer freien Gruppe $\mathfrak{A}$ sind freie Gruppen. Dies wurde im Falle, daß $\mathfrak{A}$ von endlich vielen Elementen erzeugt wird, von Herrn I. Nielsen[1]), im allgemeinen Falle von O. Schreier[2]) bewiesen. Da der Schreiersche Beweis schwierigere Methoden benutzt und ziemlich umfangreich ist, besteht ein gewisses Bedürfnis danach, einen so einfachen und allgemeinen Satz durch einen einfachen Beweis zu stützen. Dieser Forderung soll im folgenden nachgekommen werden. Die Beweismittel, die Herr I. Nielsen im angegebenen besonderen Fall angewandt hat, werden dabei wieder zur Geltung kommen.

Der Satz lautet:

*Ist $\mathfrak{A}$ eine freie Gruppe, die von den wohlgeordneten*[3]) *Elementen*

$$a_1, a_2, a_3, \dots \tag{1}$$

*erzeugt wird und $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren Ordnung $> 1$ ist, so ist $\mathfrak{B}$ eine freie Gruppe.*

Zum Beweise werden die Elemente von $\mathfrak{B}$ mit Ausschluß der Gruppeneins **1** in einer noch näher zu bestimmenden Weise wohlgeordnet:

$$B_1, B_2, B_3, \dots . \tag{2}$$

Ferner wird eine Teilmenge von (2) bestimmt, die aus allen den und nur den $B_\nu$ besteht, welche nicht von in (2) vor $B_\nu$ auftretenden $B_\mu$ abhängig sind, d. h. welche sich nicht als Produkte endlich vieler derartiger $B_\mu$ und ihrer Inversen darstellen lassen. Diese Teilmenge ist dann wohlgeordnet;

[1]) I. Nielsen, Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien. Matematisk Tidsskrift 1921, S. 77—94.

[2]) O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität 5, S. 161—183.

[3]) Die Wohlordnungsfähigkeit ist bei O. Schreier nicht ausdrücklich vorausgesetzt; es wird aber S. 172 unten ein Auswahlverfahren gebraucht, woraus man schließen muß, daß es sich in der ganzen Abhandlung nur um wohlordnungsfähige Mengen handelt.

sie heiße

$$b_1 = B_1, b_2, b_3, \ldots . \tag{3}$$

Es bildet dann (3) ein System von Erzeugenden der Gruppe $\mathfrak{B}$. Gäbe es nämlich Elemente (2), die nicht von (3) abhängen, so müßte es unter ihnen ein erstes: $B_\alpha$ geben; dieses müßte, da es nicht zu den $b_i$ gehört, von endlich vielen früheren $B_\nu$ abhängig sein, und da diese vor $B_\alpha$ in (2) auftretenden Elemente von den (3) abhängig sind, muß für $B_\alpha$ dasselbe gelten; es sind also alle $B_\nu$ und ebenso $1 = b_1 b_1^{-1}$ von (3) abhängig.

Unmittelbar aus der Definition von (3) ergibt sich:

(4) In (2) steht $b_i$ früher als $b_i^{-1}$.

(5) In (2) stehen $b_i$ und $b_k$ früher als $b_i^{\pm 1} \cdot b_k^{\pm 1}$ und $b_k^{\pm 1} \cdot b_i^{\pm 1}$.

Kann man nun die Wohlordnung (2) so bestimmen, daß zwischen den Elementen $b_i$ des zugehörigen Systems (3) keine Relationen bestehen, so ist $\mathfrak{B}$ mit der von den $b_i$ erzeugten freien Gruppe identisch. Die Konstruktion einer solchen Wohlordnung ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.

Da $\mathfrak{A}$ eine freie Gruppe ist, gibt es für jedes seiner Elemente, insbesondere für jedes Element (2) eine Darstellung als „gekürztes $a$-Produkt“

$$B_i = a_{i_1}^{\pm 1} \cdot a_{i_2}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}^{\pm 1}, \tag{6}$$

in dem niemals zwei zueinander inverse Faktoren aufeinander folgen. $m$ heißt *Länge* $(B_i)$. Entsprechend heiße $b_{p_1}^{\pm 1} \cdot b_{p_2}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot b_{p_s}^{\pm 1}$ ein „gekürztes $b$-Produkt“, wenn in ihm keine inversen Faktoren aufeinander folgen. Besteht zwischen den (3) eine Relation, so muß es ein gekürztes $b$-Produkt geben, das dadurch zu 1 wird, daß man für seine Faktoren die gekürzten $a$-Produkte einsetzt und dann sukzessiv benachbarte inverse Elementepaare wegkürzt. Beschränkt man sich auf das Wegkürzen solcher $a$-Faktoren, die von ursprünglich benachbarten $b$-Faktoren herrühren, und bleibt nach restloser Durchführung dieser Operationen von jedem $b$-Faktor mindestens ein $a$-Faktor übrig, so können dann keine zueinander inversen $a$-Faktoren nebeneinander stehen; das betrachtete $b$-Produkt ist dann nicht zu 1 äquivalent. Dafür, daß es keine Relationen zwischen den (3) gibt, ist also hinreichend, daß in jedem gekürzten $b$-Produkt von jedem $b_i$ von links her höchstens die Hälfte, von rechts her nur weniger als die Hälfte seiner Länge weggekürzt werden kann; dann kann nämlich von jedem $b_i^{-1}$ von links her immer nur weniger als die Hälfte, von rechts her höchstens die Hälfte der Länge weggekürzt werden und mithin kein gekürztes $b$-Produkt zu 1 äquivalent sein. In $b_i \cdot b_i$ kann aber schon deshalb niemals die Hälfte der Länge von $b_i$ weggekürzt werden, weil sonst $b_i$ zu sich selbst invers und daher $= 1$ sein müßte. Damit keine Relationen zwischen den (3) bestehen, genügt also, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

Für alle $i + k$, $\varepsilon = \pm 1$

1. *Länge* $(b_k^\varepsilon \cdot b_i) \geqq$ *Länge* $(b_k^\varepsilon)$,

2. *Länge* $(b_i \cdot b_k^\varepsilon) >$ *Länge* $(b_k^\varepsilon)$.

Ordnet man nun die $B_\nu$ nach wachsender Länge, so ist wegen (5) die Bedingung 1 erfüllt und ferner

2′. *Länge* $(b_i \cdot b_k^\varepsilon) \geqq$ *Länge* $(b_k^\varepsilon)$.

Es handelt sich aber jetzt nur noch darum, die $B_\nu$ gleicher Länge so wohlzuordnen, daß für alle $i + k$

$$(7) \qquad \textit{Länge}\,(b_i\, b_k^\varepsilon) + \textit{Länge}\,(b_k^\varepsilon)$$

wird. Bei ungerader Länge von $b_i$ ist (7) stets erfüllt. Es genügt also, wenn man (7) für

$$\textit{Länge}\,(b_i) = 2r$$

beweist. Man stelle nun die Elemente von (2) als gekürzte $a$-Produkte dar und ordne ihnen die danebenstehenden Zeichenfolgen $\sigma(B_\nu)$ zu.

*Länge* $(B_\nu) = 2k+1$:

$$B_\nu = a_{\nu_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{\nu_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \cdot a_{\nu_{2k+1}}^{-\varepsilon_{2k+1}} \cdot \ldots \cdot a_{\nu_{k+2}}^{-\varepsilon_{k+2}}, \qquad \sigma(B_\nu) = a_{\nu_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{\nu_{2k+1}}^{\varepsilon_{2k+1}};$$

(8) *Länge* $(B_\nu) = 2k$:

$$B_\nu = a_{\nu_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{\nu_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{\nu_{2k}}^{-\varepsilon_{2k}} \cdot \ldots \cdot a_{\nu_{k+1}}^{-\varepsilon_{k+1}}, \qquad \sigma(B_\nu) = a_{\nu_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{\nu_{2k}}^{\varepsilon_{2k}};$$

$$\varepsilon_\mu = \pm 1.$$

Die $\sigma$ sind also dadurch gebildet, daß man zu der ersten Hälfte der $a$-Faktoren die Inversen der zweiten Hälfte in umgedrehter Reihenfolge hinzufügt. $B_\nu$ und $\sigma(B_\nu)$ sind einander ein-eindeutig zugeordnet. Jetzt werden die $B_\nu$ gleicher Länge nach der lexikographischen Ordnung der „Wörter" $\sigma(B_\nu)$ geordnet. Die Reihenfolge der „Buchstaben" $a_\nu$ ist dabei der Wohlordnung (1) zu entnehmen und es folge $a_\nu^{-1}$ jeweils unmittelbar auf $a_\nu$. Zusammen mit der Festsetzung, daß die $B_\nu$ kleinerer Länge vor denen größerer Länge auftreten sollen, ergibt sich eine Wohlordnung der $B_\nu$. Wegen (4) muß $\sigma(b_i)$ lexikographisch früher als $\sigma(b_i^{-1})$ sein. Für

$$b_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{\varepsilon_r} \cdot a_{i_{2r}}^{-\varepsilon_{2r}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{r+1}}^{-\varepsilon_{r+1}}$$

folgt daraus:

$$a_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{i_r}^{\varepsilon_r} \text{ ist lexikographisch früher als } a_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}, \ldots, a_{i_{2r}}^{\varepsilon_{2r}}.$$

Wäre nun (7) nicht erfüllt, so müßte doch, da die Bedingungen 1 und 2′ erfüllt sind,

$$\textit{Länge}\,(b_k^\varepsilon) \geqq \textit{Länge}\,(b_i)$$

sein. Also ist $b_k^\varepsilon$ ein gekürztes $a$-Produkt

$$b_k^\varepsilon = a_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{2r}}^{\varepsilon_{2r}} \cdot a_{l_1}^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot a_{l_s}^{\delta_s} \cdot a_{m_t}^{-\varphi_t} \cdot \ldots \cdot a_{m_1}^{-\varphi_1},$$

wobei $t = r + s$ oder $r + s - 1$, $s \geqq 0$ und die Exponenten $= \pm 1$ sind.

Dann ist, für $\varepsilon = +1$:

$$\sigma(b_k) = a_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}, \ldots, a_{i_{2r}}^{\varepsilon_{2r}}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_s}^{\delta_s}, a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t},$$

$$\sigma(b_i \cdot b_k) = a_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{i_r}^{\varepsilon_r}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_s}^{\delta_s}, a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t};$$

für $\varepsilon = -1$, $s$ gerade ist:

$$\sigma(b_k) = a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t}, a_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}, \ldots, a_{i_{2r}}^{\varepsilon_{2r}}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_s}^{\delta_s},$$

$$\sigma(b_k \cdot b_i^{-1}) = a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t}, a_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{i_r}^{\varepsilon_r}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_s}^{\delta_s};$$

für $\varepsilon = -1$, $s$ ungerade ist:

$$\sigma(b_k) = a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t}, a_{l_s}^{-\delta_s}, a_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}, \ldots, a_{i_{2r}}^{\varepsilon_{2r}}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_{s-1}}^{\delta_{s-1}},$$

$$\sigma(b_k \cdot b_i^{-1}) = a_{m_1}^{\varphi_1}, \ldots, a_{m_t}^{\varphi_t}, a_{l_s}^{-\delta_s}, a_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{i_r}^{\varepsilon_r}, a_{l_1}^{\delta_1}, \ldots, a_{l_{s-1}}^{\delta_{s-1}}.$$

Es müßte also $\sigma(b_k)$ lexikographisch später sein als $\sigma(b_i \cdot b_k)$ oder $\sigma(b_k \cdot b_i^{-1})$, und das steht im Widerspruch zu (5). Daher müssen für die angegebene Wohlordnung die Formel (7) und mithin die Bedingungen 1 und 2 erfüllt sein. $\mathfrak{B}$ ist also die von (3) erzeugte freie Gruppe.

Der hier bewiesene Satz gestattet einen vollständigen Überblick über die Isomorphieklassen (d. h. Klassen 1-stufig isomorpher Gruppen) der Untergruppen einer freien Gruppe. Die Isomorphieklasse einer freien Gruppe ist vollständig[4]) durch die Anzahl bzw. Mächtigkeit $N$ der unabhängigen Erzeugenden bestimmt. Ist $N$ unendlich, so stimmt $N$ mit der Mächtigkeit der Gruppe überein; die Untergruppen können daher kein größeres $N$ haben. Letzteres gilt offenbar auch im Falle $N = 1$. Ist aber $N > 1$ und endlich, ferner $a, b$ zwei unabhängige Erzeugende, so können zwischen den unendlich vielen $c_\nu = a^\nu b a^\nu$ keine Relationen bestehen. Es gibt dann also Untergruppen mit abzählbar unendlich vielen unabhängigen Erzeugenden. Nennt man zwei freie Gruppen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ äquivalent, wenn $\mathfrak{C}$ zu einer Untergruppe von $\mathfrak{D}$ und zugleich $\mathfrak{D}$ zu einer Untergruppe von $\mathfrak{C}$ isomorph ist, so bilden alle Isomorphieklassen mit $N > 1$ endlich und $N$ abzählbar unendlich eine Äquivalenzklasse, während die übrigen Isomorphieklassen zugleich Äquivalenzklassen sind. $\mathfrak{A} \neq 1$ ist daher dann und nur dann zur Untergruppe einer freien Gruppe $\mathfrak{C}$ isomorph, wenn $\mathfrak{A}$ zur gleichen oder einer niedrigeren Äquivalenzklasse wie $\mathfrak{C}$ gehört.

Ötzsch b. Leipzig, 9. Februar 1930.

---

[4]) Daß andererseits $N$ eine Invariante der Isomorphieklasse ist, bedarf nur für abzählbare Gruppen eines Beweises, und zwar folgt es aus der Tatsache, daß $N$ zugleich die Anzahl der direkt unzerlegbaren Faktoren der Faktorgruppe der Kommutatorgruppe ist. Vgl. O. Schreier a. a. O. S. 171 f.

(Eingegangen am 10. Februar 1930.)

# Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Von

J. Karamata in Belgrad.

Herr Littlewood bewies den folgenden Satz[1]):

Aus

$$f(r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu r^\nu\to s \quad \text{für} \quad r\to 1 \text{ von links}$$

und

$$u_\nu = O\left(\frac{1}{\nu}\right) \tag{1}$$

folgt

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\to s \quad \text{für} \quad n\to\infty .$$

Dieser Satz und einige verwandte Sätze können sehr einfach aus dem folgenden Hauptsatz hergeleitet werden.

Hauptsatz. *Aus*

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu r^\nu\to s \quad \textit{für} \quad r\to 1 \textit{ von links} \tag{2}$$

*und*

$$s_\nu\geqq -M, \quad M\geqq 0 \textit{ von } \nu \textit{ frei},$$

*folgt*

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu g(r^\nu)r^\nu\to s\cdot\int_0^1 g(t)\,dt \tag{3}$$

*für jede im Intervalle* $(0,1)$ *beschränkte und R-integrable Funktion* $g(t)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s_\nu\geqq 0$, da dieser Wortlaut sonst nur auf die beiden Folgen $s_\nu+M$ und $M$ statt $s_\nu$ anzuwenden ist.

Setzt man alsdann in (2) $r^{1+\alpha}$, $\alpha\geqq 0$, statt $r$, so folgt

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu r^{\nu\alpha}r^\nu\to\frac{s}{1+\alpha};$$

[1]) Siehe E. Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. (1929), S. 57 und die dort angeführte Literatur.

also ist

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu P(r^\nu)r^\nu\to s\cdot\int_0^1 P(t)\,dt$$

für jedes Polynom $P(t)$. Da man aber jeder in $(0,1)$ beschränkten und $R$-integrablen Funktion $g(t)$ bei jedem $\varepsilon>0$ zwei Polynome $p(t)$ und $P(t)$ derart zuordnen kann, daß

$$p(t)\leqq g(t)\leqq P(t)\quad\text{für}\quad 0\leqq t\leqq 1$$

und

$$\int_0^1\{P(t)-p(t)\}\,dt\leqq\varepsilon$$

ist, und da die Zahlen $s_\nu\geqq 0$ sind, folgt die Gültigkeit von (3) für jede beschränkte und $R$-integrable Funktion $g(t)$.

Als erste Folge des Hauptsatzes kann man den folgenden von den Herren Hardy und Littlewood[2]) herrührenden Satz ableiten:

Satz. *Das Abelsche und Cesàrosche Limitierungsverfahren sind äquivalent für jede einseitig beschränkte Folge; mit andern Worten aus*

$$(1-r)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu r^\nu\to s\quad\textit{für}\quad r\to 1\ \textit{von links}$$

*und*

$$s_\nu\geqq -M$$

*folgt*

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu\to s.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz, indem man in (3)

$$r=e^{-\frac{1}{n}}$$

und

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad 0\leqq t<e^{-1},\\ \dfrac{1}{t} & \text{für}\quad e^{-1}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

setzt.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich bekanntlich[3]) die Hardy-Littlewoodsche Verschärfung des obigen Littlewoodschen Satzes, in der (1) durch die schwächere Voraussetzung

$$\nu u_\nu<c,\quad c\text{ von }\nu\text{ frei},$$

ersetzt ist, auf einen Tauberschen Satz zurückführen.

---

[2]) loc. cit. [1]) S. 12.

[3]) Siehe z. B. die 1. Auflage (1916) des unter [1]) zitierten Landauschen Buches S. 52—56.

(Eingegangen am 12. März 1930.)

# Über variationsvermindernde lineare Transformationen.

Von

Isac Schoenberg in Jassy (Rumänien).

Wir betrachten die reelle lineare Transformation

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \\ y_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_m &= a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n . \end{aligned}$$

und wollen dieselbe mit Herrn Pólya variationsvermindernd nennen, falls für beliebige reelle $x$ die Zeichenwechselanzahl der Folge $y_1, y_2, \ldots, y_n$ diejenige der Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie übertrifft, also immer $v_y \leqq v_x$ ist[1]). Derartige Transformationen in besonderer Gestalt treten zu Hilfszwecken in verschiedenen Abhandlungen aus dem Ideenkreise der Descartesschen Vorzeichenregel auf[2]).

In den folgenden Zeilen versuche ich die variationsvermindernde Eigenschaft der linearen Transformationen aus den Vorzeichen der Minoren ihrer Matrix direkt abzulesen. Für den Fall, daß der Rang der Transformation gleich $n$ ist, gelingt diese Charakterisierung mit Hilfe der Minoren vollständig.

Bei anderer Gelegenheit werde ich Anwendungen des hier erhaltenen Satzes geben, insbesondere zum Vergleich der verschiedenen Sätze, welche Schranken für die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen liefern.

Ich möchte noch Herrn Professor Pólya für sein freundliches Interesse meinen Dank aussprechen.

---

[1]) Wir behalten diese Bezeichnung auch fernerhin bei.

[2]) Vgl. M. Fekete und G. Pólya, Über ein Problem von Laguerre, Rendiconti di Palermo **34** (1912), S. 89–120, insbesondere S. 91–95. Siehe ferner Fußnote [4]). — N. Obreschkoff, Über die Wurzeln von algebraischen Gleichungen, Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. **33** (1925), S. 52–64, insbesondere die Hilfssätze des § 1. — G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, 2, 5. Abschnitt, insbesondere die Aufgaben 4, 5 und 21.

1. Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und alle ihre Unterdeterminanten der Ordnung $\nu$ für $1 \leqq \nu \leqq \operatorname{Min}(m, n)$. *Wenn sämtliche Minoren der Ordnung $\nu$ entweder Null sind oder alle dasselbe Vorzeichen besitzen, also keine zwei Minoren der Ordnung $\nu$ verschiedene Vorzeichen aufweisen und dies für alle in Frage kommenden $\nu$ gilt, so wollen wir $A$ „minorendefinit" oder auch kurz „definit" nennen.* Es kann dabei das gemeinsame Vorzeichen sehr wohl von $\nu$ abhängen.

Wenn die Matrix $A$ für alle $\nu$ bloß nichtnegative Minoren aufweist, so kann man $A$ auch *minorenpositiv* oder auch *total positiv* nennen[3]).

2. Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 1. *Wenn die Matrix $A$ der linearen Transformation* (1) *minorendefinit ist, so ist diese Transformation auch variationsvermindernd*[4]).

Satz 2. *Es sei $h$ der Rang von $A$. Falls $h = n$ und die Transformation* (1) *variationsvermindernd ist, so folgt daraus auch umgekehrt, daß die Koeffizientenmatrix $A$ minorendefinit ist*[5]).

---

[3]) Interessante total positive Matrizen findet man in Pólya-Szegö, a. a. O., Aufgabe 48 und 76. Man kann folgenden Satz leicht beweisen: *Die Folge reeller Zahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ ist dann und nur dann total monoton (im Sinne der Herren Schur und Hausdorff), wenn die mit den $\mu_\nu$ geränderte Matrix der Binomialkoeffizienten*

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_2 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ \mu_3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

*total positiv ist.*

[4]) Herr Fekete beweist a. a. O. diesen Satz für lineare Transformationen mit rekurrenten total positiven Matrizen. Siehe a. a. O. auf S. 91 Satz 1 und Fußnote [6]).

[5]) Es sei $(y) = A(x)$ eine lineare Transformation mit nichtsingulärer quadratischer Matrix (also $m = n$, $|A| \neq 0$). Wir wollen annehmen, es sei immer $v_y \geqq v_x$, dann ist wegen $(x) = A^{-1}(y)$ und Satz 2 auch $A^{-1}$ minorendefinit. Nach einem Hauptsatz über die Minoren der reziproken Matrix folgt für $A$ folgende charakteristische Eigenschaft: *Alle Minoren derselben Ordnung $\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), mit ihren Vorzeichen als algebraische Komplimente versehen, haben dasselbe Vorzeichen (oder Null).* Solche nichtsinguläre quadratische Matrizen könnte man *minoren-algebraisch-definit* oder kurz *algebraisch definit* nennen. Sie besitzen die Eigenschaft $v_y \geqq v_x$ und die entsprechende Transformation ist also variationsvermehrend.

Wir wollen sofort bemerken, daß die Zusatzbedingung $h = n$ für Satz 2 wesentlich ist. Wir betrachten als Beispiel das System

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$y_2 = \quad x_2 .$$

Offenbar ist immer $v_y \leqq v_x$, aber die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht minorendefinit. Entsprechend ist auch die Zusatzbedingung $h = n$ von Satz 2 nicht erfüllt: $h = 2$ und $n = 3$.

3. Zum Beweis des Satzes 1 liefert uns folgender Hilfssatz eine erste obere Schranke für $v_y$.

Hilfssatz. *Es sei die Koeffizientenmatrix $A$ des Systems* (1) *minorendefinit und es sei $h\,(>0)$ ihr Rang.*

*Für alle reellen Werte der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist dann*

$$v_y \leqq h - 1 . \tag{2}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion in bezug auf $h$. *Für $h = 1$ ist der Hilfssatz richtig,* denn alle Elemente der minorendefiniten Matrix $A$ haben dasselbe Vorzeichen (oder sind gleich Null), und aus $h = 1$ folgt, daß alle Linearformen (15) sich von einer gewissen nicht identisch verschwindenden unter ihnen bloß durch konstante nichtnegative Faktoren unterscheiden.

Es ist also immer $v_y = 0 = h - 1$.

*Wir greifen noch einen anderen Spezialfall vorweg und zwar $h = m - 1$.*

Jedenfalls gilt $v_y \leqq m - 1$, also $v_y \leqq h$. Es wird also (2) bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß $v_y = h$ ausgeschlossen ist. Wir wollen nun $v_y = h = m - 1$ voraussetzen und zu einem Widerspruch gelangen. Die Matrix $A$ besitzt eine nichtverschwindende Unterdeterminante der Ordnung $h = m - 1$. Es seien

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

die $m$ Unterdeterminanten der Ordnung $m - 1$, welche sich aus den $m - 1$ Spalten jener nichtverschwindenden Unterdeterminante bilden lassen. Dieselbe ist mit einer von diesen $m - 1$ Minoren identisch.

Nach einer Eigenschaft des Ranges gilt identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 - \ldots + (-1)^{m-1} A_m y_m = 0 ,$$

und da für unsere speziellen $x$ die Beziehung $v_y = h = m - 1$ gilt, also die Vorzeichen von $y_1, y_2, \ldots, y_m$ abwechseln, so folgt

$$|A_1| \cdot |y_1| + |A_2| \cdot |y_2| + \ldots + |A_m| \cdot |y_m| = 0 ,$$

weil alle $A_i$ dasselbe Vorzeichen haben ($A$ ist minorendefinit). Diese letzte Gleichung ist aber unmöglich, da kein $y_i$ verschwindet und nicht alle $A_i$ verschwinden.

*Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall* und wollen annehmen, daß der Satz (2) für kleinere Werte von $h$ schon bewiesen ist.

Angenommen, es gäbe feste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $v_y \geqq h$. Wir könnten dann aus den $m$ Linearformen (1) gewiß $h+1$ Linearformen herausgreifen, etwa

$$\begin{aligned} y_\alpha &= a_{\alpha 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha n} x_n, \\ y_\beta &= a_{\beta 1} x_1 + \ldots + a_{\beta n} x_n, \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_\lambda &= a_{\lambda 1} x_1 + \ldots + a_{\lambda n} x_n, \end{aligned}$$

so daß für dieses neue System $v_y^* = h$ wird. Es sei $h^*$ der Rang dieses Teilsystems. Es gibt nun zwei Möglichkeiten und beide ergeben einen Widerspruch.

1. Wenn $h^* < h$, dann ist unser Hilfssatz nach Voraussetzung schon bewiesen, also $v_y^* = h > h^*$ unmöglich, und

2. wenn $h^* = h$, so haben wir es mit dem schon erledigten Spezialfall $h = m - 1$ zu tun.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. Wir können nun zum Beweis des Satzes 1 übergehen. Wir wollen zeigen, daß $v_y \leqq v_x$. Für $v_y = 0$ ist nichts zu beweisen, es sei also $v_y > 0$.

Man kann gewiß aus den Linearformen (1) ein Teilsystem von $m^* = v_y + 1$ Formen herausgreifen, so daß für dieselben $v_y^* = v_y = m^* - 1$ wird. Aus $v_y^* \leqq v_x$ würde also auch $v_y \leqq v_x$ folgen.

*Wir können also von vornherein voraussetzen, daß*

$$v_y = m - 1$$

*ist, und müssen zeigen, daß* $v_x \geqq m - 1$ *gilt.*

Nach Hilfssatz (2) ist $m - 1 = v_y \leqq h - 1$, also $h = m$, insbesondere auch $n \geqq m$.

*Für* $n = m$ *ist unser Satz richtig, und zwar ist* $v_x = m - 1$.

In der Tat, es ist $n = m = h$ und man kann dann (1) nach der Cramerschen Regel auflösen.

Aus den Cramerschen Formeln und den drei Tatsachen:

1. die $y_1, y_2, \ldots, y_m$ haben alternierende Vorzeichen ($v_y = m - 1$),

2. die Matrix $A = (a_{ik})$ ist minorendefinit,

3. es darf kein $x_i$ verschwinden, denn sonst bekäme man ein neues System mit $m - 1$ Spalten, was $h = m$ widerspricht,

folgt, daß auch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alternierende Vorzeichen aufweisen, also $v_x = m - 1$ $(m = n)$.

*Es sei nun $n > m$ und der Satz $v_x \geqq m-1$ (unter der Annahme $v_y = m-1$) schon für kleinere Werte von $n$ bewiesen.* Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben alternierende Vorzeichen, dann ist $v_x = n-1 > m-1 = v_y$, also der Satz richtig,

2. Die $x_i$ haben nicht alternierende Vorzeichen und dann ist entweder ein $x_i = 0$, oder aber $x_i x_{i+1} > 0$. Im ersten Falle, also $x_i = 0$, streichen wir die $i$-te Spalte und das neue System genügt allen Bedingungen und hat weniger als $n$ Spalten, also ist der Satz nach den vorangehenden richtig. Im Falle $x_i x_{i+1} > 0$ setzen wir

$$a_{k,i} x_i + a_{k,i+1} x_{i+1} = \varepsilon \cdot a' \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

mit $\varepsilon = \operatorname{sign} x_i$. Es ersetze $\varepsilon$ die beiden Größen $x_i$ und $x_{i+1}$. Das neue derart zusammengezogene System hat $n-1$ Spalten, eine ebenfalls minorendefinite Matrix, es gilt $v_x^* = v_x$, so daß der Satz nach Voraussetzung richtig ist.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Der Beweis von Satz 2 wird durch vollständige Induktion in bezug auf $n$ geführt.

*Für $n = 1$ ist der Satz richtig,* denn es gilt $v_x = 0$ und aus $v_y \leqq v_x$ folgt $v_y = 0$, woraus sich für $x_1 = 1$ ergibt, daß in

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$$

keine Zeichenwechsel vorkommen. Also ist $A$ minorendefinit.

*Es sei Satz 2 für $n-1$ schon bewiesen. Wir werden zeigen, daß er auch für $n$ gilt.*

Wenn wir in den Linearformen

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \end{aligned}$$

irgendein $x_i$ gleich Null setzen, was dem Streichen der entsprechenden Spalte gleichkommt, so entsteht ein neues System mit $n-1$ Spalten, der Rang desselben ist genau gleich $n-1$ und auch die Eigenschaft $v_y \leqq v_x$ bleibt erhalten. Nach unserer Voraussetzung sind also die $n$ verschiedenen Matrizen dieser $n$ Teilsysteme schon minorendefinit. Ich behaupte: *daraus folgt für die vollständige Matrix $A$, daß sie minorendefinit ist in bezug auf alle ihre Minoren inklusive bis zur Ordnung $n-2$.*

In der Tat, es seien $Q_\nu'$ und $Q_\nu''$ zwei nichtverschwindende Minoren von $A$ von der Ordnung $\nu \leqq n-2$. Wir wollen zeigen, daß $Q_\nu' \cdot Q_\nu'' > 0$ ist.

Falls $A$ eine Spalte besitzt, welche weder Elemente von $Q'_\nu$ noch solche von $Q''_\nu$ enthält, dann stecken schon $Q'_\nu$ und $Q''_\nu$ in derselben minorendefiniten Matrix, die durch Streichung dieser Spalte entsteht, und wir sind fertig.

Wenn das nicht gilt, dann sei $A'$ irgendeine solche Teilmatrix mit $n-1$ Spalten, welche $Q'_\nu$ enthält, und ebenso $A''$ eine Teilmatrix, welche $Q''_\nu$ enthält. Es haben nun $A'$ und $A''$ gewiß $n-2$ gemeinsame Spalten. Wir greifen $\nu$ feste Spalten aus diesen heraus. In diesen gibt es gewiß einen nichtverschwindenden Minor $\nu$-ter Ordnung, etwa $Q^*_\nu$. Es stecken nun $Q'_\nu$ und $Q^*_\nu$ in $A'$, also ist $Q'_\nu Q^*_\nu > 0$. Ebenso stecken $Q''_\nu$ und $Q^*_\nu$ in $A''$, also gilt $Q''_\nu Q^*_\nu > 0$. Mithin ist tatsächlich $Q'_\nu Q''_\nu > 0$, w. z. b. w.

6. *Wir wollen jetzt zeigen, daß alle nichtverschwindenden Minoren $Q_{n-1}$ der Ordnung $n-1$ von $A$ ebenfalls dasselbe Vorzeichen haben.*

Wir wissen schon, daß alle $Q_{n-1}$ aus $n-1$ festen Spalten dasselbe Vorzeichen haben. Wir wollen nun zeigen, daß dieses Vorzeichen für alle $n = \binom{n}{n-1}$ Spaltenkombinationen dasselbe ist. Aus $h = n$ folgt, daß es einen nichtverschwindenden $Q_n$ gibt. Dieser Minor $Q_n$ hat also die Eigenschaft, in je $n-1$ Spalten einen von Null verschiedenen $Q_{n-1}$ zu besitzen.

Jede Spaltenkombination hat also in $Q_n$ einen nichtverschwindenden Repräsentanten $Q_{n-1}$, und es genügt, wenn wir unsere Behauptung für $m = n = h$ beweisen.

Zu diesem Ende seien $A_{ik}$ die ersten Minoren der Matrix des Systems

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

*Es sei etwa*

$$A_{ik} \cdot A_{rs} < 0 \qquad (k < s);$$

*wir wollen zeigen, daß dies der Annahme $v_y \leqq v_x$ widerspricht* ($k = s$ ist schon erledigt!).

Wir wissen, daß alle $A_{\alpha k}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) dasselbe Vorzeichen, etwa $\varepsilon (= \pm 1)$ haben. Ebenso sei $\eta$ das Vorzeichen der $A_{\alpha s}$, so daß $\varepsilon\eta = -1$.

Wir wollen das System

$$\begin{aligned} 1 \quad &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ -1 \quad &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad\qquad D = |a_{ik}| \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ (-1)^{n-1} &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

auflösen. Nach Cramer folgt

$$D x_k = (-1)^{k+1} \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha k} = (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon \cdot K \qquad (K > 0)$$

und

$$D x_s = (-1)^{s+1} \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha s} = (-1)^{s+1} \cdot \eta \cdot K' \qquad (K' > 0),$$

also

$$\operatorname{sign}(x_k \cdot x_s) = -(-1)^{s-k},$$

mithin kann $v_x$ nicht gleich $n-1$ sein, was aus $v_y = n-1$ und $v_y \leqq v_x$ folgen müßte. Damit ist die Behauptung bewiesen.

7. *Wir müssen endlich noch zeigen, daß auch alle nichtverschwindenden $Q_n$ dasselbe Vorzeichen haben.*

Wir machen zunächst die Annahme $m = n+1$. Es gibt dann überhaupt nur $n+1$ Minoren $Q_n$ $n$-ter Ordnung; wir wollen dieselben mit $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ bezeichnen. Aus $h = n$ folgt, daß die $y_i$ bloß durch die Beziehung

$$y_1 A_1 - y_2 A_2 + \ldots + (-1)^n y_{n+1} A_{n+1} = 0$$

verbunden sind und nicht alle $A_i$ verschwinden.

*Wenn nicht alle $A_i$ dasselbe Vorzeichen haben, so sei etwa*

$$A_r > 0, \quad A_s < 0 \qquad (r < s).$$

Wenn wir $v_y = n$ ansetzen, also z. B. $y_i = (-1)^{i-1} |y_i|$, so folgt die Beziehung

$$|y_1| A_1 + \ldots + |y_r| A_r + \ldots + |y_s| A_s + \ldots + |y_{n+1}| A_{n+1} = 0$$

und dieser kann man tatsächlich mit sämtlich positiven $|y_i|$ genügen Man nehme etwa alle $|y_i|$ $(i \neq r, s)$ fest und positiv. Für sehr großes $|y_r|$ folgt für $|y_s|$ gewiß ein positiver Wert.

Die Möglichkeit $v_y = n$ widerspricht aber der Bedingung $v_y \leqq v_x$, wegen $v_x \leqq n-1$. Wir haben also einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen.

*Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall $m > n$.*

Es seien $Q_n'$ und $Q_n''$ zwei von Null verschiedene Minoren. Es sei $\nu$ die Anzahl ihrer gemeinsamen Zeilen.

Es ist $0 \leqq \nu \leqq n-1$.

*Für $\nu = n-1$ folgt aus dem schon bewiesenen Spezialfall $m = n+1$, daß tatsächlich $Q_n' Q_n'' > 0$.*

*Es sei diese Behauptung für $\nu+1$ schon bewiesen. Wir wollen sie für $\nu$ beweisen.*

Es seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ die gemeinsamen $\nu$ Zeilen von $Q_n'$ und $Q_n''$ ($\nu = 0$ nicht ausgeschlossen).

Es seien $Z_{\nu+1}'', Z_{\nu+2}'', \ldots, Z_n''$ die restlichen $n-\nu$ Zeilen von $Q_n''$ und es sei $Z_0$ irgendeine von $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ verschiedene Zeile von $Q_n'$.

Wir betrachten die $n-\nu$ Determinanten, welche aus $Q_n''$ entstehen, wenn wir die Zeilen $Z_{\nu+1}'', Z_{\nu+2}'', \ldots, Z_n''$ nacheinander durch $Z_0$ ersetzen. *Ich behaupte, daß mindestens eine von diesen $n-\nu$ Determinanten nicht verschwindet.*

In der Tat, alle gleich Null gesetzt, ergeben für die Elemente von $Z_0$ offenbar $n-\nu$ lineare homogene Gleichungen. Aus $Q_n'' \neq 0$ folgt, daß diese linear unabhängig sind, also den Rang $n-\nu$ haben. Es sind aber gewiß $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ Lösungen dieses Gleichungssystems und diese $\nu$ Lösungen sind als Zeilen von $Q_n''(\neq 0)$ linear unabhängig. Aber auch $Z_0, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sind linear unabhängig [als Zeilen von $Q_n'(\neq 0)$]. Also ist $Z_0$ gewiß keine Lösung dieses Systems; denn $\nu$ ist die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen.

Also ist tatsächlich mindestens eine jener Determinanten von Null verschieden. Wir greifen eine solche heraus; diese ist bis auf das Vorzeichen ein Minor $Q_n^*$ von $A$ und von Null verschieden. Es hat aber $Q_n'$ mit $Q_n^*$ $\nu+1$ gemeinsame Zeilen (eben $Z_0, Z, \ldots, Z_n$), also ist $Q_n' Q_n^* > 0$.

$Q_n''$ und $Q_n^*$ haben sogar $n-1$ gemeinsame Zeilen, also gilt auch $Q_n'' Q_n^* > 0$.

Es folgt also in der Tat $Q_n' Q_n'' > 0$, und Satz 2 ist vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 4. Januar 1929.)

# Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten.

Von

F. K. G. Odqvist in Stockholm.

In dieser Arbeit werden wir die Randwertaufgaben des folgenden Systems von Differentialgleichungen, der sogenannten Navier-Stokesschen Gleichungen für die stationäre Bewegung einer zähen raumbeständigen Flüssigkeit, betrachten:

$$(0.01)\qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $u_i$ die Geschwindigkeitskomponenten, $p$ den Druck, und $X_i$ sind die Komponenten der äußeren Kräfte. $\mu$ und $\varrho$ seien gegebene positive Konstanten. Es sind Lösungen des Systems (0.01) in einem gewissen räumlichen Gebiete aufzufinden, auf dessen Begrenzung $u_i$ vorgegebene Werte annehmen.

Zwei Schwierigkeiten, die uns bei der Lösung dieser Randwertaufgabe nach bekannten Vorbildern entgegentreten, liegen auf der Hand. Es sind einerseits die drei ersten Gleichungen, wegen der linker Hand auftretenden Produktglieder, nicht linear, und andererseits müßte man, um $p$ eliminieren zu können, die Ordnung der Gleichungen von zwei auf vier erhöhen. Unsere Methode wird sein, anfänglich die Produktglieder wegzulassen und die Lösungen der allgemeineren Gleichungen (0.01) durch Lösungen der so entstandenen „linearisierten" Gleichungen aufzubauen.

In einer Stockholmer Dissertation[1]) hat der Verfasser eine Theorie der linearisierten Gleichungen entwickelt, die mit derjenigen von Fredholm und Plemelj für die entsprechenden Probleme der Potentialtheorie aufgestellten

[1]) „Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten". Stockholm 1928, P. A. Norstedt o. Söner.

vollkommen analog ist. Für die Randwertaufgabe des nichtlinearen Gleichungssystems (0.01) wurde sodann mit Hilfe eines Greenschen Tensors ein System von quadratischen Integralgleichungen hergeleitet, von dem gezeigt wurde, daß es bei genügend kleiner Geschwindigkeit und genügend kleinen Abmessungen des betrachteten Raumgebietes eine wohlbestimmte Lösung besitzt.

Seit dem Erscheinen meiner Dissertation hat Herr L. Lichtenstein eine Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlicht[2]). Er stützt sich bezüglich der linearen Randwertaufgabe auf eine Arbeit von U. Crudeli und gewinnt sodann die Lösung des allgemeineren Problems durch sukzessive Approximationen. Es gelingt dadurch, die Randwertaufgabe der nichtlinearen Gleichungen (0.01) für jede Größe des betrachteten Gebietes zu lösen, falls nur die Geschwindigkeiten hinreichend klein sind.

Ferner hat Dr. H. Faxén neuerdings eine Arbeit bei der Schwedischen Akademie der Wissenschaften eingereicht[3]), in der unter anderem gezeigt wird, wie die in meiner Dissertation angewandte Methode zur Behandlung der Oseenschen Differentialgleichungen verallgemeinert werden kann. In dieser Arbeit, von der mir der Verfasser freundlichst die Korrekturbogen zur Verfügung stellte, wird auch ein Satz bewiesen, von dem wir im folgenden Gebrauch machen werden.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist einerseits zu zeigen, daß an meiner Lösung der Randwertaufgabe des Systems (0.01) nur eine kleine Abänderung erforderlich ist, um zum selben Grad der Allgemeinheit zu gelangen, wie es Lichtenstein mit seiner gänzlich verschiedenen Methode tut. Andererseits werde ich zeigen, wie meine Methode imstande ist, auf natürlichem Wege zum Studium der Verzweigungen der Lösungen der Randwertaufgabe zu führen. In meiner Dissertation waren bei Behandlung der linearen Probleme einige Irrtümer noch vorhanden, auf die mich Herr Dr. Faxén freundlichst aufmerksam machte. Diese werden hier berichtigt, und um Hinweise auf meine Dissertation und die obenerwähnte Faxénsche Arbeit möglichst zu vermeiden, wird übrigens die ganze Theorie hier neu dargestellt und teilweise mit neuen Beweisen versehen.

Es werden im allgemeinen die dreidimensionalen Aufgaben betrachtet. Gelegentlich werden wir am Ende von § 4 die für das entsprechende ebene Problem nötigen Modifikationen andeuten, wodurch unter anderem die Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe des Außenraumes einer geschlossenen Kurve erledigt wird.

---

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik, Dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 387–415; Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 493–506.

[3]) Arkiv f. mat., astr. o. fys. 21 A, Nr. 14.

In den ersten vier Paragraphen werden die linearen Randwertaufgaben gelöst, und die Eigenschaften der Lösungen in dem Umfange studiert, wie sie für das Folgende nötig sind. In § 5 wird ein Greenscher Tensor konstruiert, und seine Eigenschaften näher untersucht. § 6 enthält die Lösung der Randwertaufgabe für das System (0.01). Die letzten zwei Paragraphen enthalten einige Bemerkungen über Verzweigung der Lösungen der Randwertaufgabe (0.01) sowie die Anwendung des Greenschen Tensors auf nichtstationäre Strömungen und auf das Stabilitätsproblem. Gelegentlich wird angedeutet, wie man die Lösung der folgenden, mit einem bekannten Problem von Oseen analogen, Randwertaufgabe bekommen kann: Man bestimme unter Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder" die von einem eingetauchten Körper in einer rotierenden Flüssigkeit hervorgerufene Strömung.

## § 1.

## Definitionen. Bezeichnungen. Greensche Formeln.

Wir betrachten im folgenden räumliche Gebiete $Q$, die von endlich vielen, endlichen, stetigen Flächen begrenzt sein sollen. Die Punkte von $Q$ werden auf ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem $x_1, x_2, x_3$ bezogen. Innere Punkte von $Q$ mit den Koordinaten $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, bzw. $y_i$, werden kurz $(x)$, bzw. $(y)$ bezeichnet. Raumelemente werden mit $dQ$ bezeichnet. Der Bezugspunkt wird, wenn nötig, $d_x Q$, $d_y Q$ usw. angedeutet. Jedem Gebiete $Q$, als „Innengebiet" mit $Q_{(i)}$ bezeichnet, können wir ein Außengebiet $Q_{(e)}$ zuordnen, so daß $Q_{(i)} + Q_{(e)}$ den ganzen Raum ausmacht.

Die gesamte Begrenzungsfläche („Randfläche") eines Gebietes $Q$ heiße $T$ und besitze eine stetige Tangentialebene. Punkte auf $T$ werden mit $(\xi)$, $(\eta)$, ..., und Flächenelemente mit $dT$, bzw. $d_\xi T$, ... bezeichnet. Die innere Flächennormale soll mit $n_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet werden.

Funktionen von den Koordinaten $x_i, \xi_i, \ldots$ eines Punktes werden wir kurz mit $f(x)$, $f(\xi)$, $f(x, \xi)$, ... usw. bezeichnen. Es gilt dann z. B. $n_i = n_i(\xi)$

Der Abstand zweier Punkte $(x)$ und $(x')$ soll $r_{xx'}$ bezeichnet werden.

Eine Funktion $f(x)$, von der wir wissen, daß für irgend zwei Punkte $(x)$ und $(x')$ eines Gebietes $Q$ eine Ungleichung der Form

$$|f(x) - f(x')| < C r_{xx'}^h$$

besteht mit $h$ reell, positiv und kleiner als eins, und $C$ eine positive, nur von $h$ abhängige Konstante, soll als *H-stetig* mit dem Exponenten $h$ (Hölder) bezeichnet werden.

Eine Fläche $T$ soll in der Umgebung eines jeden Punktes eine Darstellung der Form $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ gewährleisten, falls das Koordinatensystem

passend gewählt wird. Besitzt die Funktion $f(\xi_1, \xi_2)$ erste Ableitungen, die $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sind, so gehöre die Fläche der Klasse $Ah$. Sind darüber hinaus die zweiten Differentialquotienten von $f(\xi_1, \xi_2)$ vorhanden und $H$-stetig, so gehöre $T$ der Klasse $Bh$. Die entsprechenden Gebiete $Q$ gehören den Gebietsklassen $Ah$ und $Bh$.[4]) Unsere endgültigen Ergebnisse in § 6 werden für Gebiete der Klasse $Bh$ gewonnen. Trotzdem wird überall mit den geringeren Voraussetzungen der Klasse $Ah$ so weit gearbeitet, wie dies möglich ist.

Im folgenden soll das zweimalige Vorkommen eines Index in irgendeinem Produkte, Differentialquotienten usw. zur Folge haben, daß in bezug auf diesen Index summiert werden soll. Es schreiben sich dann die Gleichungen (0.01) kurz

$$\text{(1.01)} \qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Wir werden zunächst nur diejenigen Bewegungen einer zähen Flüssigkeit studieren, die den einfacheren Differentialgleichungen gehorchen, die man dadurch bekommt, daß man die sogenannten quadratischen Glieder

$$\varrho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

wegstreicht. Wir haben dann die „Stokesschen Gleichungen“

$$\text{(1.02)} \qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Wir werden als erste Stokessche Randwertaufgabe das folgende Problem bezeichnen:

Man bestimme in einem Raumgebiete $Q$ der Klasse $Ah$ die Funktionen $u_i, p$, so daß einerseits in $Q$

$$\text{(1.03)} \qquad \mu \Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

erfüllt ist, und andererseits die Funktionen $u_i(x)$ bei Heranrückung an die Randfläche $T$ von $Q$ vorgeschriebene Werte $u_i(\xi)$ annehmen.

Der in der Flüssigkeit wirkende Spannungstensor wird durch

$$T_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$$

---

[4]) Man vergleiche L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzyklopädie der Math. Wissenschaften. II C 3. Teubner 1919.

dargestellt, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Die auf ein Flächenelement mit der Normalen $n_k$ wirkende Spannung ist

$$T_{ik} n_k.$$

Die Aufgabe, die Gleichungen (1.03) in einem Gebiete $Q$ so zu integrieren, daß die auf die Begrenzungsfläche $T$ wirkenden Spannungen $T_{ik} n_k$ vorgegebene Werte annehmen, werden wir als zweite Stokessche Randwertaufgabe bezeichnen.

Die Gleichungen (1.03) werden wir die homogenen Stokesschen Gleichungen nennen.

Betrachten wir nun zwei beliebige, zweimal stetig differentiierbare Vektoren $u_i$ und $v_i$ und eine beliebige, stetig differentiierbare, skalare Größe $p$, dann gilt die „Greensche Identität"

$$\begin{aligned} (1.04) \quad \int_{Q_{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ik} v_i]\, dQ = \int_{Q_{(i)}} \Big\{ & \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big) - p\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\ & + \Big[\mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big)\Big] v_i \Big\}\, dQ \\ = \int_T & \Big[p\,\delta_{ik} - \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big)\Big] n_k v_i\, dT. \end{aligned}$$

Die ersten Integrale sind Raumintegrale über das Raumelement $dQ$ von $Q_{(i)}$, und das letzte ist ein Flächenintegral über das Flächenelement $dT$ von $T$.

Vertauscht man in (1.04) $u_i$ und $v_i$, setzt man $-q$ für $p$ und subtrahiert man die so gewonnene Gleichung von (1.04), so ergibt sich die „Greensche Reziprozitätsformel"

$$\begin{aligned} (1.05) \quad \int_{Q_{(i)}} \Big\{ & \Big[\mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big)\Big] v_i - q\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ & - \Big[\mu \Delta v_i + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\Big)\Big] u_i - p\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\Big\}\, dQ \\ = -\int_T & \{T_{ik}(u) n_k v_i - T'_{ik}(v) n_k u_i\}\, dT, \end{aligned}$$

worin

$$(1.06) \quad \begin{cases} T_{ik}(u) = -p\,\delta_{ik} + \mu\Big(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big), \\ T'_{ik}(v) = \quad q\,\delta_{ik} + \mu\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big) \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Setzt man nun in (1.04) $u_i = v_i$ und wählt man für $u_i$, $p$ Funktionen, die den Gleichungen (1.02) gehorchen, so ergibt sich die „Greensche Energieformel"

$$(1.07)\qquad \int_{Q_{(\omega)}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[T_{ik}(u)\,u_k\right] dQ = -\int_T T_{ik}(u)\,n_k\,u_i\,dT = \int_{Q_{(\omega)}} \left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 - \varrho\,X_k\,u_k\right\} dQ,$$

worin die physikalische Tatsache zum Ausdruck kommt, daß die von den Oberflächenkräften geleistete Arbeit gleich ist der Reibungsarbeit vermindert um die Arbeit der äußeren Kräfte. Der Verfasser erblickt in der heuristischen Bedeutung dieser, keineswegs einzig möglichen[5]), Greenschen Formeln die wahre Ursache, daß es später gelingt, analoge Bildungen der Potentiale von doppelten Flächenbelegungen zu konstruieren, aus denen Integralgleichungen mit „regulärem" Kern hergeleitet werden können, was mit den bisher bekannten, ähnlichen Methoden nicht möglich war[6]).

## § 2.

## Hydrodynamische Potentiale.

Um eine partikulare Lösung von (1.02) zu bekommen, kann man sich bekanntlich des Fundamentaltensors bedienen. Hierunter verstehen wir die Ausdrücke

$$(2.01)\qquad \begin{cases} v_{ik}(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\mu}\left\{\dfrac{\delta_{ik}}{r_{xy}} + \dfrac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r_{xy}^3}\right\} \\ q_k(x,y) = \dfrac{x_k-y_k}{4\pi\, r_{xy}^3}, \end{cases}$$

und die fragliche Lösung lautet[7]):

$$(2.02)\qquad \begin{cases} U_i(x) = \varrho\displaystyle\int_Q v_{ik}(x,y)\,X_k(y)\,dQ, \\ P(x) = \varrho\displaystyle\int_Q q_k(x,y)\,X_k(y)\,dQ. \end{cases}$$

Der Fundamentaltensor entspricht bekanntlich vollkommen der Funktion $1/r_{xy}$ der Potentialtheorie, und wir können den Inbegriff der Funktionen $U_i$, $P$ als *hydrodynamisches Raumpotential* bezeichnen. Es gelten für $(x)+(y)$ die wichtigen Beziehungen

$$(2.03)\qquad \mu\,\Delta_x v_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_i} = 0, \quad \Delta_x q_k = 0,$$

$$(2.04)\qquad \mu\,\Delta_y v_{ik} = -\frac{\partial q_k}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial v_{ik}}{\partial y_i} = 0, \quad \Delta_y q_k = 0,$$

$$(2.05)\qquad v_{ik}(x,y) = v_{ki}(y,x).$$

---

[5]) Man vergleiche a. a. O. [1]), S. 49.

[6]) Man vergleiche C. W. Oseen, Hydrodynamik. Leipzig 1927.

[7]) Dabei müssen $X_k(y)$ gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen. Vgl. unten, Satz I, S. 337.

Ferner haben wir, falls wir mit $v_{ij}$, $q_j$ nach (1.06) die Ausdrücke $T_{ik}(v)_x$ und $T'_{ik}(v)_y$ bilden,

$$(2.06) \qquad -T_{ik}(v)_x = T'_{ik}(v)_y = \frac{3(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{4\pi r_{xy}^5}.$$

Der letzte Ausdruck wird auch mit $T'_{ik}(v;x,y)$ bezeichnet, um die Abhängigkeit zweier Punkte anzudeuten. Die bei den Differentiationsoperatoren angebrachten Indizes deuten den betreffenden Bezugspunkt an.

In Verfolgung eines aus der Potentialtheorie her wohlbekannten Verfahrens betrachten wir nun dasjenige Teilgebiet $Q_0$ unseres Gebietes $Q$, das zwischen der Begrenzungsfläche $T$ und der Fläche einer kleinen Kugel $T_0$ vom Radius $r_0$ rings um einen festen inneren Punkt $(x)$ von $Q$ liegt, und wenden auf $Q_0$ die Formel (1.05) an, indem wir für $v_i$, $q$ die Funktionen $v_{ik}$, $q_k$ als Funktionen von $(y)$ wählen. Für $u_i$, $p$ denken wir uns eine im Bereiche $Q+T$ stetige Lösung der Gleichungen (1.02), für die der Ausdruck $T_{ik}(u)$ am Rande stetig bleibt. Lassen wir dann $r_0$ gegen Null streben, so gibt nur der $T'_{ik}(v)$ enthaltende Teil des über $T_0$ erstreckten Integrals einen von Null verschiedenen Beitrag, und wir bekommen

$$(2.07) \qquad \begin{cases} u_i(x) = \varrho \int\limits_{Q(0)} v_{ik}(x,y)\, X_k(y)\, dQ \\ \qquad\quad -\int\limits_T T_{jk}(u)\, n_k(\eta)\, v_{ij}(x,\eta)\, dT \\ \qquad\quad +\int\limits_T T'_{ik}(v;x,\eta)\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, dT, \end{cases}$$

wobei wir den Quellpunkt von $T$ mit $(\eta)$ bezeichnet haben, und also $T'_{ik}(v;x,\eta)$ nach (2.06) zu bilden ist, indem man $\eta$ für $y$ einsetzt. Um den entsprechenden Ausdruck für $p(x)$ aufschreiben zu können, bemerken wir, daß gemäß (1.06), (2.03) und (2.06)

$$\Delta_x T'_{ik}(v;x,\eta)$$

$$\equiv \Delta_x T'_{ik}(v)_\eta = \Delta_x q_j\, \delta_{ik} - \mu\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta_x v_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_x v_{kj}\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[2\frac{\partial q_j}{\partial x_k}\right],$$

und bekommen somit

$$(2.08) \qquad \begin{cases} p(x) = \varrho \int\limits_{Q(0)} q_k(x,y)\, X_k(y)\, dQ \\ \qquad\quad -\int\limits_T T_{jk}(u)\, n_k(\eta)\, q_j(x,\eta)\, dT \\ \qquad -2\mu \int\limits_T \frac{\partial q_j}{\partial x_k}\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, dT. \end{cases}$$

Falls der Punkt $(x)$ in $Q_{(e)}$ außerhalb der geschlossenen Fläche $T$ liegt, so kommt links in (2.07) und (2.08) die Zahl Null. Die in (2.07) und (2.08) auftretenden Integrale sind offenbar die zweckmäßigen Analoga

der gewöhnlichen Potentiale. In der ersten Zeile der beiden Formeln steht das schon eingeführte hydrodynamische Raumpotential, in der zweiten und dritten entsprechend die *hydrodynamischen Potentiale einfacher* bzw. *doppelter Flächenbelegungen*.

Wir wollen nun, unter Zugrundelegung beliebiger stetiger Flächenbelegungsvektoren $2\psi_j(\eta)$ und $2\varphi_j(\eta)$, die Eigenschaften der hydrodynamischen Potentiale einfacher und doppelter Belegungen einer geschlossenen Fläche $T$ der Klasse $Ah$ studieren. Wir führen für diese Funktionenkomplexe die Bezeichnungen $V_i(x)$, $\Omega(x)$ bzw. $W_i(x)$, $\Pi(x)$ ein und bekommen mit Rücksicht auf (2.01) und (2.06)

$$(2.09)\qquad \begin{cases} V_i(x) = \dfrac{1}{4\pi\mu}\displaystyle\int_T \left\{\frac{\delta_{ij}}{r_{x\eta}} + \frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)}{r_{x\eta}^3}\right\}\psi_j(\eta)\,dT, \\ \Omega(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\displaystyle\int_T \frac{\psi_j(\eta)}{r_{x\eta}}\,dT, \end{cases}$$

$$(2.10)\qquad \begin{cases} W_i(x) = \dfrac{3}{2\pi}\displaystyle\int_T (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\,\varphi_j(\eta)\,\frac{dT}{r_{x\eta}^5}, \\ \Pi(x) = -\dfrac{\mu}{\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\displaystyle\int_T (x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\,\varphi_j(\eta)\,\frac{dT}{r_{x\eta}^3}. \end{cases}$$

Für die letzteren Funktionen werden wir auch die abgekürzte Bezeichnung

$$(2.11)\qquad \begin{cases} W_i(x) = \displaystyle\int_T K_{ij}(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \\ \Pi(x) = \displaystyle\int_T k_j(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT \end{cases}$$

gebrauchen.

Die Funktionenkomplexe $V_i(x)$, $\Omega(x)$ und $W_i(x)$, $\Pi(x)$ sind im ganzen Raume außer der Fläche $T$ selbst analytisch. Aus der Herleitung folgt, daß sie, jeder für sich, den Gleichungen (1.03) gehorchen. $V_i(x)$ durchsetzt die Fläche $T$ stetig. Hingegen weist $W_i(x)$ einen Sprung, ähnlich wie das gewöhnliche Potential einer Doppelbelegung, auf, d. h. es gilt

$$(2.12)\qquad \begin{cases} W_i(\xi)_{(i)} = \quad \varphi_i(\xi) + W_i(\xi) = \quad \varphi_i(\xi) + \displaystyle\int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \\ W_i(\xi)_{(e)} = -\varphi_i(\xi) + W_i(\xi) = -\varphi_i(\xi) + \displaystyle\int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \end{cases}$$

indem wir mit $W_i(\xi)_{(i)}$ und $W_i(\xi)_{(e)}$ die Grenzwerte von $W_i(x)$ bei Annäherung von $(x)$ gegen $(\xi)$ von der inneren bzw. äußeren Seite her verstehen.

Weiter bestätigt man leicht die folgende Eigenschaft, die derjenigen des Gaußschen Integrals in der Potentialtheorie analog ist: Es sei $\varphi_j(\eta) = c_j$

ein konstanter Vektor; alsdann gilt

$$W_i(x) = \begin{cases} 2c_i & \text{für } (x) \text{ in } Q_{(i)}, \\ c_i & \text{„ } (x) \text{ auf } T, \\ 0 & \text{„ } (x) \text{ in } Q_{(e)}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Berechnen wir den Spannungstensor $T_{ik}(V)$ der von $V_i(x)$, $\Omega(x)$ dargestellten Strömung, so ergibt sich nach (2.06)

$$T_{ik}(V) = -\frac{3}{2\pi}\int_T (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\psi_j(\eta)\frac{dT}{r^5_{x\eta}}. \tag{2.14}$$

Speziell ergibt sich dann für die auf die Innen- bzw. Außenwände wirkenden Spannungen $T_{ik}(V)_{(i)}n_k$ und $-T_{ik}(V)_{(e)}n_k$

$$\begin{cases} T_{ik}(V)_{(i)}n_k = -\psi_i(\xi) + \int_T K_{ji}(\eta,\xi)\psi_j(\eta)\,dT, \\ T_{ik}(V)_{(e)}n_k = \quad \psi_i(\xi) + \int_T K_{ji}(\eta,\xi)\psi_j(\eta)\,dT. \end{cases} \tag{2.15}$$

## § 3.

## Eigenschaften der hydrodynamischen Potentiale.

Wir widmen diesen Paragraphen dem Studium der Ableitungen der hydrodynamischen Potentiale und ihrer Stetigkeitseigenschaften.

Um die Gültigkeit einer auf S. 334 gemachten Aussage zu beweisen, hat man auf das hydrodynamische Analogon eines bekannten potentialtheoretischen Satzes von O. Hölder[8]) zurückzugreifen. Wir betrachten die durch eine stetige Funktion $X_k(y)$ nach (2.02) erzeugten Funktionen $U_i(x)$ und $P(x)$ und haben dann:

Satz I. *Ist die Funktion $X_k(y)$ in einem Gebiete $Q$ H-stetig, so existieren die zweiten Ableitungen der Funktion $U_i(x)$ und die ersten Ableitungen der Funktion $P(x)$, und (2.02) im besonderen stellt eine Lösung der Gleichungen (1.02) dar.*

Will man den einem hydrodynamischen Potentiale einer einfachen Flächenbelegung entsprechenden Spannungstensor $T_{ik}(V)$, bzw. beliebige, erste Ableitungen $\partial V_i/\partial x_k$ im Gebiete $Q_{(i)}$ studieren, so zeigt sich, daß die im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen hinsichtlich der Belegungsfunktion nicht ausreichen, um die Stetigkeit am Rande der betreffenden Funktionen zu sichern. Wir beweisen den folgenden Satz, der zugleich $T_{ik}(V)$ und $\partial V_i/\partial x_k$ umfaßt[9]).

[8]) Man vergleiche L. Lichtenstein a. a. O.[4]), wo sich die zugehörige potentialtheoretische Literatur verzeichnet findet.

[9]) Der Beweis des entsprechenden potentialtheoretischen Satzes ist in unserem Beweis enthalten. Vgl. a. a. O.[4]), S. 201, Fußnote [60]).

Satz II. *Der Spannungstensor $T_{ik}(V)$ eines hydrodynamischen Potentials $V_i(x)$ einer mit dem Exponenten $h'$ H-stetigen Belegung $\psi_j(\eta)$ der Fläche $T$ (der Klasse $Ah$) ist im Gesamtbereiche $Q+T$ [10]) H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der beiden Zahlen $h'$ und $h$ ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird für viele ähnliche Untersuchungen dieser Arbeit grundlegend sein. Die späteren Beweise werden zweckmäßige Varianten dieses Beweises sein und können deshalb oft kurz skizziert werden.

Wir beweisen zunächst, daß die Funktion $T_{ik}(V)$ am Rande bestimmte Grenzwerte besitzt. Es genügt dabei das Integral

$$J(x)=\int\limits_{\Sigma_1}\frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)}{r_{x\eta}^5}\,\psi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2\equiv\int\limits_{\Sigma_1}H(x,\eta)\,\psi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu betrachten, wobei $\Sigma_1$ derjenige Teil der Fläche ist, der von einem Kreiszylinder vom Radius $\varrho_1$ um die Flächennormale $N$ als Achse herausgeschnitten wird. $N$ soll dabei durch denjenigen Flächenpunkt $(\xi)$ gehen, gegen welchen wir $(x)$ konvergieren lassen wollen. Wir nehmen $(\xi)$ als Ursprung unseres Koordinatensystems und $N$ als $x_3$-Achse. Falls $\varrho_1$ hinreichend klein fixiert wird, so wird sicher $\psi(\eta)$ eine auf $\Sigma_1$ eindeutige Funktion von $\eta_1$ und $\eta_2$ sein, die $H$-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$ ist.

Man sieht nun, daß man alle vorkommenden Fälle behandeln kann, falls nur die den folgenden fünf Indexkombinationen $i$, $j$, $k$ entsprechenden Integrale erledigt sind:

| $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 3. |

Wir haben uns zuerst davon zu überzeugen, daß der Hauptwert von

$$\overline{H}(x)=\int\limits_{\Sigma_1}H(x,\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 \tag{3.01}$$

existiert, auch wenn $(x)$ gegen $(\xi)$ strebt. Zudem beachten wir die Identitäten $(r\equiv r_{x\eta})$

[10]) Unter der Ausdrucksweise „Stetigkeit usw. in $Q+T$“, die wohl als eingebürgert anzusehen ist, verstehen wir, daß die betreffende Funktion in $Q_{(i)}$ stetig sein soll und darüber hinaus bestimmte Grenzwerte am Rande $T$ besitzen möge. Vgl. a. a. O. [4]), S. 183.

$$(3.02)\quad \begin{cases} \dfrac{(x_1-\eta_1)^3}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}\left[\dfrac{2}{r}+\dfrac{(x_1-\eta_1)^2}{r^3}\right], \\ \dfrac{(x_1-\eta_1)^2(x_3-\eta_3)}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\partial}{\partial \eta_3}\dfrac{1}{r}+\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)}{r^3}\right], \\ \dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)^2}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}\dfrac{(x_3-\eta_3)^2}{r^3}, \\ \dfrac{(x_3-\eta_3)^3}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\partial}{\partial \eta_3}\dfrac{1}{r}-\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)}{r^3}-\dfrac{\partial}{\partial \eta_2}\dfrac{(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^3}\right], \\ \dfrac{(x_1-\eta_1)(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}\dfrac{(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^3}. \end{cases}$$

In denjenigen Gliedern von (3.01), wo Ableitungen nach $\eta_1$ und $\eta_2$ vorkommen, läßt sich partiell integrieren, und es entstehen Kurvenintegrale über die Randkurve $L_1$ von $\Sigma_1$. Diese Kurvenintegrale sind außerhalb der Belegungskurve $L_1$ selbst analytisch. Die übrigen Glieder haben die Form

$$(3.03)\qquad i(x) = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}\, d\eta_1\, d\eta_2 .$$

Wir untersuchen den Hauptwert dieses Integrals, wenn $(x)$ gegen $(\xi)$ strebt. Wir setzen $(x_1-\eta_1)^2+(x_2-\eta_2)^2+x_3^2 = r_0^2$ und haben somit

$$(3.04)\qquad i(x) = \int_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right] d\eta_1\, d\eta_2 + \int_{\Sigma_1}\frac{x_3}{r_0^3}\, d\eta_1\, d\eta_2 \equiv i_1(x)+i_2(x).$$

Es gilt nun unabhängig von der Lage des Punktes $(x)$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right| = \left|(x_3-\eta_3)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)-\frac{\eta_3}{r_0^3}\right| < \frac{C|\eta_3|}{r_0^3} < \frac{C|\eta_3|}{\varrho^3},$$

falls wir $\eta_1^2+\eta_2^2 = \varrho^2$ setzen und den Punkt $(x)$ auf das Innere eines geraden Kreiskegels $Kg$ mit der Spitze in $(\xi)$ um $N$ als Achse vom Öffnungswinkel $2\alpha < \pi$ beschränken. $C$ soll hier und später eine Konstante bedeuten, die in den verschiedenen Ungleichungen verschieden sein kann. Nun gilt für Flächen der Klasse $Ah$

$$|\eta_3| < C\varrho^{1+h},$$

also

$$\left|\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right| < \frac{C}{\varrho^{2-h}},$$

und folglich konvergiert das erste Integral $i_1(x)$ in (3.04) absolut und gleichmäßig, auch wenn $(x)$ gegen $(\xi)$ rückt. Speziell gilt

$$(3.05)\qquad \int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right) d\eta_1\, d\eta_2 = O(\sigma^h),$$

falls $\Sigma_0$ irgendein Teilgebiet von $\Sigma_1$ ist, dessen lineare Abmessung $\sigma$ ist.

Der Hauptwert des zweiten Integrals in (3.04) existiert bekanntlich und ist gleich dem körperlichen Winkel, unter welchem der Kreis $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varrho_1^2$ in der $\eta_1\eta_2$-Ebene von $(x)$ aus beobachtet werden kann.

Betrachten wir nun wieder $J(x)$, so gilt

$$(3.06)\quad J(x) = \psi(\xi)\int_{\Sigma_1} H(x,\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 + \int_{\Sigma_1} H(x,\eta)\,[\psi(\eta) - \psi(\xi)]\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

und das erste Integral besitzt hier, nach der eben durchgeführten Betrachtung, einen wohlbestimmten Grenzwert, wenn $(x)$ gegen $(\xi)$ konvergiert. Unter Benutzung der Abschätzungen

$$(3.07)\qquad \begin{cases} |H(x,\eta)| < \dfrac{C}{\varrho^2}, \\ |\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C\varrho^{\overline{h}} \end{cases}$$

ersieht man, daß auch das zweite Integral in (3.06) absolut und gleichmäßig konvergiert, und daß somit $J(x)$ einen wohlbestimmten *Grenzwert besitzt, wenn* $(x)$, *immer in* $Kg$, *auf beliebige Weise gegen den Randpunkt* $(\xi)$ *heranrücken darf.*

Wir bilden nun die Differenz der Funktionswerte $J(x)$ für zwei Punkte $(x)$ und $(x')$ im Abstande $\sigma$ und in beliebiger Orientierung in der Nähe der Randfläche. Wir verbinden die Punkte $(x)$ und $(x')$ durch eine geradlinige Strecke, deren Mittelpunkt $(\bar{x})$ sei, und ziehen die Flächennormale $N$ durch $(\bar{x})$. Diese möge die Fläche $T$ in $(\bar{\xi})$ durchsetzen. Wir nehmen $(\bar{\xi})$ als Ursprung unseres Koordinatensystems und $N$ als $x_3$-Achse. $\Sigma_1$ sei derjenige Teil der Fläche $T$, der von einem Kreiszylinder $K$ vom Radius $\varrho_1$ um $N$ als Achse herausgeschnitten wird. Gleichfalls sei $\Sigma_0$ der vom koaxialen Kreiszylinder vom Radius $\sigma < \varrho_1$ herausgeschnittene Teil von $T$. Die Lote von den Punkten $(x)$ und $(x')$ auf die $\eta_1\eta_2$-Ebene mögen die Fläche $T$ in $(\xi)$ bzw. $(\xi')$ durchschneiden. Die Tangentenebenen der Fläche in $(\xi)$ und $(\xi')$ mögen $E$ bzw. $E'$ heißen. Der Kreiszylinder $K$ soll dann aus $E$ und $E'$ die Ellipsen $E_k$ und $E_k'$ herausschneiden.

Um zuerst eine Schätzung des Hauptwertes von $\overline{H}(x) - \overline{H}(x')$ zu bewirken, können wir uns nach dem oben Gesagten damit begnügen, die Differenz

$$(3.08)\qquad i(x) - i(x') = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r}\,d\eta_1\,d\eta_2 - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'}\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu betrachten, wo $r$ für $r_{x\eta}$ und $r'$ für $r_{x'\eta}$ steht. Im ersten Integral von (3.08) schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\frac{1}{r_0} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\frac{1}{r_0}\right]$$

und im zweiten

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'} = \frac{\partial}{\partial \zeta_3'}\frac{1}{r_0'} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3'}\frac{1}{r_0'}\right].$$

Hier soll $r_0$ der Abstand von $(x)$ zur Projektion $(\zeta)$ des Punktes $(\eta)$ auf die Ebene $E$ bedeuten, und $r_0'$ eine ähnliche Bedeutung in bezug auf $(x')$ und $(\zeta')$ auf $E'$ besitzen. Die Integrale

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0}\, d\eta_1\, d\eta_2 \quad \text{und} \quad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'}\, d\eta_1\, d\eta_2$$

können nun durch Drehung des Koordinatensystems, so daß die neue $\eta_3$-Achse auf $E$ bzw. $E'$ senkrecht steht, nach Abspaltung von Kurvenintegralen über die Randkurve von $\Sigma_1$, die mit Faktoren von der Größenordnung $\sigma^h$ multipliziert sind, wiederum als körperliche Winkel gedeutet werden. Die Differenz der Integrale wird bis auf Größen der Ordnung $\sigma^h$ gleich der Differenz derjenigen körperlichen Winkel, unter welchen $E_k$ von $(x)$ und $E_k'$ von $(x')$ aus beobachtet werden können. Jene Differenz wird also selbst von der Ordnung $\sigma^h$ sein, da der Winkel zwischen den Ebenen $E$ und $E'$ von dieser Ordnung ist. Wir können also schreiben

$$(3.09)\quad i(x) - i(x') = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\frac{1}{r_0}\right) d\eta_1\, d\eta_2 - \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3'}\frac{1}{r_0'}\right) d\eta_1\, d\eta_2$$
$$+ \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial \zeta_3'}\frac{1}{r_0'}\right] d\eta_1\, d\eta_2 + O(\sigma^h).$$

Man beweist nun leicht, ähnlich wie bei (3.05), daß die beiden ersten Integrale in (3.09) von der Größenordnung $\sigma^h$ sind. Es gilt ferner identisch

$$(3.10)\quad \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3}\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \eta_3}\frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial \zeta_3'}\frac{1}{r_0'}$$
$$\equiv \frac{x_3-\eta_3}{r^3} - \frac{x_3-\zeta_3}{r_0^3} - \frac{x_3'-\eta_3}{r'^3} + \frac{x_3'-\zeta_3'}{r_0'^3} \equiv (x_3 - x_3')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)$$
$$- (x_3' - \eta_3)\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r_0'^3} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_0^3}\right) + \eta_3\left(\frac{1}{r_0'^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) + \frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}$$
$$\equiv \sum_{\substack{m+n=4\\ m,n>0}} \left[(x_3 - x_3')\frac{r_0 - r}{r'^m r_0^n} - (x_3' - \eta_3)\left(\frac{r_0' - r'}{r'^m r_0'^n} - \frac{r_0 - r}{r^m r_0^n}\right) + \eta_3 \frac{r_0 - r_0'}{r_0'^m r_0^n}\right]$$
$$+ \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}\right].$$

Es ist

$$(3.11)\quad \frac{r_0' - r'}{r'^m r_0'^n} - \frac{r_0 - r}{r^m r_0^n} \equiv [(r_0' - r) - (r_0 - r)]\frac{1}{r'^m r_0'^n}$$
$$+ (r_0 - r)\left[\frac{1}{r'^m r_0'^n} - \frac{1}{r^m r_0^n}\right],$$

und

$$(3.12)\quad \frac{1}{r'^m r_0'^n} - \frac{1}{r^m r_0^n} \equiv \left(\frac{1}{r'^m} - \frac{1}{r^m}\right)\frac{1}{r_0'^n}$$
$$+ \left(\frac{1}{r_0'^n} - \frac{1}{r_0^n}\right)\frac{1}{r^m} \equiv \frac{r - r'}{r_0'^n} \sum_{\substack{p+q=m+1\\ p,q>0}} \frac{1}{r'^p r^q} + \frac{r_0 - r_0'}{r^m} \sum_{\substack{p+q=n+1\\ p,q>0}} \frac{1}{r_0'^p r_0^q}.$$

Nun gelten, wie dies sofort eine geometrische Betrachtung lehrt, auf $\Sigma_1 - \Sigma_0$ die folgenden Ungleichungen, unabhängig von der Größe von $\sigma$, auch wenn $(x)$ und $(x')$ sich beliebig der Fläche $T$ herannahen $(\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varrho^2)$

$$(3.13)\quad \begin{cases} |x_3 - x_3'| < \sigma, \\ |\eta_3| < C\varrho^{1+h}, \\ |x_3' - \eta_3| < r', \\ \frac{1}{r}, \frac{1}{r_0}, \frac{1}{r'}, \frac{1}{r_0'} < \frac{C}{\varrho}, \\ |r - r'| < \sigma, \\ |r_0 - r| < C\varrho^{1+h}, \\ |r_0' - r_0| < C(\sigma + \varrho\sigma^h), \\ |(r_0' - r') - (r_0 - r)| < C(\varrho^{1+h}\sigma^h + \varrho^h\sigma). \end{cases}$$

Mit Hilfe von (3.10), (3.11), (3.12) und (3.13) gewinnen wir die Abschätzung

$$(3.14)\quad \left|\frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial\zeta_3}\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial\zeta_3'}\frac{1}{r_0'} - \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}\right]\right| \leqq C\left(\frac{\sigma}{\varrho^{3-h}} + \frac{\sigma^h}{\varrho^{2-h}}\right),$$

gleichmäßig gültig, auch wenn $(x)$ und $(x')$ an $T$ heranrücken würden.

Nun ist

$$\int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}\right] d\eta_1\, d\eta_2$$

als ein Sonderfall des oben auf S. 341 behandelten Integrals von der Größenordnung $\sigma^h$. Führen wir die Abschätzung (3.14) in das letzte Integral von (3.09) ein, so zeigt sich, daß der übrigbleibende Teil dieses Integrals absolut und gleichmäßig konvergent und von der Größenordnung $\sigma^h$ wird. Damit haben wir bewiesen, daß eine Ungleichung der Form

$$(3.15)\quad |\overline{H}(x) - \overline{H}(x')| < C r_{xx'}^h$$

gilt, gleichmäßig in $Q + T$, wobei $h$ der Exponent der Fläche (der Klasse $A\,h$) und $C$ eine Konstante ist, die nur von $h$ und von der Fläche selbst abhängt. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu der Abschätzung von $\delta J = J(x) - J(x')$ zurück.

Es gilt nach (3.06) bei zweckmäßiger Zerlegung der Integrale

$$(3.16)\quad \begin{aligned} \delta J &= \int_{\Sigma_1} [H(x,\eta) - H(x',\eta)]\,\psi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 \\ &\equiv \int_{\Sigma_0} \{H(x,\eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi)] - H(x',\eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi')]\}\,d\eta_1\,d\eta_2 \\ &\quad + [\psi(\xi) - \psi(\xi')]\int_{\Sigma_0} H(x',\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 + \psi(\xi)[\overline{H}(x) - \overline{H}(x')] \\ &\quad + \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} [H(x,\eta) - H(x',\eta)][\psi(\eta) - \psi(\xi)]\,d\eta_1\,d\eta_2 \\ &\equiv \delta J_0 + \delta J_1 + \delta J_2 + \delta J_3, \end{aligned}$$

und wir führen die Abschätzung für die einzelnen Teile von $\delta J$ jedes für sich aus.

Der Symmetrie wegen genügt es bei der Schätzung von $\delta J_0$, das Integral

$$\delta J_0' = \int_{\Sigma_0} H(x, \eta)\,[\psi(\eta) - \psi(\xi)]\,d\eta_1\,d\eta_2$$

allein zu betrachten. Hier gilt wie bei (3.07)

$$|H(x, \eta)| < \frac{C}{r^2} < \frac{C}{\varrho_0^2},$$

$$|\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C\,\varrho_0^{\bar{h}},$$

falls wir $\varrho_0^2 = (\eta_1 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \xi_2)^2$ setzen. Dann ist

$$|\delta J_0'| < C \int_0^{2\sigma} \frac{\varrho_0^{\bar{h}}\,\varrho_0\,d\varrho_0}{\varrho_0^2} = O(\sigma^{\bar{h}}),$$

und daher auch

$$\delta J_0 = O(\sigma^{\bar{h}}). \tag{3.17}$$

Da $\overline{H}(x')$, unabhängig von der Lage von $(x')$, beschränkt bleibt, so gilt ferner

$$\delta J_1 = O(\sigma^{\bar{h}}). \tag{3.18}$$

Aus (3.15) folgt

$$\delta J_2 = O(\sigma^{h}). \tag{3.19}$$

Schließlich gelten auf $\Sigma_1 - \Sigma_0$ die Ungleichungen

$$|H(x, \eta) - H(x', \eta)| < C\,\frac{\sigma}{\varrho^3},$$

$$|\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C\,\varrho^{\bar{h}},$$

falls wir $\varrho^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$ setzen, und damit erhält man

$$|\delta J_3| < C \int_{\sigma}^{\varrho_1} \frac{\sigma\,\varrho^{\bar{h}}\,\varrho\,d\varrho}{\varrho^3} = O(\sigma^{\bar{h}}), \tag{3.20}$$

und endlich aus (3.16) bis (3.20)

$$\delta J = O(\sigma^{\bar{h}}),$$

was zu beweisen war.

Es gelten die folgenden beiden Spezialfälle des Satzes II:

Satz II A. *Der Hauptwert des Integrals* (vgl. (2.11))

$$\int_T K_{ij}(x, \eta)\,d_\eta T$$

*existiert und ist eine in $Q + T$ mit dem Exponenten $h$ der Fläche $T$ (der Klasse $Ah$) H-stetige Funktion von $(x)$.*

Satz II B. *Das hydrodynamische Potential $W_i(x)$ der mit dem Exponenten $h'$ H-stetigen Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ ist im Gesamtbereiche $Q+T$ (der Klasse $Ah$) H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen $h$ und $h'$ ist.*

Wir führen weiter ein paar Sätze an, deren Beweise ähnlich oder gar einfacher als derjenige des eben bewiesenen sind.

Satz III. *Die Funktionen*

$$W_i(\xi) = \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT$$

*und*

$$\overline{W}_i(\xi) = \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \varphi_j(\eta)\, dT$$

*sind auf der Fläche $T$ (der Klasse $Ah$) H-stetig mit dem Exponenten $h$ der Fläche, falls $\varphi_j(\eta)$ auf $T$ schlechthin stetig ist.*

Satz III A. *Falls die Fläche $T$ der Klasse $Bh$ angehört, so gilt für irgend zwei Punkte $(\xi)$ und $(\xi')$ eine Ungleichung der Form*

$$|W_i(\xi) - W_i(\xi')| < C r_{\xi\xi'} |\log r_{\xi\xi'}| \tag{3.21}$$

*und eine entsprechende für $\overline{W}_i(\xi)$.*

Satz IV. *Die Funktionen $W_i(\xi)$ und $\overline{W}_i(\xi)$ besitzen, falls die Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ H-stetig mit dem Exponenten $h'$ ist, auf der Fläche $T$ (der Klasse $Bh$) erste Ableitungen, die ebenfalls H-stetig mit dem Exponenten $h'$ sind.*

Die Beweise der Sätze III und IV unterscheiden sich von demjenigen des Satzes II daran, daß man bei den partiellen Integrationen, die zum Existenzbeweis des Hauptwertes nötig sind, den Aufpunkt $(\xi)$ (der nunmehr im Integrationsgebiet liegt) durch einen kleinen Kreis ausschließen muß. Der Beitrag dieses kleinen Kreises zum Hauptwert verschwindet.

Wir betrachten nun die ersten Ableitungen von $W_i(x)$ in $Q+T$ und behaupten den

Satz V. *Die ersten Ableitungen der Funktion $W_i(x)$ oder aber die Funktionen $T_{ik}(W)$ sind im Bereiche $Q+T$ (der Klasse $Bh$) H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, falls die ersten Ableitungen der Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ auf $T$ H-stetig mit dem Exponenten $h'$ sind, und $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen $h$ und $h'$ ist.*

Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß $(x)$ in der Nähe eines Randpunktes $(\xi)$ liegt, den wir als Ursprung unseres Koordinatensystems wählen, wobei die $x_3$-Richtung mit der Flächennormale in $(\xi)$ zusammenfallen soll. Nach einer ähnlichen Zerlegung der Fläche $T$ wie oben beim Beweise des Satzes II sieht man sofort, daß es darauf ankommt,

die ersten Ableitungen der Funktion

$$(3.22)\quad \int_{\Sigma_1} K_{ij}(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT = \int_{\Sigma_1} (x_i-\eta_i)\,(x_j-\eta_j)\,(x_k-\eta_k)\,\frac{\varphi(\eta)}{r^5}\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu studieren, worin $\varphi(\eta)$ eine mit dem Exponenten $\bar{h}$ $H$-stetig differentiierbare Funktion von $\eta_1$ und $\eta_2$ ist. Es genügt dabei, dieselben Indexkombinationen $i, j, k$ zu betrachten, wie beim Beweise des Satzes II. Dann können wir die Identitäten (3.02) gebrauchen und überall dort, wo nach $\eta_1$ und $\eta_2$ differentiiert ist, partiell integrieren. Die entstehenden Kurvenintegrale über die Randkurve $L_1$ von $\Sigma_1$ sind außer auf $L_1$ selbst analytisch, und für die bei der partiellen Integration rückbleibenden Glieder sind wir auf den Beweis des Satzes II zurückgeführt worden. Ähnlich können wir auch mit den übrigen Gliedern von (3.22) verfahren, wofern es sich um die Ableitungen in die Richtungen $x_1$ oder $x_2$ handelt. Es sind nur noch die Glieder vom Typus

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial^2}{\partial \eta_3^2}\,\frac{1}{r}\,\varphi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu betrachten. Hier benutzen wir die Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_3^2}\,\frac{1}{r} \equiv -\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2}\right]\frac{1}{r}$$

und können dann auch diese Glieder auf die eben auseinandergesetzte Art behandeln. Somit ist der Satz bewiesen.

Satz V A. *Für Flächen der Klasse Bh existiert der Hauptwert von*

$$\int_T \frac{\partial K_{ij}(x,\eta)}{\partial x_m}\,d_\eta T$$

*in $Q+T$ und ist dort H-stetig mit dem Exponenten h der Fläche.*

Beim Durchgang der Fläche $T$ werden die Funktionen $T_{ik}(V)$, $\frac{\partial V_l}{\partial x_m}$, $\frac{\partial W_l}{\partial x_m}$ usw., falls sie in $Q+T$ stetig sind, im allgemeinen gewisse Sprünge erleiden. Wir gehen hierauf nicht weiter ein und beschränken uns darauf, den folgenden von Faxén herrührenden Satz zu erwähnen[11]). Wir betrachten die Werte des Ausdruckes $T_{ik}(W_i(x))\,n_k(\xi)$ für Punkte $(x)$, die auf der Flächennormalen durch den Flächenpunkt $(\xi)$ von $T$ liegen, und behaupten den

Satz V B. *Es gilt, falls die Belegungsfunktion $\varphi_j$ der Fläche $T$ (der Klasse Bh) H-stetig differentiierbar ist, die Limesgleichung*

$$T_{ik}(W)_{(i)}\,n_k(\xi) = T_{ik}(W)_{(e)}\,n_k(\xi).$$

---

[11]) Arkiv f. mat., astr. o. fys. 21 A.

Für die Flächen der Klasse $Ah$ gilt als Analogon eines bekannten Satzes der Potentialtheorie von A. Korn[12]) der folgende

Satz VC. *Für die Werte des Ausdruckes* $T_{ik}[W_i(x)]\,n_k(\xi)$ *in Punkten* $(x)$ *auf der Flächennormale* $n_k(\xi)$ *durch den Flächenpunkt* $(\xi)$ *gilt eine Abschätzung der Form*

$$|r_{x\xi}\,T_{ik}[W_i(x)]\,n_k(\xi)| < C\,r_{x\xi}^{h'}$$

*gleichmäßig gültig für* $(\xi)$ *auf* $T$, *wobei die Belegungsfunktion* $\varphi_j$ *von* $W_i(x)$ *H-stetig mit dem Exponenten* $h'$ *sein soll.*

## § 4.

## Die Stokesschen Randwertaufgaben.

Zur Lösung der ersten Stokesschen Randwertaufgabe für ein Innengebiet $Q_{(i)}$ der Klasse $Ah$ setzen wir an

$$\begin{cases} u_i = W_i(x) \\ p = \Pi(x), \end{cases}$$

und bekommen alsdann bei Benutzung von (2.12) in gewohnter Weise

$$\varphi_i(\xi) + \int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT = u_i(\xi), \tag{4.01}$$

eine „reguläre" Fredholmsche Integralgleichung zur Bestimmung des unbekannten Belegungsvektors $\varphi_i(\xi)$.[13])

Falls wir in (4.01) vor dem Integralzeichen ein Parameter $\lambda$ einführen, so erkennen wir nach (2.12) und (2.15), daß die Gleichung

$$\varphi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT = u_i(\xi) \tag{4.02}$$

der Aufgabe entspricht, eine Funktion $W_i$ so zu bestimmen, daß auf $T$ die Gleichung

$$W_i(\xi)_{(i)} - W_i(\xi)_{(e)} + \lambda\,[W_i(\xi)_{(i)} + W_i(\xi)_{(e)}] = 2u_i(\xi) \tag{4.03}$$

gilt, wogegen die transponierte Gleichung

$$\psi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta,\xi)\,\psi_j(\eta)\,dT = T_{ik}(\xi)\,n_k(\xi) \tag{4.04}$$

der Aufgabe gleichkommt, eine Funktion $V_i$ so zu bestimmen, daß auf $T$ die Gleichung

$$\begin{aligned} T_{ik}(V)_{(e)}\,n_k - T_{ik}(V)_{(i)}\,n_k + \lambda\,[T_{ik}(V)_{(e)}\,n_k + T_{ik}(V)_{(i)}\,n_k] \\ = 2\,T_{ik}(\xi)\,n_k(\xi) \end{aligned} \tag{4.05}$$

---

[12]) A. Korn, Potentialtheorie I, S. 392. Dümmler 1899.

[13]) „Regulär", weil der Kern $K_{ij}(\xi,\eta)$ für $(\xi) \neq (\eta)$ stetig ist und für $(\xi) \to (\eta)$ wie $r_{\xi\eta}^{2-h}$ unendlich wird.

erfüllt ist. Wir haben also ein vollkommenes Analogon zum Problem von Poincaré in der Potentialtheorie.

Man sieht, daß man mit der Gleichung (4.02) für $\lambda = +1$ und $-1$ die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innen- bzw. Außengebiet lösen kann, und daß man entsprechend die zweite Randwertaufgabe durch Gleichung (4.04) für $\lambda = -1$ und $+1$ für das Innen- bzw. Außengebiet beherrscht. Zur vollständigen Erledigung der Randwertprobleme gehört eine Diskussion der Lösungen von (4.02) und (4.04) für die Parameterwerte $\lambda = \pm 1$. Wir werden die Eigenschaften der Resolvente in derselben Art herleiten, wie dies Plemelj im potentialtheoretischen Falle gemacht hat.

Falls wir die Formel (1.07) auf die durch ein hydrodynamisches Potential $V_i$, $\Omega$ einer einfachen Belegung $\psi_i$ der Fläche $T$ dargestellte Strömung anwenden, so ergibt sich einerseits

$$\int_{Q_{(i)}} \frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right]^2 dQ = -\int_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k\, V_i\, dT, \tag{4.06}$$

andererseits, falls wir die Formel (1.07) auf den Raum zwischen $T$ und einer großen Kugel vom Radius $R$ anwenden und dabei das Verhalten der Funktionen $V_i$, $T_{ik}(V)$ für $R \to \infty$ berücksichtigen,

$$\int_{Q_{(e)}} \frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right]^2 dQ = \int_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k\, V_i\, dT. \tag{4.07}$$

Weiter ergibt sich, falls wir die Formel (1.05) auf die hydrodynamischen Potentiale $V_i$, $\Omega$ und $V_i'$, $-\Omega'$ der Belegungsfunktionen $\psi_i$ bzw. $\psi_i'$ der Fläche $T$ anwenden,

$$\int_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k\, V_i'\, dT = \int_T T_{ik}(V')_{(i)}\, n_k\, V_i\, dT, \tag{4.08}$$

und ähnlicherweise für das Außengebiet

$$\int_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k\, V_i'\, dT = \int_T T_{ik}(V')_{(e)}\, n_k\, V_i\, dT. \tag{4.09}$$

Es gelten nun die Sätze:

Satz VI. *Alle Pole der Resolvente sind reell.*

Mit Hilfe der Formeln (4.05) ... (4.09) schließt man, genau so wie bei Plemelj[14]), daß der Ausdruck

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

bei nicht identisch verschwindender Nullösung der Gleichung (4.04) reell sein muß, und also muß auch $\lambda$ reell sein.

---

[14]) Monatshefte f. Math. u. Physik, 15 (1904); vgl. insbesondere die Darstellung bei Goursat, a. a. O. [15]), S. 510.

Satz VII. $\lambda = +1$ *ist ein Pol der Resolvente.*

Es folgt dies einfach daraus, daß die homogene Gleichung (4.04) für $\lambda = 1$ mit der zweiten Gleichung (2.13) identisch ist, falls wir $\psi_i = n_i$ setzen.

Satz VIII. $\lambda = -1$ *ist ein Pol der Resolvente.*

Dies folgt daraus, daß für $\lambda = -1$ die homogene Gleichung (4.02) für $\varphi_i = c_i = \text{konst.}$ mit der zweiten Gleichung (2.13) identisch wird.

Satz IX. *Alle Pole der Resolvente sind dem absoluten Betrage nach größer oder gleich eins.*

Aus der homogenen Gleichung (4.05) erschließen wir

$$\int_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k\, V_i\, dT = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \int_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k\, V_i\, dT,$$

und nach (4.06) und (4.07) müssen die Integrale verschiedene Vorzeichen besitzen und also für $-1 < \lambda < +1$ beide identisch verschwinden. Dann muß nach (4.06) und (4.07) der Ausdruck

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$$

im ganzen Raume identisch verschwinden, und also $V_i$ die Bewegung eines starren Körpers darstellen. Da indessen $V_i$ im Unendlichen verschwindet, so folgt daraus, daß $V_i$ im ganzen Raume verschwinden muß. Nun gilt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \mu \Delta V_i \equiv 0$$

für Punkte, die nicht auf der Fläche $T$ liegen. Also muß $\Omega$ konstante Werte in $Q_{(i)}$ bzw. $Q_{(e)}$ behalten. Da $\Omega$ jedenfalls im Unendlichen verschwindet, so muß $\Omega$ und damit $T_{ik}(V)$ in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden. In $Q_{(i)}$ muß $T_{ik}(V)$ die Form $C\,\delta_{ik}$ mit $C$ konstant haben. Nach (2.15) wäre dann die einzige Möglichkeit einer Nullösung für diese $\lambda$

$$\psi_i = n_i.$$

Da aber diese Lösung dem Parameterwert $\lambda = +1$ gehört, so muß sein: $\psi_i \equiv 0$, d. h. zwischen $-1$ und $+1$ existieren keine Pole der Resolvente.

Satz X. *Für* $\lambda = +1$ *besitzen die homogenen Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *je eine einzige Lösung.*

Nach (4.05) und (4.07) muß der Ausdruck

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden, und $V_i$ also die Bewegung eines starren Körpers darstellen. Da aber $V_i$ im Unendlichen verschwindet, so muß $V_i$

in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden. Nun bleibt $V_i$ beim Durchgang der Fläche $T$ stetig. Also muß der Ausdruck (4.10) auch in $Q_{(i)}$ identisch verschwinden, und $V_i$ auch in $Q_{(i)}$ einerseits die Bewegung eines starren Körpers darstellen, andererseits wegen des Verschwindens am Rande in $Q_{(i)}$ identisch verschwinden. Es muß ferner $\Omega$ in $Q_{(e)}$ verschwinden und in $Q_{(i)}$ konstant bleiben, so daß der Spannungstensor die Form $T_{ik} = C\delta_{ik}$ mit $C$ konstant haben muß. Hieraus folgt unmittelbar, daß die homogene Gleichung (4.04) für $\lambda = +1$ nur die einzige nicht triviale Lösung $\psi_i = n_i$ haben kann, denn gesetzt, es gäbe deren zwei linear unabhängige, $\psi_i$ und $\psi_i'$, dann würden die Spannungstensoren $T_{ik}$ und $T_{ik}'$ dieser Lösungen in $Q_{(i)}$ die Werte $C\delta_{ik}$ und $C'\delta_{ik}$ besitzen, wobei $C$ und $C'$ beide Konstante sein würden. Dann würde man aber zwei Konstanten $\alpha$ und $\alpha'$ derart bestimmen können, daß

$$\alpha C + \alpha' C' = 0$$

und der Spannungstensor $\alpha T_{ik} + \alpha' T_{ik}'$ würde nach (2.15) einer Strömung entsprechen, für die

$$\alpha\psi_i + \alpha'\psi_i' = 0$$

wäre, entgegen der Voraussetzung.

Hierdurch ist in der Tat bewiesen, daß *die erste Stokessche Randwertaufgabe bei Innengebieten der Klasse Ah für alle stetigen Randvektoren* $u_i$, *die der Bedingung*

$$\int_T u_i n_i \, dT = 0 \tag{4.11}$$

*genügen, lösbar ist.* Die Lösung ist durch ein hydrodynamisches Potential einer Doppelbelegung dargestellt, und die betreffende Doppelbelegungsfunktion durch die Fredholmsche Auflösungsformel der Gleichung (4.01) geliefert.

Satz XI. *Alle Pole mit möglicher Ausnahme von* $\lambda = +1$ *sind einfach.*

Denn gesetzt, es sei $\lambda$ ein mehrfacher Pol. Dann würde es zwei nicht identisch verschwindende Funktionen $\psi_i$ und $\psi_i'$ geben[15]), für die

$$\begin{cases} \psi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \psi_j(\eta)\, dT = 0, \\ \psi_i(\xi) + \psi_i'(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \psi_j'(\eta)\, dT = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

gelten würde. Die Plemeljsche Schlußweise ergibt für das der Funktion $\psi_i$ entsprechende hydrodynamische Potential $V_i$ die Bedingung

$$\int_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k V_i \, dT = \int_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k V_i \, dT.$$

---

[15]) Vgl. z. B. E. Goursat, Cours d'Analyse **3**, 2. Aufl., S. 511.

Da aber diese Integrale nach (4.06) und (4.07) verschiedenes Vorzeichen haben müssen, so verschwinden sie beide, und dieser Bedingung kann nur die Nullösung $\psi_i = n_i$ entsprechen. Also muß für $\lambda \neq +1$ $\psi_i$ identisch verschwinden und die Annahme (4.12) führt zum Widerspruch. Ob der Pol $\lambda = +1$ einfach ist oder nicht, läßt sich auf Grund dieses Beweises nicht entscheiden. An dem speziellen Beispiel, wo $T$ ein Kugelkörper ist, wird der Kern unserer Integralgleichung symmetrisch und also auch der Pol $\lambda = +1$ einfach sein. Vergleiche weiter unten, Satz XVII.

Satz XII. *Für $\lambda = -1$ besitzen die homogenen Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *je sechs linear unabhängige Lösungen.*

Zunächst bemerken wir, daß die Gleichung (4.02) für $\lambda = -1$ mit derjenigen Integralgleichung identisch ist, die das Problem des elastischen Gleichgewichts bei gegebenen Oberflächenkräften beherrscht[16]).

Die entsprechende homogene Gleichung lautet

$$(4.13) \qquad \varphi_i(\xi) - \frac{3}{2\pi}\int_T (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)(\xi_k - \eta_k) n_k(\eta) \frac{\varphi_j(\eta)}{r_{\xi\eta}^5} dT = 0,$$

und wir haben beim Satze VIII bewiesen, daß sie durch $\varphi_i = c_i = \text{konst.}$ befriedigt wird. Da es im dreidimensionalen Raume möglich ist, drei linear unabhängige Vektoren anzugeben, so haben wir hier drei linear unabhängige Lösungen $\varphi_{ij}$ $(j = 1, 2, 3)$ der Gleichung (4.13). Weiter gilt, wie man sich durch Einführung eines Polarkoordinatensystems um den Punkt $(\xi)$ vergegenwärtigt, daß die drei Vertikalvektoren des Tensors

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & -(\xi_3 - x_3), & \xi_2 - x_2 \\ \xi_3 - x_3, & 0, & -(\xi_1 - x_1) \\ -(\xi_2 - x_2), & \xi_1 - x_1, & 0 \end{pmatrix}$$

der Gleichung (4.13) befriedigt, wobei $(x)$ ein beliebiger Punkt des Raumes ist.

Man sieht nun, daß die sechs Orthogonalitätsbedingungen

$$(4.14) \qquad \begin{cases} \int_T \varphi_{ij} T_{jk} n_k dT = 0 & (i = 1, 2, 3), \\ \int_T \Phi_{ij} T_{jk} n_k dT = 0 & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

die dafür notwendig sind, daß die inhomogene Gleichung (4.04) für $\lambda = -1$ eine Lösung besitzt, den sechs Gleichgewichtsbedingungen des auf die Oberfläche wirkenden Kräftesystems $T_{jk} n_k$ gleichkommt. Wir erhalten also das Ergebnis:

---

[16]) Vgl. H. Weyl, Rend. Pal. **39** (1915), S. 24, wo ohne Beweis behauptet wird, daß die homogene Gleichung (4.02) für $\lambda = -1$ *wenigstens* die sechs hier mitgeteilten Lösungen besitzt.

*Die zweite Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet einer geschlossenen Fläche $T$ ist nur für solche Kräftesysteme lösbar, die die Resultante Null und das resultierende Moment Null haben.*

Aber noch mehr: Wir werden beweisen, daß die Gleichung (4.13) außer den sechs Funktionen $\varphi_{ij}$, $\Phi_{ij}$ keine weiteren linear unabhängigen Lösungen besitzt. Denn nach (4.06) besitzt das einer Lösung $\psi_i$ der homogenen Gleichung (4.04) entsprechende hydrodynamische Potential $V_i$ die Eigenschaft

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = 0$$

in $Q_{(i)}$, und $V_i$ stellt mithin dort die Bewegung eines starren Körpers dar. Das gilt also im besonderen für unsere sechs gefundenen Lösungen $\psi_{ij}$ und $\Psi_{ij}$, die den Nullösungen $\varphi_{ij}$ und $\Phi_{ij}$ der Gleichung (4.02) entsprechen. Daß die den Funktionen $\psi_{ij}$ und $\Psi_{ij}$ entsprechenden hydrodynamischen Potentiale, $V_{ij}$ $(j = 1 \ldots 6)$, linear unabhängig sein müssen, ersieht man daraus, daß man sonst durch lineare Kombination aus ihnen ein Potential $V_i$ herleiten könne, das in $Q_{(i)}$ und auf $T$ identisch Null wäre und für das die entsprechende Belegungsfunktion folglich nach (4.06), (4.07) und (2.15) verschwände, was eine lineare Kombination unter unseren sechs linear unabhängigen Lösungen $\psi_{ij}$, $\Psi_{ij}$ bedeuten würde. Da aber *jede Funktion* $V_j$, die einer Nullösung von (4.04) entspricht, in $Q_{(i)}$ die Bewegung eines starren Körpers darstellt, so muß sie sich aus den Funktionen $V_{ij}$ linear kombinieren lassen, und die entsprechende Nullösung läßt sich aus den Funktionen $\psi_{ij}$, $\Psi_{ij}$ linear zusammensetzen, was zu beweisen war.

Hat man somit einmal die Funktionen $\psi_{ij}$ und $\Psi_{ij}$ bestimmt, *so kann man direkt durch die entsprechenden Potentiale* $V_{ij}$, $\Omega_j$ *jede stationäre Bewegung eines starren Körpers in einer unendlichen ruhenden Flüssigkeit darstellen.* Es wird die Bewegung durch

$$\begin{cases} V_i = c_j V_{ij}, \\ \Omega = c_j \Omega_j \end{cases} \tag{4.15}$$

mit $c_j$ konstant dargestellt. Die für eine solche Bewegung erforderliche Kraft, d. h. der Widerstand, wird wegen (2.15) proportional sein dem Integrale

$$c_j \int_T \varphi_{ik} \psi_{kj} \, dT, \tag{4.16}$$

und das Widerstandsmoment um den Punkt $(x)$ wird proportional sein

$$c_j \int_T \Phi_{ik} \Psi_{kj} \, dT. \tag{4.17}$$

Da nach Satz XI $\lambda = -1$ ein einfacher Pol der Resolvente ist, *so ist das in* (4.16) *auftretende Integral immer, und das in* (4.17) *auftretende im allgemeinen von Null verschieden*[17]).

Wir weisen darauf hin, daß, durch die obige Bemerkung, daß im Falle eines Kugelkörpers der Kern unserer Integralgleichung symmetrisch wird, es sofort möglich ist, dort die Funktionen $\psi_{ij}$ und $\Psi_{ij}$ aufzuschreiben, wodurch die in (4.15)...(4.17) auftretenden Ausdrücke explizite angebbar sind.

Nunmehr läßt sich leicht beweisen, *daß die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Außengebiet für beliebige stetige Randwerte lösbar ist.* Denn durch Subtraktion eines passenden Vielfachen der Potentiale $V_{ij}$ lassen sich die Randwerte auf $\psi_{ij}$ und $\Psi_{ij}$ orthogonalisieren, und das ist nach der Fredholmschen Theorie die Bedingung dafür, daß die entsprechende inhomogene Integralgleichung (4.02) für $\lambda = -1$ lösbar sein soll.

Die so dargestellte Lösung verschwindet im Unendlichen. Falls die Bewegung der Flüssigkeit dort irgendwie anders (als Rotation und Translation) gegeben ist, so ist die Lösung leicht durch Addition eines in $V_{ij}$, $\Omega_j$ linearen Ausdruckes zu modifizieren. Es ist klar, daß das Verhalten im Unendlichen bekannt sein muß, damit die Aufgabe eindeutig lösbar sein soll, genau so, wie dies bei dem entsprechenden Probleme der Potentialtheorie ist.

Durch die bisherigen Überlegungen dieses Paragraphen dürften die Randwertaufgaben der homogenen Stokesschen Differentialgleichungen für Gebiete der Klasse $Ah$ gelöst sein. Die Sätze II bis V gestatten uns nun, folgende Schlüsse über unsere Lösungen der ersten Stokesschen Randwertaufgabe des Gebietes $Q_{(i)}$ zu ziehen, die für das Folgende wichtig sind. Wir beweisen:

Satz XIII. *Die Nullösungen der Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *sind auf der Fläche T* (*der Klasse Ah*) *H-stetig mit dem Exponenten h der Fläche.*

Es läßt sich z. B. die homogene Gleichung (4.02) schreiben:

$$\varphi_i(\xi) = -\lambda \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT. \tag{4.18}$$

Ihre Lösungen sind sicher nach der Fredholmschen Theorie auf $T$ stetig. Dann folgt aus unserem Satze III, daß das Integral rechts in (4.18) und somit auch die linke Seite auf $T$ $H$-stetig sein muß.

Satz XIV. *Die Nullösungen der Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *sind auf der Fläche T* (*der Klasse Bh*) *H-stetig differentiierbar mit dem Exponenten h der Fläche.*

---

[17]) Vgl. a. a. O. [15]), S. 405.

Aus dem vorigen Satze folgt die $H$-Stetigkeit der Lösungen auf $T$, oder sogar, nach Satz IIIA, daß sie eine Ungleichung der Form (3.21) erfüllen. Sodann folgert man den jetzigen Satz aus dem Satze IV oben. Es würde übrigens leicht sein, einen etwas weiterreichenden Satz zu beweisen.

Satz XV. *Das mit einer Nullösung $\varphi_i$ gebildete hydrodynamische Potential $W_i(x)$ besitzt im Bereiche $Q_{(i)} + T$ (der Klasse $Bh$) erste Ableitungen, die $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sind. Auch der Ausdruck $T_{ik}(W)$ bleibt in $Q_{(i)} + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen XIV und V.

Satz XVI. *Falls die Randfunktion $u_i(\xi)$*[18]) *auf $T$ (der Klasse $Bh$) erste Ableitungen besitzt, die $H$-stetig mit dem Exponenten $h'$ sind, so sind die ersten Ableitungen der Lösung $u_i(x)$ der ersten Stokesschen Randwertaufgabe in $Q_{(i)} + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen $h$ und $h'$ ist.*

Zuerst schreibt man die Integralgleichung (4.02)

$$\varphi_i(\xi) = -\lambda \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT + u_i(\xi)$$

und bekommt dann, ähnlich wie beim Beweise des Satzes XIV, daß $\varphi_i(\xi)$ auf $T$ erste Ableitungen besitzt, die $H$-stetig mit dem Exponenten $h'$ sind. Dann folgt unser Satz unmittelbar aus dem Satze V.

Falls die Randfläche der Klasse $Bh$ angehört, beweisen wir leicht den

Satz XVII. *Der Pol $\lambda = +1$ ist ein einfacher Pol der Resolvente.*

Es genügt zu zeigen, daß das Integral

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT$$

für jede Nullösung der Gleichung (4.01) einen von Null verschiedenen Wert hat. Es gilt nach (2.12)

$$2\varphi_i(\xi) = W_i(\xi)_{(i)} - W_i(\xi)_{(e)} = -W_i(\xi)_{(e)}$$

und somit

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT = -\frac{1}{2} \int_T n_i(\xi)\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT.$$

Nun hat der Spannungstensor $T_{ik}(W)$ in $Q_{(i)}$ notwendig die Form $C\delta_{ik}$ mit $C$ konstant $\neq 0$, und dann ist nach Satz VB

$$T_{ik}(W)_{(i)}\, n_k = C\, n_i(\xi) = T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k$$

---

[18]) Die Randfunktion muß natürlich, falls $\lambda$ ein Eigenwert ist, die für die Lösbarkeit erforderlichen Orthogonalitätsbedingungen erfüllen.

und somit nach (4.20)

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT$$

$$= -\frac{1}{2C}\int_T T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT = -\frac{\mu}{4C}\int_{Q_{(e)}} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\right)^2 dQ \neq 0,$$

was zu beweisen war.

Eindeutigkeit der Lösungen. Es könnte gegen unsere Lösung der ersten Stokesschen Randwertaufgabe der folgende Einwand erhoben werden. Zwar wird die Lösung der Gleichung (4.02) durch die modifizierte Fredholmsche Resolvente geleistet, aber es würde möglich sein, eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung hinzuzufügen, und die Lösung würde demnächst als nicht eindeutig bestimmt erscheinen. Um diesen Einwand zu entkräften, hat man auf die Greensche Energieformel (1.07) zurückzugreifen. Es gelten, analog zu (4.06) und (4.07), die Formeln

$$(4.19)\qquad \int_{Q_{(i)}} \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial W_l}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_l}\right)^2 dQ = -\int_T T_{ik}(W)_{(i)}\, n_k(\xi)\, W_i(\xi)_{(i)}\, dT,$$

$$(4.20)\qquad \int_{Q_{(e)}} \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial W_l}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_l}\right)^2 dQ = \int_T T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k(\xi)\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT,$$

unter der Voraussetzung, daß die Integrale einen Sinn haben. Für die mit den Nullösungen der Gleichung (4.02) gebildeten hydrodynamischen Potentiale $W_i(x)$, $II(x)$ wird dies, nach den Sätzen V und XV sicher der Fall sein, falls die Randfläche der Klasse $Bh$ angehört. Aber es läßt sich dies tatsächlich auch unter allgemeineren Voraussetzungen erschließen. Betrachten wir z. B. dasjenige Teilgebiet $Q'_{(i)}$ von $Q_{(i)}$, das von einer Parallelfläche $T'$ von $T$ im Abstande $l$ dieser Fläche begrenzt wird. Dann gilt für $Q'_{(i)}$ sicher eine der Gleichung (4.19) entsprechende Gleichung, die wir mit (4.195) bezeichnen mögen. Es sind nun auch für Flächen der Klasse $Ah$ die Nullösungen $\varphi_j$ der homogenen Integralgleichungen nach dem Satze XIII $H$-stetig mit dem Exponenten $h$. Da die entsprechende Funktion $W_i(x)$ auf $T$ verschwindet, gilt aber nach den Sätzen IIB und VC für den Integranden des über die Fläche $T'$ erstreckten Integrals in (4.195) eine Abschätzung der Form

$$C \cdot l^h \cdot l^{h-1}$$

mit $C$ konstant, und somit strebt das über $T'$ erstreckte Integral für Flächen der Klasse $Ah$ jedenfalls dann mit $l$ gleichmäßig gegen Null, wenn

$$h > \frac{1}{2}$$

ist. Somit gelten die Gleichungen (4.19) und (4.20) als Limesgleichungen auch für diesen Fall und wir folgern aus dem Verschwinden von $W_i(\xi)_{(i)}$

oder $W_i(\xi)_{(e)}$ auf dem Rande das identische Verschwinden von $W_i(x)$ in $Q_{(i)}$ bzw. $Q_{(e)}$, und die Lösungen der ersten Stokesschen Randwertaufgabe sind somit eindeutig bestimmt worden.

Es ist zu bemerken, daß die Ausnützung einer Maximum-Minimum-Eigenschaft der Lösungen auf dem Rande des Gebietes, die sich bei skalaren Randwertaufgaben so fruchtbar bewährt hat[19]), bei diesen vektoriellen Randwertaufgaben nicht möglich ist.

Bemerkungen über den zweidimensionalen Fall. Wir fügen schließlich ein paar Bemerkungen über den zweidimensionalen Fall zu. Bekanntlich läßt sich dort die erste Stokessche Randwertaufgabe durch Einführung der Strömungsfunktion $\varphi$ auf die biharmonische Randwertaufgabe zurückführen ($\Delta\Delta\varphi = 0$ im Innern einer geschlossenen Kurve, auf welche $\varphi$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ vorzuschreiben sind).

Bei der hier gewählten Darstellung bekommen wir zwischen den räumlichen und ebenen Problemen eine Analogie, die derjenigen zwischen den Funktionen $\frac{1}{r}$ und $\log\frac{1}{r}$ der Potentialtheorie vollkommen parallel läuft. Zunächst lautet der Fundamentaltensor

$$\begin{cases} v_{ij}(x,y) = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\delta_{ij}\log\frac{1}{r_{xy}} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{r_{xy}^2}\right\}, \\ q_j(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\log\frac{1}{r_{xy}}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die entsprechende Greensche Reziprozitätsformel ein, so gewinnen wir die analogen zweidimensionalen Bildungen zu den früher eingeführten hydrodynamischen Potentialen. Das hydrodynamische logarithmische Potential einer Doppelbelegung $(\varphi_1, \varphi_2)$ der Kurve $L$ (der Klasse $Ah$)[20]) mit dem Elemente $dL$ lautet:

$$(4.21)\quad \begin{cases} W_i(x) = \frac{2}{\pi}\int_L (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\frac{\varphi_j(\eta)}{r_{x\eta}^4}\,dL, \quad (i=1, \\ \Pi(x) = -\frac{2\mu}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_L (x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\frac{\varphi_j(\eta)}{r_{x\eta}^2}\,dL. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke eignen sich zur Herleitung einer regulären Fredholmschen Integralgleichung, ähnlich wie im dreidimensionalen Falle. Wenn es sich um die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet $(\lambda = 1)$

---

[19]) Man vgl. L. Lichtenstein, Neuere Entwickl. d. Th. part. Differential-Gleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Enc. Math. Wiss. II C 12, S. 1297 (Leipzig, Teubner 1919); sowie W. Sternberg, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 291.

[20]) Das heißt endliche stetige Kurven mit $H$-stetig variierender Normale.

handelt, so besitzt die homogene, transponierte Gleichung

$$(4.22) \qquad \psi_i(\xi) - \lambda \frac{2}{\pi} \int_L (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)(\xi_k - \eta_k) n_k(\xi) \frac{\psi_j(\eta)}{r_{\xi\eta}^4} d_\eta L = 0$$

als einzige Lösung den Normalvektor $(n_1, n_2)$ der Kurve $L$.

Dagegen lassen sich nicht diejenigen Schlüsse aus den vorigen Seiten unmittelbar übertragen, bei denen von dem Umstande Gebrauch gemacht wurde, daß das hydrodynamische Potential einer einfachen Belegung, das hier lautet:

$$(4.23) \qquad \begin{cases} V_i(x) = \int_L v_{ij}(x, \eta) \psi_j(\eta) d_\eta L, \\ \Omega(x) = \int_L q_j(x, \eta) \psi_j(\eta) d_\eta L, \end{cases}$$

im Unendlichen verschwindet, was ja jetzt nicht mehr zutrifft. Betrachten wir indessen die Gleichung (4.22) für beliebige $\lambda$, multiplizieren wir sie mit $d_\xi L$ und integrieren, so ergibt sich bei Benutzung einer mit (2.13) analogen Formel

$$(4.24) \qquad (1 + \lambda) \int_L \psi_i(\xi) d_\xi L = 0.$$

Also muß das Integral für $\lambda \neq -1$ verschwinden, und dies ist tatsächlich die Bedingung dafür, daß sich $V_i(x)$ nach (4.23) für große $R$ $(x_1^2 + x_2^2 = R^2)$ wie $\frac{1}{R}$ verhalten soll. Dann aber läßt sich der Beweis für $\lambda \neq -1$ genau so wie im dreidimensionalen Falle führen. Speziell ist also die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet einer geschlossenen Kurve der Klasse $Ah$ stets lösbar für stetige Randfunktionen $u_i$, die der Bedingung

$$(4.25) \qquad \int_L u_i n_i dL = 0$$

genügen. Falls wir dieses Resultat mit Hilfe der Strömungsfunktion $\varphi$ interpretieren, so ergibt sich, daß die biharmonische Randwertaufgabe bei Innengebieten stets lösbar ist bei Randkurven der Klasse $Ah$, falls $\varphi$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ eindeutig und stetig und darüber hinaus $\varphi$ stetig differentiierbar auf der Randkurve vorgegeben sind.

Für $\lambda = -1$ besitzt die homogene Integralgleichung genau drei linear unabhängige Lösungen, und die erste Stokessche Randwertaufgabe wird beim Außengebiete nur für solche Randfunktionen lösbar sein, die auf den drei Lösungen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ der Gleichung (4.22) für $\lambda = -1$ orthogonal sind, wofern man verlangt, daß die Lösung im Unendlichen regulär sein soll. Es wird aus ähnlichen Gründen wie im dreidimensionalen Falle das in (4.24) auftretende Integral im allgemeinen nicht verschwinden, und die hydrodynamischen logarithmischen Potentiale der Belegungsvektoren

$\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ werden im Unendlichen logarithmisch unendlich. Es ist dies die mathematische Aufklärung des Paradoxon von Stokes[21]). Seine physikalische Ursache kennen wir nach Lamb, der sie auf die nicht zulässige Vernachlässigung der Oseenschen „halbquadratischen" Glieder in den Differentialgleichungen zurückgeführt hat.

Man sieht, daß unsere Theorie *für die Lösbarkeit der biharmonischen Randwertaufgabe für das Außengebiet einer geschlossenen Kurve drei Integralbedingungen für die Randfunktionen fordert.*

Die zweite Randwertaufgabe für das Innengebiet wird nur dann lösbar sein, falls die Randfunktionen auf zwei beliebige, linear unabhängige, konstante Vektoren und auf den Vektor

$$[-(\xi_2 - x_2), (\xi_1 - x_1)]$$

orthogonal sind, was den drei Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik entspricht.

## § 5.

## Der Greensche Tensor und seine Eigenschaften.

Betrachten wir die Differentialgleichungen (1.02) und versuchen wir dem Problem, diejenige Strömung $u_i, p$ in $Q_{(i)}$ zu bestimmen, die am Rande $T$ (der Klasse $Ah$) verschwindet, durch den Ansatz

$$(5.01) \qquad \begin{cases} u_i(x) = \varrho \int\limits_{Q_{(i)}} G_{ij}(x, y) X_j(y)\, dQ, \\ p(x) = \varrho \int\limits_{Q_{(i)}} g_j(x, y) X_j(y)\, dQ \end{cases}$$

zu genügen. Dabei setzen wir

$$G_{ij}(x, y) = v_{ij}(x, y) - A_{ij}(x, y),$$
$$g_j(x, y) = q_j(x, y) - a_j(x, y),$$

und müssen nach Satz I, um die in (1.02) enthaltenen Differentialoperationen ausführen zu können, zum mindesten voraussetzen, daß die Funktionen $X_j$ in $Q_{(i)}$ $H$-stetig bleiben, falls wir nicht die betreffenden Operationen im Petrinischen Sinne modifizieren wollen. Um die Funktionen $A_{ij}, a_j$ angeben zu können, haben wir die folgende erste Stokessche Randwertaufgabe zu lösen:

$$\text{in } Q_{(i)}: \quad \begin{cases} \mu \Delta_x A_{ij} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

$$\text{auf } T: \quad A_{ij}(\xi, y) = v_{ij}(\xi, y),$$

---

[21]) Siehe Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1916, S. 604.

und diese Aufgabe ist stets lösbar, wofern

$$\int_T v_{ij}(\xi, y)\, n_i(\xi)\, d_\xi T = 0$$

erfüllt ist. Die letzte Bedingung ist aber sicher erfüllt, was sich sofort aus (2.03) durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Gebiet zwischen $T$ und einer ganz in $Q_{(i)}$ gelegenen Kugel um $(y)$ als Zentrum ergibt. Damit ist die Existenz der Funktionen $G_{ij}$, $g_j$ für innere Punkte $(y)$ des Gebietes $Q_{(i)}$ erwiesen. Wir bezeichnen diesen aus $9+3=12$ Elementen bestehenden Funktionenkomplex als *hydrodynamischer Greenscher Tensor* der ersten Randwertaufgabe.

Fassen wir nun zwei Punkte $(y)$ und $(y')$ des Gebietes $Q_{(i)}$ ins Auge, und schalten wir diese Punkte durch kleine Kugeln $\Gamma$ und $\Gamma'$ mit den Radien $\varrho$ und $\varrho'$ aus. Das Gebiet zwischen den Kugeln und der Randfläche $T$ nennen wir $Q_{(\Gamma)}$. Dann genügen die Funktionen $G_{il}(x, y)$, $g_l(x, y)$ bzw. $G_{il'}(x, y')$, $g_{l'}(x, y')$ den homogenen Stokesschen Gleichungen als Funktionen von $(x)$ im Gebiete $Q_{(\Gamma)}$. Wenden wir jetzt die Reziprozitätsformel (1.05) auf das Gebiet $Q_{(\Gamma)}$ an, und nehmen wir für $u_i$, $p$ die erste und für $v_i$, $-q$ die zweite unserer Lösungen, so ergibt sich wegen $G_{il}(\xi, y) = G_{il'}(\xi, y') = 0$ auf $T$

$$0 = \int_{\Gamma+\Gamma'} \{T_{ik}[G_{il}(\eta, y)]_\eta\, n_k\, G_{il'}(\eta, y') - T'_{ik}[G_{il'}(\eta, y')]_\eta\, n_k\, G_{il}(\eta, y)\}\, d_\eta T.$$

Bei der Bildung von $T_{ik}$ bzw. $T'_{ik}$ genügt es jetzt, nur $v_{il}$ und $q_l$ zu berücksichtigen, so daß wir haben

$$0 = \int_{\Gamma+\Gamma'} \{T_{ik}[v_{il}(\eta, y)]_\eta\, n_k\, G_{il'}(\eta, y') - T'_{ik}[v_{il'}(\eta, y')]_\eta\, n_k\, G_{il}(\eta, y)\}\, d_\eta T.$$

Man sieht, daß für $\Gamma$ nur das erste und für $\Gamma'$ nur das zweite Glied des Integranden, wenn $\varrho$ und $\varrho'$ gegen Null konvergieren, einen Beitrag liefern. Eine ähnliche Rechnung wie diejenige, die uns zur Formel (2.07) führte, ergibt

$$G_{ll'}(y, y') = G_{l'l}(y', y), \tag{5.02}$$

wodurch die Symmetrie des Greenschen Tensors zum Ausdruck kommt.

Falls wir mit den Funktionen $G_{ij}$, $g_j$ dieselbe Rechnung ausführen wie diejenige, die uns zu den Formeln (2.07) und (2.08) führte, so ergibt sich bei Benutzung von (5.02) die folgende Darstellung für die Lösung der homogenen ersten Stokesschen Randwertaufgabe:

$$\begin{cases} u_i(x) = \int_T T'_{ik}(G)_\eta\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, d_\eta T, \\ p(x) = -2\mu \int_T \frac{\partial g_j}{\partial x_k}\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, d_\eta T. \end{cases} \tag{5.03}$$

Hier ist $T'_{ik}(G)$ nach (1.06) zu bilden. Vgl. weiter unten, am Ende dieses Paragraphen.

Wir gehen nunmehr zum Studium der Funktionen $A_{ij}$, $a_j$ über. Es gilt dabei die Darstellung

$$(5.04)\qquad \begin{cases} A_{ij}(x,y) = \int\limits_T K_{ik}(x,\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\,d_\xi T, \\ a_j(x,y) = \int\limits_T k_k(x,\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\,d_\xi T, \end{cases}$$

wobei

$$(5.05)\qquad \chi_{kj}(\xi,y) = v_{kj}(\xi,y) + \int\limits_T \Gamma_{kl}(\xi,\eta)\,v_{lj}(\eta,y)\,d_\eta T,$$

und hier ist $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ die für $\lambda = +1$ modifizierte Fredholmsche Resolvente der Integralgleichung (4.02). Sie genügt der Funktionalgleichung

$$(5.06)\qquad \Gamma_{kl}(\xi,\eta) + \int\limits_T \Gamma_{km}(\xi,\zeta)\,L_{ml}(\zeta,\eta)\,d_\zeta T = L_{kl}(\xi,\eta),$$

wobei

$$(5.07)\qquad L_{kl}(\xi,\eta) = K_{kl}(\xi,\eta) - \varphi_k(\xi)\,\psi_l(\eta),$$

und $\varphi_k(\xi)$ bzw. $\psi_l(\eta)$ die zweckmäßig normierten Lösungen der homogenen Integralgleichungen (4.02) und (4.04) für $\lambda = +1$ bedeuten. Nach dem Satze XVII würde die Richtigkeit von (5.07) nur für Flächen der Klasse $Bh$ bewiesen sein. Falls der Satz XVII nicht für Flächen der Klasse $Ah$ Geltung haben würde, so wäre trotzdem (5.07) leicht zu modifizieren, ohne daß im folgenden etwas zu ändern wäre. Die Gleichung (5.06) gegenügt zur Bestimmung der Funktion $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$. Der Kern $L_{kl}(\xi,\eta)$ ist regulär, und eine endliche Anzahl von Iterationen ergibt eine Integralgleichung mit stetigem Kern, die keine Nullösungen besitzt. Somit ist die Existenz und Stetigkeit von $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ gesichert, falls $(\xi) \neq (\eta)$ bleibt. Man sieht ferner, daß eine Ungleichung der Form

$$(5.08)\qquad |\Gamma_{kl}(\xi,\eta)| < \frac{C}{r_{\xi\eta}^{2-h}}$$

besteht, gleichmäßig für $(\xi)$ und $(\eta)$ auf $T$.

Der Satz XIII lehrt, daß $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ als Funktion von $(\xi)$ in jedem den Punkt $(\eta)$ nicht enthaltenden Teilgebiet von $T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ ist. Wir brauchen eine Abschätzung für die Differenz $\Gamma_{kl}(\xi,\eta) - \Gamma_{kl}(\xi',\eta)$ für zwei benachbarte Punkte $(\xi)$ und $(\xi')$ im Abstande $\sigma$ in der Umgebung des Punktes $(\eta)$ auf der Fläche. Es kommt offenbar darauf an, das Integral

$$J(\xi,\eta) - J(\xi',\eta) = \int\limits_{S_1} L_{km}(\xi,\zeta) - L_{km}(\xi',\zeta)]\,L_{ml}(\zeta,\eta)\,d_\zeta T$$

abzuschätzen. Wir wählen unser Koordinatensystem ähnlich wie auf S. 340, indem wir die Flächennormale $N$ durch den Mittelpunkt $(\bar{x})$ der Ver-

bindungsstrecke $(\xi)-(\xi')$ als $x_3$-Achse wählen und den Ursprung dort verlegen, wo $N$ die Fläche durchsetzt. $\Sigma_0$ und $\Sigma_1$ seien diejenigen Teile der Fläche $T$, die von zwei koaxialen Kreiszylindern mit den Radien $\sigma$ bzw. $\varrho_1$ ($\varrho_1$ fix) um $N$ als Achse herausgeschnitten werden. Der Abstand des Punktes $(\eta)$ vom Ursprung soll größer als $2\tau$ sein, und es sei $\tau > \sigma$. Eine Kugel vom Radius $\tau$ um $(\eta)$ als Zentrum schneide aus $T$ das Stück $\Sigma'$ aus. Falls $\tau$ hinreichend klein gewählt worden ist, so werden $\Sigma_0$ und $\Sigma'$, weil außerhalb einander, immer in $\Sigma_1$ liegen.

Beachtet man nun, daß, für eine Fläche der Klasse $Ah$, auf $\Sigma_1-\Sigma_0$ eine Ungleichung der Form ($\eta_1^2+\eta_2^2=\varrho^2$)

$$|K_{km}(\xi,\zeta)-K_{km}(\xi',\zeta)|<C\frac{\sigma}{\varrho^{3-h}}$$

besteht, so ersieht man[22]) bei Abschätzung der Beiträge jedes einzelnen Stückes von $\Sigma_1$ für sich, daß die Beziehung

$$J(\xi,\eta)-J(\xi',\eta)=O\left[\frac{\sigma}{\tau^{3-2h}}+\frac{\sigma^h}{\tau^{3-h}}\right]$$

auf $T$ gültig bleibt. Gleichfalls gilt dann

$$\Gamma_{kl}(\xi,\eta)-\Gamma_{kl}(\xi',\eta)=O\left[\frac{r_{\xi\xi'}}{R^{3-h}}+\frac{r_{\xi\xi'}^h}{R^{2-h}}\right], \tag{5.09}$$

falls die Punkte $(\xi)$ und $(\xi')$ außerhalb eines kreisähnlichen Teilgebietes der Fläche $T$ vom Radius $R$ um den Punkt $(\eta)$ liegen. Die Abschätzung von $\chi_{kj}(\xi,y)$ nach (5.05) läßt sich nun ohne weiteres mit Hilfe von (5.08) und (5.09) bewirken. Wenn es sich um die Schätzung von $\chi_{kj}(\xi,y)-\chi_{kj}(\xi',y)$ handelt, so hat man sich den Punkt $(y)$, weil in $Q+T$, außerhalb einer Kugel um den Ursprung vom Radius $2\tau$ liegend zu denken, und es kann vorkommen, daß das Flächenstück $\Sigma'$ auf Null zusammenschrumpft. Es läßt sich die Schätzung genau wie bei $J(\xi,\eta)-J(\xi',\eta)$ ausführen, und wir bekommen

$$\begin{cases} |\chi_{kj}(\xi,y)|<\dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ |\chi_{kj}(\xi,y)-\chi_{kj}(\xi',y)|<C\left(\dfrac{r_{\xi\xi'}}{R^2}+\dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right). \end{cases} \tag{5.10}$$

Es gelten diese Ungleichungen gleichmäßig für $(\xi)$ und $(\xi')$ auf $T$ und $(y)$ in $Q+T$, doch so, daß bei der letzten Ungleichung $(\xi)$ und $(\xi')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ als Zentrum liegen.

Schließlich betrachten wir (5.04) für zwei Punkte $(x)$ und $(x')$ in unbeschränkter Nähe der Randfläche $T$. Wir können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit in beliebiger gegenseitiger Orientierung auf Geraden durch

---

[22]) Die Durchführung eines ähnlichen, etwas schwierigeren Beweises wird unten S. 364 näher besprochen.

$(\xi)$ bzw. $(\xi')$ verlegen, die parallel mit $N$ sind. Der Punkt $(y)$ liege irgendwo in $Q+T$, so daß $r_{xy}$ bzw. $r_{x'y}$ größer als $R$ ausfallen. Mit Hilfe von (5.10) und dem Satze II A beweist man dann

$$|A_{ij}(x,y)| < \frac{C}{r_{xy}},$$

$$|A_{ij}(x,y) - A_{ij}(x',y)| < C\left(\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right),$$

gleichmäßig gültig in $Q+T$, wofern $(x)$ und $(x')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ als Zentrum liegen.

Wir gehen nunmehr zu den ersten Ableitungen von $A_{ij}(x,y)$ über und legen damit unserer Betrachtung Gebiete der Klasse $Bh$ zugrunde. Um in (5.04) partiell integrieren zu können, müssen wir Abschätzungen für die ersten Ableitungen von $\chi_{kj}(\xi,y)$ aufstellen, die analog zu (5.10) sind. Somit müssen wir die ersten Ableitungen von $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ untersuchen. Nach den Sätzen IV und XIV besitzt $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ für $(\xi)\neq(\eta)$ auf $T$ erste Ableitungen nach $(\xi)$ [23]), die $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sind. Es gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m}\right| < \frac{C}{r_{\xi\eta}^2}. \tag{5.12}$$

Um eine Abschätzung für die Differenz

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi_m'}$$

zu bekommen, hat man, ähnlich wie auf S. 359,

$$\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi',\eta)}{\partial \xi_m'} = \int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial L_{km}(\xi,\zeta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial L_{km}(\xi',\zeta)}{\partial \xi_m'}\right) L_{ml}(\zeta,\eta)\, d_\zeta T$$

zu betrachten. Eine Überlegung in der schon gewohnten Art in Verbindung mit Satz V A ergibt dann

$$\left|\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi',\eta)}{\partial \xi_m'}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \frac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|, \tag{5.13}$$

und also, analog zu (5.09),

$$\left|\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi_m'}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}}{R^3} + \frac{r_{\xi\xi'}|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \frac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|. \tag{5.135}$$

Wir bemerken ferner, daß der Hauptwert des Integrals

$$\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi',\eta)}{\partial \xi_m'}\right) d_\eta T$$

---

[23]) Es gilt dann immer $n_m(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_m} = 0$, $n_m(\xi')\frac{\partial}{\partial \xi_m'} = 0$ usw.

existiert und von der Ordnung $r^h_{\xi\xi'}$ ist. Um dies einzusehen, bemerkt man, daß, gleichmäßig auf $T$,

$$\left|\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m}\right| < \frac{C}{r_{\xi\eta}},$$

und daß mithin die Abschätzung (5.13) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$\left|\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}|\log r_{\xi\xi'}|}{r_{\xi\eta}\, r_{\xi'\eta}} + \frac{r^h_{\xi\xi'}}{\sqrt{r_{\xi\eta}\, r_{\xi'\eta}}}\right|.$$

Diese Ungleichung gilt dann gleichmäßig auf der Fläche $T$ und zeigt, daß das fragliche Integral absolut konvergent und von der Ordnung $r_{\xi\xi'}|\log r_{\xi\xi'}|^2 + r^h_{\xi\xi'}$, d. h. von der Ordnung $r^h_{\xi\xi'}$ ist. Somit existiert auch der Hauptwert des entsprechenden Integrals über

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}$$

und es ist

$$\left|\int_T \left(\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}\right) d_\eta T\right| \leqq C\, r^h_{\xi\xi'}. \tag{5.14}$$

Mit Hilfe von (5.12) bis (5.14) beweist man nun auch, daß das in (5.05) auftretende Integral

$$I(\xi, y) = \int_T \Gamma_{kl}(\xi,\eta)\, v_{lj}(\eta, y)\, d_\eta T$$

für $(\xi) + (y)$ erste Ableitungen nach $(\xi)$ besitzt, und zwar gilt

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m}\right| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ \left|\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m} - \dfrac{\partial I(\xi',y)}{\partial \xi'_m}\right| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \dfrac{r^h_{\xi\xi'}}{R}\right|, \end{cases} \tag{5.15}$$

falls die Punkte $(\xi)$ und $(\xi')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ liegen.

Wir betrachten nun das Integral[24])

$$\frac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m} = \int_T \frac{\partial K_{ik}(x,\xi)}{\partial x_m}\, \chi_{kj}(\xi, y)\, d_\xi T.$$

Dann ist es klar nach (5.05) (5.15) und Satz V, daß die Funktion $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_m}$ für $(x) + (y)$ in $Q + T$ existiert und dort $H$-stetig ist. Um zu untersuchen, wie sie sich verhält, wenn $(x)$ und $(y)$ dicht beieinander am Rande $T$ liegen, haben wir das Integral

[24]) Die Untersuchung von $a_j(x,y)$ ist ganz analog.

$$(5.16)\qquad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5} \cdot n_l(\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\,\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{n_3(\xi)}$$

zu betrachten, wobei wir von der mehrmals gebrauchten Komponentendarstellung Gebrauch machen. Für den linken Faktor des Integranden von (5.16) gilt offenbar $\frac{\partial}{\partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial \xi_m}$. Dann können wir, wie auf S. 339 und 345 partiell integrieren, und es entstehen Kurvenintegrale über die Randkurve von $\Sigma_1$, die für die weitere Untersuchung ausscheiden. Die übrigen Integrale sind von der Form

$$(5.17)\qquad B(x,y) = \int_{\Sigma_1} \frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5}$$

$$\times \left[\nu_1(\xi)\left(\frac{\partial v_{kj}(\xi,y)}{\partial \xi_m} + \frac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m}\right) + \nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\right] d\xi_1\,d\xi_2,$$

wobei $\nu_2(\xi)$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ und $\nu_1(\xi)$ $H$-stetig differentiierbar auf $\Sigma_1$ ist. Dann gilt nach (5.10)

$$(5.18)\qquad \begin{cases} |\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ |\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y) - \nu_2(\xi')\,\chi_{kj}(\xi',y)| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}}{R^2} + \dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

und nach (5.15)

$$(5.19)\qquad \begin{cases} \left|\nu_1(\xi)\,\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m}\right| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ \left|\nu_1(\xi)\,\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m} - \nu_1(\xi')\,\dfrac{\partial I(\xi',y)}{\partial \xi_m'}\right| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

Nun ersieht man leicht, ähnlich wie oben bei der Untersuchung von $A_{ij}$, daß die aus $\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)$ und $\nu_1(\xi)\,\frac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m}$ herrührenden Beiträge zu $B(x,y)$, die wir unter der Bezeichnung $D(x,y)$ zusammenfassen, die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(5.20)\qquad \begin{cases} |D(x,y)| < C\,\dfrac{|\log r_{xy}|}{r_{xy}}, \\ |D(x,y) - D(x',y)| < C\left|\dfrac{r_{xx'}\,|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

gleichmäßig gültig in $Q+T$, falls bloß $(x)$ und $(x')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ als Zentrum liegen. Es bleibt das Integral

$$\int_{\Sigma_1} \left[\frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5}\,\nu_1(\xi)\,n_3(\xi)\right]\left[\frac{(\xi_j-y_j)(\xi_k-y_k)(\xi_m-y_m)}{r_{\xi y}^5}\right]\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{n_3(\xi)}$$

$$\equiv \int_{\Sigma_1} Q_1(x,\xi)\cdot Q_2(\xi,y)\,d_\xi T \equiv E(x,y)$$

zurück, indem wir die in Klammern stehenden Ausdrücke mit $Q_1(x, \xi)$ bzw. $Q_2(\xi, y)$ bezeichnen. Wir behaupten nun die folgenden Ungleichungen

$$(5.21)\qquad \begin{cases} |E(x,y)| < \dfrac{C}{r_{xy}^2}, \\ |E(x,y) - E(x',y)| < \dfrac{C r_{xx'} |\log r_{xx'}|}{R^3}, \end{cases}$$

gleichmäßig gültig in $Q + T$, falls $(x)$ und $(x')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ als Zentrum liegen. Der Deutlichkeit halber soll auf die Herleitung der letzten Ungleichung etwas näher eingegangen werden, zumal die Schlußweise für die bis jetzt behaupteten ähnlichen Abschätzungen (5.09), (5.10), ..., (5.20) maßgebend ist. Es gilt

$$\begin{aligned} E(x,y) - E(x',y) &= \int_{\Sigma_1} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, Q_2(\xi,y)\, d_\xi T \\ &= \int_{\Sigma_0} + \int_{\Sigma'} + \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'}, \end{aligned}$$

und wir schätzen die Beiträge der verschiedenen Integrale jeden für sich. Wir haben

$$(5.22)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma_0} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, Q_2(\xi,y)\, dT \\ &\quad = Q_2(x,y) \int_{\Sigma_0} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, dT \\ &\qquad + \int_{\Sigma_0} Q_1(x,\xi)\, [Q_2(\xi,y) - Q_2(x,y)]\, dT \\ &\qquad - \int_{\Sigma_0} Q_1(x',\xi)\, [Q_2(\xi,y) - Q_2(x',y)]\, dT \\ &\qquad - [Q_2(x',y) - Q_2(x,y)] \int_{\Sigma_0} Q_1(x',\xi)\, dT, \end{aligned}$$

und ferner

$$(5.23)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma'} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, Q_2(\xi,y)\, dT \\ &\quad = [Q_1(x,y) - Q_1(x',y)] \int_{\Sigma'} Q_2(\xi,y)\, dT \\ &\qquad + \int_{\Sigma'} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi) - Q_1(x,y) + Q_1(x',y)]\, Q_2(\xi,y)\, dT, \end{aligned}$$

und schließlich

$$(5.24)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, Q_2(\xi,y)\, dT \\ &= Q_2(x,y) \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, dT \\ &\qquad + \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)]\, [Q_2(\xi,y) - Q_2(x,y)]\, dT. \end{aligned}$$

Es gelten nun die Ungleichungen

$$|Q_1(x,\xi)| < \frac{C}{r_{x\xi}^2}, \quad |Q_2(\xi,y)| < \frac{C}{r_{\xi y}^2},$$

$$|Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)| < \frac{C r_{xx'}}{R_1^3},$$

$$|Q_2(x,y) - Q_2(x',y)| < \frac{C r_{xx'}}{R_2^3},$$

$$|Q_2(\xi,y) - Q_2(x',y)| < \frac{C r_{\xi x'}}{R_2^3},$$

$$|Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi) - Q_1(x,y) + Q_1(x',y)| < \frac{C r_{xx'} r_{\xi y}}{R_3^4}$$

gleichmäßig gültig in $Q+T$, falls $(x)$ und $(x')$ außerhalb einer Kugel um $(\xi)$ vom Radius $R_1$ bzw. $(x),(x')$ und $(\xi)$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R_2$ um $(y)$ liegen. Die letzte Ungleichung gilt sicher für $(\xi)$ auf $\Sigma'$, falls $\tau$ [35]) größer als $R_3$ gewählt wird. Führt man diese Abschätzungen in (5.22) bis (5.24) ein, und bemerkt man, daß, nach dem Satze VA die Hauptwerte

$$\int_{\Sigma_1} Q_1(x,\xi)\, d_\xi T, \qquad \int_{\Sigma_1} Q_2(\xi,y)\, d_\xi T$$

in $Q+T$ existieren und dort sogar $H$-stetig differentiierbar sind, so ergibt sich ohne Schwierigkeit die letzte Ungleichung (5.21). Mit Hilfe von (5.20) und (5.21) erhält man so

$$(5.25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m}\right|, \quad |a_j(x,y)| < \dfrac{C}{r_{xy}^3}, \\ \left|\dfrac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m} - \dfrac{\partial A_{ij}(x',y)}{\partial x'_m}\right| \\ |a_j(x,y) - a_j(x',y)| \end{array} \right\} < C\left|\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^3} + \frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right|.$$

Damit sind wir am Schlusse unserer Untersuchung über den Greenschen Tensor und können zusammenfassen:

Satz XVIII. *Für Gebiete der Klasse Ah gelten die Ungleichungen*:

$$|G_{ij}(x,y)| < \frac{C}{r_{xy}},$$

$$|G_{ij}(x,y)| - G_{ij}(x',y)| < C\left|\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right|,$$

[35]) Es sollen dabei $\Sigma'$ und $\tau$ die entsprechende Bedeutung für den Punkt $(y)$ besitzen wie auf S. 360 in bezug auf den Punkt $(\eta)$.

Satz XIX. *Für Gebiete der Klasse $Bh$ haben wir*

$$\left|\frac{\partial G_{ij}(x,y)}{\partial x_m}\right|, \quad |g_j(x,y)| < \frac{C}{r_{xy}^2},$$

$$\left|\frac{\partial G_{ij}(x,y)}{\partial x_m} - \frac{\partial G_{ij}(x',y)}{\partial x'_m}\right|, \quad |g_j(x,y) - g_j(x',y)|$$

$$< C\left|\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^2} + \frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right|,$$

*gleichmäßig gültig in $Q_{(i)} + T$, falls $(x)$ und $(x')$ außerhalb einer Kugel vom Radius $R$ um $(y)$ als Zentrum liegen. In diesen Formeln sind die Konstanten $C$ nur von der Randfläche $T$ und von $h$ abhängig.*

Schließlich betrachten wir das vermittels einer stetigen Funktion $X_j(y)$ gebildete Integral

$$Y_i(x) = \int_{Q_{(i)}} G_{ij}(x,y)\, X_j(y)\, d_y Q$$

und bekommen sofort mit Hilfe der Sätze XVIII bzw. XIX:

Satz XX. *Bei Gebieten der Klasse $Ah$ ist $Y_i(x)$ in $Q_{(i)} + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$.*

Satz XXI. *Bei Gebieten der Klasse $Bh$ besitzt $Y_i(x)$ in $Q_{(i)} + T$ erste Ableitungen, die $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sind. Gleichfalls ist das Integral*

$$\int_{Q_{(i)}} g_j(x,y)\, X_j(y)\, d_y Q$$

*in diesem Falle $H$-stetig mit dem Exponenten $h$.*

Wichtige Bemerkung. Die strenge Gültigkeit von (5.02) und (5.03) ist nach Satz XIX und also nur für Gebiete der Klasse $Bh$ zu erschließen. Für die Gültigkeit von (5.02) bei Gebieten der Klasse $Ah$ würden die Sätze IIB, VC, XVIII und eine Betrachtung ähnlich derjenigen auf S. 354, die Bedingung $h > \frac{1}{2}$ ergeben. Ein Weg zur Verallgemeinerung der Formeln vom Typus (5.03) auf Gebiete der Klasse $Ah$ findet man bei H. Weyl[26]).

## § 6.

## Die nichtlineare Randwertaufgabe.

Wir betrachten in diesem Paragraphen unsere Hauptaufgabe, das System (1.01) bei vorgegebenen Randwerten $u_i(\xi)$ zu integrieren. Es handle sich dabei um ein Innengebiet $Q$ der Klasse $Bh$. Die Randwerte $u_i(\xi)$ sollen auf der Begrenzungsfläche $T$ $H$-stetig differentiierbar mit dem Exponenten $h'$ sein, und darüber hinaus der Bedingung (4.11) genügen. Die Massenkräfte $X_i$ werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit vernachlässigt.

[26]) Rend. Pal. 39 (1915), S. 14.

In meiner Dissertation habe ich diese Aufgabe so gelöst, daß ich $u_i(x) = u_i'(x) + v_i(x)$, $p(x) = p'(x) + q(x)$ setzte, wobei $u_i'(x)$, $p'(x)$ den Stokesschen Gleichungen (1.02) gehorchen, und $u_i'(x)$ die vorgeschriebenen Randwerte besitzen sollten. Mit Hilfe des Greenschen Tensors wurde dann für die Funktion $v_i(x)$, die auf dem Rande verschwindet, eine Funktionalgleichung aufgestellt, die durch sukzessive Approximation lösbar war. Es läßt sich der Konvergenzbeweis nur für „hinreichend kleine Gebiete" erbringen.

Man kann aber, worauf mich Herr H. Prawitz aufmerksam machte, auch eine entsprechende Funktionalgleichung für $u_i(x)$ selbst aufschreiben, deren Auflösung durch sukzessive Approximationen, wie schon in der Einleitung erwähnt, für beliebige Größe des zugrunde gelegten Gebietes gelingt.

Es gilt in der Tat nach (5.01)

$$u_i(x) = -\varrho \int_Q G_{ij}(x,y)\, u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + u_i'(x), \tag{6.01}$$

$$p(x) = -\varrho \int_Q g_j(x,y)\, u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + p'(x). \tag{6.02}$$

Wir können (6.01) versuchsweise differentiieren

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_l} = -\varrho \int_Q \frac{\partial G_{ij}(x,y)}{\partial x_l} u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + \frac{\partial u_i'(x)}{\partial x_l}, \tag{6.03}$$

denn nach Satz XVI ist $\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}$ in $Q + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen $h$ und $h'$ ist. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_l} = u_{il}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u_{jk}, \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_l} = u_{il}' \quad \text{usw.} \tag{6.04}$$

und haben in (6.01) und (6.03) ein System von zwölf Funktionalgleichungen für die Funktionen $u_i$ und $u_{il}$. Wir können diese Funktionalgleichungen dadurch zu lösen versuchen, daß wir eine Lösung in der Form

$$\begin{cases} u_i(x) = u_i^{(0)}(x) - \varrho\, u_i^{(1)}(x) + (-\varrho)^2 u_i^{(2)}(x) + \dots, \\ u_{il}(x) = u_{il}^{(0)}(x) - \varrho\, u_{il}^{(1)}(x) + (-\varrho)^2 u_{il}^{(2)}(x) + \dots \end{cases} \tag{6.05}$$

ansetzen, das heißt es wird die Lösung nach Potenzen von $-\varrho$ entwickelt. Alsdann bekommen wir die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} u_i^{(0)}(x) = u_i'(x), \qquad u_{il}^{(0)} = u_{il}'(x), \\ u_i^{(n+1)}(x) = \int_Q G_{ij}(x,y) \left[ u_k^{(0)} u_{jk}^{(n)} + u_k^{(1)} u_{jk}^{(n-1)} + \dots + u_k^{(n)} u_{jk}^{(0)} \right] dQ, \\ u_{il}^{(n+1)}(x) = \int_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l} \left[ u_k^{(0)} u_{jk}^{(n)} + u_k^{(1)} u_{jk}^{(n-1)} + \dots + u_k^{(n)} u_{jk}^{(0)} \right] dQ \\ \qquad\qquad (n \geqq 0). \end{cases} \tag{6.06}$$

Die nacheinander gebildeten Funktionen $u_i^{(n+1)}(x)$, $u_{il}^{(n+1)}(x)$ sind alle stetig. Bezeichnen wir das Maximum des absoluten Betrages einer beliebigen Funktion (bzw. eines Vektors oder Tensors) $\chi(x)$ durch Doppelstriche $\|\chi\|$, so gewinnen wir Majoranten der Reihen (6.05) in der Form

$$(6.07)\qquad \begin{cases} U = U(-\varrho) = U_0 - \varrho U_1 + (-\varrho)^2 U_2 + \cdots, \\ V = V(-\varrho) = V_0 - \varrho V_1 + (-\varrho)^2 V_2 + \cdots, \\ \|u_i'\| = U_0, \quad \|u_{il}'\| = V_0, \\ U_{n+1} = G[U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_0], \\ V_{n+1} = G'[U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_0] \\ \qquad\qquad (n \geqq 0), \end{cases}$$

falls wir die Zahlen $G$ und $G'$ mit Hilfe der beliebigen stetigen Funktion $\chi(x)$ folgendermaßen charakterisieren

$$(6.08)\qquad \begin{cases} \left| \int_Q G_{ij}(x, y)\, \chi(y)\, dQ \right| \leqq G \|\chi\|, \\ \left| \int_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l}\, \chi(y)\, dQ \right| \leqq G' \|\chi\|. \end{cases}$$

Die Existenz der Zahlen $G$ und $G'$ steht nach den Sätzen XVIII und XIX fest. Es sollen $G$ und $G'$ die kleinsten (6.08) erfüllenden Zahlen sein. Diese Zahlen sind dann für das Gebiet $Q$ charakteristisch, und ihre Größe ist von der Größe des Gebietes abhängig. Es bleibt nur das Konvergenzgebiet der Reihen (6.07) festzustellen übrig. Man hat

$$\begin{aligned} UV = U_0 V_0 &- \varrho (U_0 V_1 + U_1 V_0) + \cdots \\ &+ (-\varrho)^n (U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_0) + \cdots \end{aligned}$$

und mithin werden die Funktionen $U(-\varrho)$ und $V(-\varrho)$ dem Gleichungssystem

$$(6.09)\qquad \begin{cases} U = U_0 - \varrho G U V, \\ V = V_0 - \varrho G' U V \end{cases}$$

gehorchen. Setzt man hier $UV = W$, so ist

$$W = (U_0 - \varrho G W)(V_0 - \varrho G' W)$$

oder

$$(6.10)\qquad \varrho^2 G G' W^2 - [1 + \varrho (G V_0 + G' U_0)]\, W + U_0 V_0 = 0.$$

Die Funktion $W$ und damit die Funktionen $U$ und $V$ besitzen je einen in der Umgebung von $\varrho = 0$ regulären Zweig, dessen Potenzreihenentwicklung nach $-\varrho$ bis zum nächstgelegenen singulären Punkt der Funktion $W(-\varrho)$ konvergiert. Diesen Punkt erhält man durch Nullsetzen der Diskriminante von (6.10), d. h. aus der Gleichung

$$(6.11)\qquad [1 + \varrho (G V_0 + G' U_0)]^2 - 4 \varrho^2 G G' U_0 V_0 = 0.$$

Die Gleichung (6.11) besitzt zwei reelle negative Wurzeln, deren absolut kleinste den Konvergenzradius der Reihen (6.07) bestimmt. Es ergibt sich Konvergenz, falls die positive Konstante $\varrho$ der Bedingung

$$\varrho < \frac{1}{(\sqrt{G V_0} + \sqrt{G' U_0})^2} \tag{6.12}$$

genügt, wo überall die positive Quadratwurzel gemeint ist.

Man sieht somit, daß es bei gegebenem Gebiet, d. h. *bei gegebenen $G$ und $G'$ immer möglich sein wird, durch Verkleinerung von $U_0$ und $V_0$ zu erreichen, daß die Ungleichung* (6.12) *erfüllt ist, und daß sodann die Reihen* (6.07) *absolut und gleichmäßig konvergieren.* Dann konvergieren die Reihen (6.05) absolut und gleichmäßig und stellen mithin stetige Funktionen $u_i(x)$, $u_{il}(x)$ dar. Da $u'_{il}(x)$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ ist, so muß dies nunmehr nach (6.03) und dem Satze XXI auch mit der Funktion $u_{ii}(x)$ der Fall sein. Dann können wir den Satz I auf unseren Ansatz (6.01), (6.02) anwenden, und somit bestätigen, daß die gesuchte Lösung der gestellten Randwertgabe vorliegt. Da die Zahlen $U_0$ und $V_0$ nur von den Randwerten $u_i(\xi)$ abhängen, und bei den gemachten Voraussetzungen ($H$-Stetigkeit der ersten Ableitungen von $u_i(\xi)$ auf $T$) mit ihnen beliebig klein gemacht werden können, so deckt sich unser jetziges Ergebnis, wie schon in der Einleitung erwähnt, mit dem Resultate der Lichtensteinschen Arbeit.

Wir können der Konvergenzbedingung (6.12) eine physikalisch faßbarere Form geben, falls wir dimensionslose Veränderliche einführen. Es sei $l$ die kleinste lineare Abmessung unseres Gebietes $Q$, die mit dem gleichzeitigen Erfülltsein der Ungleichungen (6.08) verträglich ist, so daß

$$G = \frac{l^2}{\mu}, \qquad G' = \frac{l}{\mu}.$$

Es sei ferner $U$ ein gewisses Geschwindigkeitsmaß, so daß wir setzen können

$$U_0 = U, \qquad V_0 = \frac{U}{l}.$$

Führen wir schließlich durch

$$R = \frac{\varrho l U}{\mu}$$

eine für die Strömung charakteristische, dimensionslose, sogenannte „Reynoldsche" Zahl ein, so wird (6.12) gleichbedeutend mit der einfachen Bedingung

$$R < \frac{1}{4}.$$

Es ist ja allerdings hier hervorzuheben, daß die Zahl $R$ durch ein so kompliziertes Verfahren definiert worden ist, daß es im allgemeinen nicht möglich sein wird, den Zusammenhang dieser Zahl mit den von der experimentellen Forschung für spezielle Fälle eingeführten Reynoldschen Zahlen aufzudecken.

## § 7.

## Auftreten von Verzweigungslösungen.

Bei größeren Reynoldschen Zahlen wird man erwarten müssen, daß funktionale Verzweigungen der Lösungen des Systems (1.01) eintreten werden. Um sie aufzufinden, hat man diejenigen Funktionalgleichungen aufzuschreiben, denen die Differenz $v_i(x)$, $q(x)$ zweier Lösungen $v_i(x)+u_i(x)$, $q(x)+p(x)$ und $u_i(x)$, $p(x)$ der Randwertaufgabe gehorchen. Beide Lösungen erfüllen ein Gleichungssystem vom Typus (6.01), (6.02), also ergibt sich für die Differenz unter Benutzung der abgekürzten Bezeichnungsweise (6.04)

$$(7.01) \qquad v_i(x) = -\varrho \int_Q G_{ij}(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

$$(7.02) \qquad v_{il}(x) = -\varrho \int_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l}\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

$$(7.03) \qquad q(x) = -\varrho \int_Q g_j(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

wo die Funktionen $u_k$, $u_{jk}$ als bekannt anzusehen sind[27]). Auf dieses System läßt sich zwecks Auffinden von Verzweigungslösungen die Theorie von E. Schmidt[28]) anwenden. Aber die physikalisch interessanteste Frage nach dem Vorhandensein *reeller* Verzweigungen bleibt von dieser Theorie zunächst unbeantwortet. Sie hängt mit der Existenz reeller Eigenwerte und Eigenlösungen derjenigen homogenen linearen Integralgleichungen zusammen, die man aus (7.01), (7.02) erhält, indem man die Produktglieder rechts wegstreicht. Wir verweisen auch diese Aufgabe der Weiterforschung und wollen nur einen besonders einfachen Fall angeben, wo tatsächlich *keine reellen Eigenwerte* des Systems (7.01), (7.02) existieren. Der lineare homogene Teil von (7.01), (7.03) lautet

---

[27]) Man denke etwa an die bekannten Lösungen des Systems (1.01), also z. B. an die sogenannten Couetteschen oder Poiseuilleschen Strömungen. Übrigens können die Betrachtungen dieses Paragraphen auch an das System (4.15) meiner Dissertation angeknüpft werden, wodurch die in (7.01) bis (7.04) dieser Arbeit eingehenden Funktionen $u_k$, $p$ nur als Lösungen der Stokesschen Gleichungen angesprochen werden müssen.

[28]) Math. Annalen 65 (1908).

$$(7.04)\qquad \begin{cases} v_i(x) = -\varrho \int\limits_Q G_{ij}(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\,dQ, \\ v_{il}(x) = -\varrho \int\limits_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l}\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\,dQ, \\ q(x) = -\varrho \int\limits_Q g_j(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\,dQ, \end{cases}$$

und die beiden ersten Gleichungen dieses Systems als lineare Integralgleichungen aufgefaßt sind der Fredholmschen Methode zugänglich. Falls diese Gleichungen eine stetige Lösung $v_i(x)$, $v_{il}(x)$ besitzen, so wird sie nach dem Satze XXI in $Q+T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sein, und dann wird nach dem Satze I das Gleichungssystem (7.04) gleichbedeutend sein mit

$$(7.05)\qquad \mu \Delta v_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} + \varrho\left(v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right), \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Trägt man (7.05) in (1.07) ein, so ergibt sich

$$(7.06)\qquad \int\limits_Q \left\{ \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + \varrho\, v_i \left(v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\right\} dQ = 0,$$

da ja die Funktion $v_i$ auf dem Rande $T$ verschwindet. Hier läßt sich, da $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ ist, das letzte Glied

$$v_i u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v_i^2}{2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k \frac{v_i^2}{2}\right)$$

durch partielle Integration wegschaffen, und wir haben nach einer leichten Umformung

$$(7.07)\qquad \int\limits_Q \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + \varrho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) v_i v_k \right\} dQ = 0.$$

Wenn die rechts im Integranden von (7.07) stehende quadratische Form in $v_i$ positiv definit ist, so besitzt das Eigenwertproblem (7.05) und damit auch (7.04) für alle reellen $\varrho$ keine Lösung $v_i \not\equiv 0$. Wir erwähnen nur den naheliegendsten Fall: Wenn für die Grundbewegung $u_i$, $p$ der Ausdruck

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0$$

ist, d. h. falls $u_i$ die Bewegung eines starren Körpers darstellt, so wird (7.07) nur für $v_i \equiv 0$ erfüllbar[29]). Es existieren somit in diesem Falle keine reellen Verzweigungen der Lösung $u_i$, $p$ der Gleichungen (6.01), (6.02) bzw. des Systems (1.01).

[29]) Dann lassen sich die Gleichungen (7.05) bei beliebigen, $H$-stetig differentiierbaren, der Bedingung (4.11) genügenden Randwerten integrieren. Denn zerlegt man die Funktionen $v_i$, $q$ in je zwei, von denen die ersten die entsprechende Stokessche Randwertaufgabe lösen, so bekommen wir für die anderen ein inhomogenes

(Fortsetzung der Fußnote [29]) auf nächster Seite.)

## § 8.

## Nichtstationäre Bewegungen. Stabilität.

Bei der Betrachtung nichtstationärer Bewegungen einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit hat man links in der ersten Gleichung (1.01) die zeitliche Ableitung $-\varrho\frac{\partial u_i}{\partial t}$ einzuführen. Zu den Randwerten, die nunmehr, wie auch die Randfläche $T$ selbst, von $t$ abhängen, treten gewisse, etwa für $t=0$ gültige Anfangsbedingungen. Hier soll auf dieses schwierige Problem nur in dem einfachen Falle eingegangen werden, wo einerseits die Randwerte $u_i(\xi, t)$ und die Randfläche $T$ von der Zeit $t$ unabhängig[30]) sind und andererseits die Produktglieder vernachlässigt werden. Dann können wir gleichwohl das folgende Problem betrachten: Man bestimme $u_i(x, t)$, $p(x, t)$ in einem Innengebiete $Q$ (der Klasse $Ah$), so daß

$$(8\,01)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mu\,\Delta u_i - \varrho\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \ \ldots \end{array}\right\} \text{in } Q \text{ für } t>0. \\ u_i(\xi, t) \equiv 0 \text{ auf } T, \\ u_i(x, 0) = u_i^{(0)}(x) = \text{gegebener Funktion in } Q. \end{array}\right.$$

Man setzt dann, wie gewöhnlich,

$$(8.02)\qquad u_i(x, t) = v_i(x)\, e^{-\lambda t}, \qquad p(x, t) = q(x)\, e^{-\lambda t},$$

wobei $v_i(x)$ und $q(x)$ von $t$ unabhängig sein sollen. Hierdurch wird man auf das hydrodynamische „Schwingungsproblem" geführt:

$$(8.03)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mu\,\Delta v_i + \varrho\,\lambda\, v_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \ \ldots \end{array}\right\} \text{in } Q, \\ v_i(\xi) = 0 \text{ auf } T. \end{array}\right.$$

---

System von Integralgleichungen vom Typus (7.04), welches in diesem Falle für beliebige reelle $\varrho$ lösbar ist. Unter diesen Lösungen befinden sich die Lösungen der ersten Randwertaufgabe für die bekannten Oseenschen Differentialgleichungen, die für Außen- und Innengebiete von Faxén, a. a. O.[3]) ausführlich behandelt worden sind. Unsere hiesige Lösung bezieht sich allerdings auf das hier weniger interessante Innengebiet. Es befindet sich aber unter unseren Lösungen auch die der folgenden, mit der Oseenschen analogen Aufgabe: Man bestimme unter Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder" die von einem eingetauchten Körper in einer rotierenden Flüssigkeit hervorgerufene Bewegung.

[30]) Ein Weg zur Verallgemeinerung ähnlicher Betrachtungen, wie die folgenden, auf den Fall zeitlich veränderlicher Randwerte ist von Herrn A. Korn, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 1927, S. 353, vorgeschlagen worden.

Zur Lösung dieser Aufgabe eignet sich der Greensche Tensor, indem wir ja ansetzen können:

$$v_i(x) = \lambda \varrho \int_Q G_{ij}(x, y)\, v_j(y)\, d_y Q, \tag{8.04}$$

$$q(x) = \lambda \varrho \int_Q g_j(x, y)\, v_j(y)\, d_y Q. \tag{8.05}$$

In der Gleichung (8.04) haben wir eine Integralgleichung mit regulärem, symmetrischem Kern. Der Kern ist nach dem Satze XVIII quadratisch integrierbar, und es wird somit die bekannte Hilbertsche Theorie anwendbar. Insbesondere besitzt die Gleichung (8.04) eine abzählbare Folge von Eigenwerten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

und zugehörige Eigenfunktionen

$$v_i^{(1)}(x),\ v_i^{(2)}(x),\ \ldots,$$

die ein orthogonales und normiertes Funktionensystem ausmachen, d. h. wir haben

$$\int_Q v_i^{(m)}(y)\, v_i^{(n)}(y)\, d_y Q = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Es läßt sich ferner jede Funktion $w_i(x)$, die vermittels einer stetigen Funktion $h_i(x)$ quellenmäßig dargestellt werden kann,

$$w_i(x) = \int_Q G_{ij}(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q, \tag{8.06}$$

in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form

$$w_i(x) = \sum_m v_i^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, w_j(y)\, d_y Q \tag{8.07}$$

entwickeln.

Aus (8.04) und dem Satze XX folgt nun, daß die Eigenfunktionen $v_i^{(n)}(x)$ in $Q + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h$ sein müssen. Somit folgt aus dem Satze I, daß (8.04) und (8.05) in $Q$ zwei- bzw. einmal differentiiert werden können. Falls wir mit $q^{(n)}(x)$ den, gemäß (8.05), zu $v_i^{(n)}(x)$ gehörigen Druck bezeichnen, so ist es klar, daß die Randwertaufgabe (8.03) für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ durch die Funktionenkomplexe

$$v_i^{(1)}(x),\ v_i^{(2)}(x),\ \ldots,$$

$$q^{(1)}(x),\ q^{(2)}(x),\ \ldots$$

gelöst wird.

Es sollen nun die Anfangswerte $u_i^{(0)}(x)$ die Eigenschaften

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad Q,$$

$$u_i^{(0)}(\xi) = 0 \quad \text{auf} \quad T$$

besitzen, und darüber hinaus soll eine Funktion $p^{(0)}(x)$ existieren, so daß die Funktion

$$\mu \Delta u_i^{(0)} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = -h_i(x) \not\equiv 0 \tag{8.08}$$

in $Q + T$ $H$-stetig mit dem Exponenten $h'$ ist. Dann gilt identisch in $Q$

$$u_i^{(0)}(x) = \int_Q G_{ij}(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q,$$

$$p^{(0)}(x) = \int_Q g_j(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q,$$

denn auf die rechten Seiten lassen sich nach Satz I die in (8.08) enthaltenen Differentiationsoperationen ausführen. Nach dem obigen Entwicklungssatz gilt

$$u_i^{(0)}(x) = \sum_m v_i^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q. \tag{8.09}$$

Es sind nun sämtliche Eigenwerte $\lambda_n > 0$. Denn führt man (8.03) in (1.07) ein, so kommt

$$\int_Q \left\{ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \varrho \lambda v_i^2 \right\} dQ = 0,$$

und hieraus folgt, daß $v_i \not\equiv 0$ nur für $\lambda > 0$ möglich ist. Wir können dann die Ausdrücke

$$\begin{cases} u_i(x, t) = \sum_m e^{-\lambda_m t} v_i^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q, \\ p(x, t) = \sum_m e^{-\lambda_m t} q^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q \end{cases} \tag{8.10}$$

bilden, und es ist klar, daß die Reihen für jeden Wert von $t \geqq t_1$ $(t_1 > 0)$ gleichmäßig konvergieren. Die Reihen können gliedweise differentiiert werden, und die Differentialgleichungen (8.01) sind erfüllt. In der ersten Gleichung (8.10) können wir zur Grenze $t \to 0$ gehen und haben nach (8.09)

$$\lim_{t=0} u_i(x, t) = u_i^{(0)}(x).$$

Es wird somit durch (8.10) in der Tat die Aufgabe (8.01) gelöst.

Betrachten wir schließlich die auf eine Grundbewegung $\bar{u}_i(x)$, $\bar{p}(x)$ — Lösung der in § 6 gelösten Randwertaufgabe — superponierten kleinen Schwingungen $u_i(x, t)$, $p(x, t)$, die den Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho \left( u_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

gehorchen und auf dem Rande $T$ (der Klasse $Bh$) verschwinden, so können wir wiederum den Ansatz (8.02) machen und gelangen zur Auf-

gabe, $v_i(x)$, $q(x)$ so zu bestimmen, daß

$$(8.12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu\,\Delta v_i - \varrho\left(\bar{u}_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right) + \varrho\,\lambda\, v_i = \dfrac{\partial q}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \ \ldots \\ v_i(\xi) = 0 \ \text{ auf } \ T. \end{array}\right\} \text{ in } Q,$$

Mit Hilfe des Greenschen Tensors bekommt man wieder eine Fredholmsche Integralgleichung, dessen Kern zwar regulär, aber jetzt nicht mehr symmetrisch ist. Das Hauptinteresse knüpft sich an die Frage, ob der Realteil der Eigenwerte positiv ist, denn in diesem Falle wird eine Störung, die etwa für $t = 0$ einsetzt, allmählich abklingen, d. h. die Lösung $\bar{u}_i$, $\bar{p}$ stabil sein. Wir denken uns jetzt die Funktionen $\bar{u}_i$ mit einem neuen Parameter $\varepsilon$ multipliziert. Der Kern der Integralgleichungen wird somit ein linearer Ausdruck in $\lambda$ und $\varepsilon$ sein. Die homogenen Gleichungen werden dann im allgemeinen Eigenwerte sowohl in bezug auf $\lambda$ als auf $\varepsilon$ aufweisen. Die Fredholmsche Determinante wird eine ganze Funktion von den beiden Parametern sein. Es werden dann die Nullstellen der Determinante in bezug auf $\lambda$ gewisse stetige Funktionen von $\varepsilon$ sein. Für $\varepsilon = 0$ haben wir eben bewiesen, daß sämtliche Eigenwerte $\lambda$ reell und positiv sind. Es wird dann immer möglich sein, eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ so zu bestimmen, daß die Realteile aller Eigenwerte positiv ausfallen, sobald $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ ist. Es bedeutet dies, daß, falls $|\bar{u}_i|$, $\left|\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right|$ hinreichend klein sind, so werden sämtliche Eigenwerte positiven Realteil besitzen, d. h. die Grundbewegung stabil sein.

(Eingegangen am 26. April 1929.)

# Untersuchung der dynamischen Stabilität der Bewegung im Falle $U = r^6$.

Von

Ludwig Sachs in Breslau.

---

In Band 27, Heft 4, S. 496 ff. Math. Zeitschr. hatten wir uns mit einigen Fällen der Zentralbewegung befaßt, die auf elliptische Funktionen führen. Bei der Untersuchung der dynamischen Stabilität der betreffenden Bewegungen insbesondere traten eigenartige Ungleichungen zwischen den Weierstraßschen Transzendenten $\omega$ und $\eta$ auf, in deren Beweisen die Hauptschwierigkeiten der vollständigen Erledigung der Probleme lagen. Wenn wir nun durch die folgende Darstellung den Fall $U = r^6$ als besonders bemerkenswert herausgreifen, so ist der Grund ein zweifacher. Zunächst tritt hier wie in dem an der angegebenen Stelle erwähnten Fall $U = -r^6$ die Bedeutung der besonderen Weierstraßschen Umkehrmethode in hohem Grade hervor, da der Radikand des elliptischen Differentials ein irreduzibles Polynom vierten Grades ist. Dann ist die Ungleichung, die zur Entscheidung über die Existenz der konjugierten Punkte und die Art der dynamischen Stabilität hergeleitet werden muß, diesmal nicht eine solche zwischen den Größen $\omega$ und $\eta$, sondern es treten hier die Größen $v$ und $\zeta v$ auf, wo $v$ eine Nullstelle der Funktion $\wp(u/g_2, g_3)$ ist, und zwar wird hier gezeigt, daß im Falle $g_2 < 0$, $g_3 < 0$, also $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$ der Ausdruck

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial g_3} = \frac{9}{2} g_3 \zeta v - \frac{1}{4} g_2^2 v + \frac{3}{2} g_2 \wp' v$$

stets negativ ist.

Die Extremalen erfüllen im Falle $U = r^6$ die Differentialgleichung

$$d\varphi = \frac{c\, d\varrho}{2\varrho \sqrt{\varrho^4 + h\varrho - c^2}} \qquad (\varrho = r^2). \tag{1}$$

Die Integration liefert als Darstellung der Extremalen:

$$r = \sqrt{\zeta\left(\frac{v}{2}+\alpha\right)+\zeta\left(\frac{v}{2}-\alpha\right)-\zeta v} = r(\alpha, c, b),$$

$$\varphi = \frac{i}{2}\left[\ln\frac{\sigma\left(\frac{v}{2}+\alpha+u_1\right)}{\sigma\left(\frac{v}{2}+\alpha+u_2\right)}+\alpha(\xi u_2-\xi u_1)\right]+\frac{\pi}{2}+b = \varphi(\alpha, c, b), \tag{2}$$

wo

$$g_2 = -c^2, \qquad g_3 = -\frac{h^2}{16},$$
$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = -\frac{1}{256}[256 c^6 + 27 h^4] < 0, \tag{2a}$$

$$\wp v = 0, \qquad \wp u_1 = i\frac{c}{2}, \qquad \wp u_2 = -i\frac{c}{2},$$
$$\wp' v = \wp' u_1 = \wp' u_2 = \frac{h}{4} = \sqrt{-g_3}, \tag{2b}$$
$$-\frac{v}{2} \leqq \alpha \leqq +\frac{v}{2}.$$

Die Geraden $\varphi\left(-\frac{v}{2}\right)$ und $\varphi\left(+\frac{v}{2}\right)$ sind die Asymptoten der Extremalen, indem für $\alpha = \pm\frac{v}{2}$ der Radiusvektor $r$ unendlich groß ist. Die Gerade $\varphi = b$ ist die Symmetrale der Bahnkurve, und zwar ist das entsprechende Argument $\alpha = 0$, für das $r$ seinen kleinsten Wert $r_0 = \sqrt{2\zeta\frac{v}{2}-\zeta v}$ annimmt. Der Winkel, den die Asymptoten miteinander bilden, ist

$$\psi = i\left[\ln\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1}+\frac{v}{2}(\zeta u_2-\zeta u_1)\right].$$

Als Elemente der Funktionaldeterminante erhält man:

$$r_a = \frac{1}{2r}[\wp d - \wp s], \qquad \wp_a = \frac{c}{2\varrho} \qquad \left(s = \frac{v}{2}+\alpha, \quad d = \frac{v}{2}-\alpha\right).$$

$$\Delta r_c = -\frac{c}{r}\left[\frac{9}{2}g_3 A + \frac{g_2^2}{4}B - \frac{3}{4}g_2\wp' v\cdot\varrho^2\right],$$

$$\Delta\varphi_c = -\left\{\frac{9 g_2 g_3[\zeta s-\zeta d]-g_2^3\alpha}{4\varrho} - \frac{3}{4}g_2^2\wp' v\cdot\alpha + \frac{27}{4}g_3\wp' v[\zeta s_1+\zeta s_2]\right\},$$

$$A = \wp s\left[\zeta s - \frac{1}{2}\zeta v\right] + \wp d\left[\zeta d - \frac{1}{2}\zeta v\right] + \frac{1}{2}\left[\wp' s + \wp' d - \wp' v\right],$$

$$B = \varrho + \alpha[\wp d - \wp s], \qquad s_1 = \frac{v}{2}+\alpha+u_1, \qquad s_2 = \frac{v}{2}+\alpha+u_2,$$

$$r_b = 0, \qquad \varphi_b = 1.$$

Aus

$$\Delta\varphi_c = -\left\{\frac{9\,g_2 g_3[\zeta s-\zeta d]}{4\varrho} - \frac{g_2^3\cdot\alpha}{4\varrho} - \frac{3}{4}g_2^2\wp' v\cdot\alpha + \frac{27}{4}g_3\wp' v[\zeta s_1+\zeta s_2]\right\},$$

$$-\varphi_\alpha\frac{\Delta r_c}{r_\alpha} = -\left\{\frac{9\,g_2 g_3 A}{2\varrho[\wp d-\wp s]} + \frac{g_2^3 B}{4\varrho[\wp d-\wp s]} - \frac{3g_2^3\wp' v\cdot\varrho^2}{4\varrho[\wp d-\wp s]}\right\}$$

folgt

$$-\Delta\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)} = -\left[\Delta\varphi_c - \frac{\varphi_\alpha\Delta r_c}{r_\alpha}\right] = \frac{9\,g_2 g_3}{4\varrho[\wp d-\wp s]}\{[\zeta s-\zeta d][\wp d-\wp s]+2A\}$$

$$+\frac{g_2^3}{4\varrho[\wp d-\wp s]}\{B-\alpha[\wp d-\wp s]\} - \frac{3}{4}g_2^3\wp' v\cdot\alpha - \frac{3g_2^3\wp' v\cdot\varrho^2}{4\varrho[\wp d-\wp s]}$$

$$+\frac{27}{4}g_3\wp' v[\zeta s_1+\zeta s_2],$$

und hieraus, da

$$[\zeta s-\zeta d][\wp d-\wp s]+2A = -[\varrho^3+3\wp' v], \qquad B-\alpha[\wp d-\wp s]=\varrho,$$

$$\Phi(\alpha) = -4\Delta\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)}$$

$$= \frac{g_2^3\varrho - 3g_2^2\wp' v\cdot\varrho^2 - 9g_2 g_3\varrho^3 - 27g_2 g_3\wp' v}{\varrho[\wp d-\wp s]} + 27g_3\wp' v[\zeta s_1+\zeta s_2] - 3g_2^2\wp' v\cdot\alpha.$$

Eine etwas umfangreiche Rechnung, in der gewisse Identitäten eine Rolle spielen, wie etwa die bei der Integration auftretende

$$[\wp d-\wp s]^2 \equiv \varrho^4 + 4\varrho\wp' v + g_2,$$

sowie die aus der bekannten Beziehung

$$\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v} = \frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp'(u+v)}{\wp u-\wp(u+v)} = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u+v)+\wp' v}{\wp v-\wp(u+v)} = \zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v$$

hervorgehende

$$2\varrho = -\frac{\wp' d+\wp' v}{\wp d} = \frac{\wp' s-\wp' d}{\wp d-\wp s} = -\frac{\wp' s+\wp' v}{\wp s}$$

liefert

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = 2[-\Delta]\frac{[\varrho^3+4\wp' v]}{[\wp d-\wp s]^2}.$$

Aus Realitätsgründen ist

$$\varrho^4+4\varrho\wp' v+g_2>0,$$

also

$$\varrho^3+4\wp' v > -\frac{g_2}{\varrho} > 0$$

wegen

$$g_2<0$$

sowie

$$\Delta<0.$$

Demnach gilt

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}>0.$$

Die Funktion $\Phi(\alpha)$ steigt daher stets monoton, falls $\alpha$ das Intervall von $-\frac{v}{2}$ bis $+\frac{v}{2}$ durchläuft.

Für die weitere Diskussion der Funktion $\Phi(\alpha)$ erweist sich eine Umformung des Ausdrucks

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_1\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_2\right)$$

als notwendig, die im folgenden ausgeführt wird.

Man hat

$$\zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_1\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_2\right) = \zeta(s + u_1) + \zeta(s + u_2),$$

wo

$$s = \frac{v}{2} + \alpha.$$

Hieraus folgt

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = 2\zeta s + \zeta u_1 + \zeta u_2 + \frac{1}{2}[\wp' s - \wp' v]\left[\frac{1}{\wp s - \wp u_1} + \frac{1}{\wp s - \wp u_2}\right],$$

und es ist

$$\wp(u_1 + u_2) = -[\wp u_1 + \wp u_2] + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\right]^2 = 0,$$

$$\wp v = 0,$$

also zunächst

$$u_1 + u_2 \equiv \pm v, \qquad u_2 \equiv (u_1 \mp v).$$

Welches Vorzeichen zutrifft, damit

$$\wp' u_1 = \wp' u_2 = \wp' v$$

zutrifft, muß noch ermittelt werden.

Aus

$$\wp' u_2 = -\wp'(u_1 \mp v),$$

$$\wp'(u_1 \mp v) = \wp' u_1\left[-\frac{\wp'^2 v}{\wp^3 u_1} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' v}{\wp^2 u_1}\right] \mp \wp' v\left[\frac{\wp'^2 u_1}{\wp^3 u_1} - \frac{1}{2}\frac{\wp'' u_1}{\wp^2 u_1}\right],$$

$$\wp'^2 v = \wp'^2 u_1 \qquad \wp'' v = +\frac{c^2}{2}, \qquad \wp^2 u_1 = -\frac{c^2}{4}, \qquad \wp'' u_1 = -c^2$$

ergibt sich

$$\wp'(u_1 \mp v) = \wp' u_1\left[1 - \frac{\wp'^2 v}{\wp^3 u_1}\right] \pm \wp' v\left[2 - \frac{\wp'^2 v}{\wp^3 u_1}\right],$$

mithin

$$-\wp' u_2 = [\wp' u_1 \pm \wp' v]\left[1 - \frac{\wp'^2 v}{\wp^3 u_1}\right] \pm \wp' v,$$

woraus folgt, daß

$$u_1 + u_2 \equiv -v$$

zu setzen ist.

Aus der Gesamtheit der dieser Kongruenz genügenden Wertepaare wählen wir das aus, das die Gleichung erfüllt

$$u_1 + u_2 = -v.$$

Nunmehr ist

$$\zeta(u_1+u_2) = \zeta u_1 + \zeta u_2 = -\zeta v,$$

also

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = 2\zeta s - \zeta v + \frac{\wp' s - \wp' v}{2}\cdot\left[\frac{1}{\wp s - \wp u_1} + \frac{1}{\wp s - \wp u_2}\right]$$

$$= 2\zeta s - \zeta v + \wp s \cdot \frac{\wp' s - \wp' v}{\wp^2 s - \wp^2 u_1} = 2\zeta s - \zeta v + 4\wp s \cdot \frac{\wp' s - \wp' v}{4\wp^2 s - g_2},$$

und man hat

$$\frac{\wp' s - \wp' v}{4\wp^2 s - g_2} = \frac{\wp'^2 s - \wp'^2 v}{[\wp' s + \wp' v]\cdot[4\wp^2 s - g_2]} = \frac{\wp s[4\wp^2 s - g_2]}{[\wp' s + \wp' v]\cdot[4\wp^2 s - g_2]} = \frac{\wp s}{\wp' s + \wp' v} = -\frac{1}{2\varrho},$$

daher

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = 2\zeta s - \zeta v - \frac{2\wp s}{\varrho}.$$

Wegen

$$\zeta s + \zeta d - \zeta v = \varrho, \qquad \wp s + \wp d = \varrho^2$$

erhält man schließlich

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = \zeta s + \varrho - \zeta d - \frac{2\wp s}{\varrho} = \zeta s - \zeta d + \frac{\varrho^2 - 2\wp s}{\varrho},$$

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = \zeta s - \zeta d + \frac{\wp d - \wp s}{\varrho}.$$

Die Funktion $\Phi(\alpha)$ besitzt an der Stelle $\alpha = 0$ einen Pol; denn hier verschwindet

$$\wp d - \wp s = \wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right),$$

während

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha\right) - \zeta\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) + \frac{\wp d - \wp s}{\varrho} = 0$$

ist.

Aus

$$\wp d - \wp s = \wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right) = \frac{\wp'\frac{v}{2}\,\wp'\alpha}{\left[\wp\frac{v}{2} - \wp\alpha\right]^2},$$

$$v < 2\omega_2, \qquad \frac{v}{2} < \omega_2, \qquad \wp'\frac{v}{2} < 0$$

folgt, daß

$$\wp d - \wp s \leqq 0 \quad \text{für} \quad -\frac{v}{2} \leqq \alpha \leqq -0,$$

$$\wp d - \wp s \geqq 0 \quad \text{für} \quad +0 \leqq \alpha \leqq +\frac{v}{2}.$$

Wir ermitteln jetzt noch das Vorzeichen des Ausdrucks

$$Z(\varrho) = g_2^3\varrho - 3g_2^2\wp' v\cdot\varrho^2 - 9g_2g_3\varrho^3 - 27g_2g_3\wp' v$$

an der Stelle $\alpha = 0$, d. h. für $\varrho = \varrho_0 = 2\zeta\frac{v}{2} - \zeta v$.

Da

$$\frac{Z(\varrho)}{g_2} = \varrho[g_2^2 - 3g_2\wp' v\cdot\varrho - 9g_3\varrho^2] - 27g_3\wp' v,$$

wo

$$g_2 = -c^2, \quad g_3 = -\frac{h^2}{16}, \quad \wp' v = \frac{h}{4},$$

so gilt

$$-\frac{Z(\varrho)}{c^2} = \varrho\left[c^4 + \frac{3}{4}hc^2\varrho + \frac{9}{16}h^2\varrho^2\right] + \frac{27}{64}h^3,$$

$$-\frac{64\,Z(\varrho)}{c^2} = 4\varrho\frac{[64c^6 - 27h^3\varrho^3]}{4c^2 - 3h\varrho} + 27h^3,$$

$$-\frac{64\,Z(\varrho)}{c^2} = \frac{\varrho[256c^6 - 81h^4] - 108h^3[\varrho^4 - c^2]}{4c^2 - 3h\varrho}.$$

Es ist aber $\varrho = \varrho_0$ Wurzel der Gleichung

$$\varrho^4 + h\varrho - c^2 = 0,$$

daher

$$\varrho_0^4 - c^2 = -h\varrho_0,$$

also

$$4c^2 - 3h\varrho_0 = c^2 + 3\varrho_0^4,$$

demnach

$$Z(\varrho_0) = -\frac{c^2}{64}\cdot\varrho_0\frac{[256c^6 + 27h^4]}{c^2 + 3\varrho_0^4} < 0.$$

Mithin gilt

$$\Phi(-0) = \frac{Z(\varrho_0)}{-0} = +\infty,$$

$$\Phi(+0) = \frac{Z(\varrho_0)}{+0} = -\infty,$$

wie es ja auch dem monoton steigenden Verhalten der Funktion $\Phi(\alpha)$ entspricht.

Da

$$\varrho(\alpha) = \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \zeta v = \varrho(-\alpha),$$

hat man

$$Z(\alpha) = g_2^3\varrho - 3g_2^2\wp' v\cdot\varrho^2 - 9g_2g_3\varrho^3 - 27g_2g_3\wp' v = Z(-\alpha),$$

während

$$N(\alpha) = \varrho[\wp d - \wp s] = \varrho\left[\wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right)\right] = -N(-\alpha)$$

ist, ebenso wie

$$\zeta s_1 + \zeta s_2 = \zeta s - \zeta d + \frac{\wp d - \wp s}{\varrho}$$

eine ungerade Funktion von $\alpha$ ist.

Damit ist

$$\Phi(\alpha) = -\Phi(-\alpha)$$

nachgewiesen.

Insbesondere gilt

$$\Phi\left(\frac{v}{2}\right) = -\Phi\left(-\frac{v}{2}\right).$$

Wir bilden jetzt $\Phi\left(-\frac{v}{2}\right)$ und bestimmen sein Vorzeichen.

Aus der Darstellung

$$\Phi(\alpha) = \frac{g_2^3}{\wp d - \wp s} - \frac{27\, g_2 g_3 \wp' v}{\varrho\,[\wp d - \wp s]} - 3 g_2^2 \wp' v \cdot \frac{\varrho}{\wp d - \wp s} - 9 g_2 g_3 \frac{\varrho^2}{\wp d - \wp s}$$
$$+ 27\, g_3 \wp' v\,[\zeta s_1 + \zeta s_2] - 3 g_2^2 \wp' v \cdot \alpha$$

folgt mit Rücksicht auf

$$\lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{g_2^3}{\wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right)} = \frac{g_2^3}{-\wp'(0)} = 0,$$

$$\lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{27\, g_2 g_3 \wp' v}{\varrho\,[\wp d - \wp s]} = 0,$$

$$\lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{\varrho}{\wp d - \wp s} = \lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{\varrho^2}{\varrho\,[\wp d - \wp s]} = \lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{\wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) + \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right)}{\wp\left(\frac{v}{2} - \alpha\right) - \wp\left(\frac{v}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{1}{\varrho} = -1 \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \frac{\varrho^2}{\wp d - \wp s} = -1,$$

$$\lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} [\zeta s_1 + \zeta s_2] = \lim_{\alpha \to -\frac{v}{2}} \left[\zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_1\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} + \alpha + u_2\right)\right] = \zeta u_1 + \zeta u_2 = -\zeta v$$

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) = 9 g_2 g_3 - 27\, g_3 \wp' v\, \zeta v + \frac{3}{2} g_2^2 v \wp' v = -6 \wp' v \left[\frac{9}{2} g_3 \zeta v - \frac{g_2^2}{4} v + \frac{3}{2} g_2 \wp' v\right.$$

Bei der Berechnung von $\Delta r_c$ trat die Ableitung

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial g_2}$$

auf, die sich in folgender Weise bestimmen ließ.

Aus

$$\Delta \frac{\partial \wp v}{\partial g_2} = \wp' v\, \Delta \frac{\partial v}{\partial g_2} + \Delta \frac{\partial \wp(u = v)}{\partial g_2}$$

ergab sich wegen $\wp v = 0$

$$\Delta \frac{\partial \wp v}{\partial g_2} = 0,$$

daher

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial g_2} = -\frac{1}{\wp' v} \Delta \frac{\partial \wp(u = v)}{\partial g_2} = -\frac{1}{\wp' v} \left\{\wp' v \left[-\frac{9}{2} g_3 \zeta v + \frac{g_2^2}{4} v\right] + \frac{3}{2} g_2 g_3\right\},$$

und ersetzt man in $\frac{3}{2} g_2 g_3$ die Invariante $g_3$ durch $-\wp'^2 v$, so erhält man schließlich

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial g_2} = \frac{9}{2} g_3 \zeta v - \frac{g_2^2}{4} v + \frac{3}{2} g_2 \wp' v .$$

Wir ersehen daraus, daß

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) = -\Delta \cdot 6 \wp' v \cdot \frac{\partial v}{\partial g_2}$$

ist. Aus $\wp v = 0$ folgt

$$v = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial g_2} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial g_2} [4x^3 - g_2 x - g_3]^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x}{4x^3 - g_2 x - g_3} \cdot \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Die Funktion

$$\psi(x) = \frac{x}{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

ist im Intervall $0 \leqq x \leqq \infty$ positiv und verschwindet an den Grenzen.

Sei $2\mu$ ein Mittelwert zwischen dem Maximalwert dieser Funktion $\psi(x)$ und der unteren Grenze 0, also jedenfalls eine positive Zahl, so gilt

$$\frac{\partial v}{\partial g_2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \psi(x) \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \mu \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \mu v > 0$$

und damit die eingangs angegebene Ungleichung

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial g_2} = \frac{9}{2} g_3 \zeta v - \frac{1}{4} g_2^2 v + \frac{3}{2} g_2 \wp' v < 0 \quad \text{für} \quad g_2 < 0, \quad g_3 < 0;$$

daher hat

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) = -\Delta \frac{\partial v}{\partial g_2} \cdot 6 \wp' v = [\text{pos.}] \cdot \wp' v$$

das gleiche Vorzeichen wie $\wp' v = \frac{h}{4}$, also

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) \gtreqless 0 \quad \text{für} \quad h \gtreqless 0 .$$

Damit ist gezeigt, daß

1. für $h < 0$

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) < 0, \qquad \Phi(\mp 0) = \pm \infty, \qquad \Phi\left(+\frac{v}{2}\right) > 0,$$

2. für $h \geqq 0$

$$\Phi\left(-\frac{v}{2}\right) \geqq 0, \qquad \Phi(\mp 0) = \pm \infty, \qquad \Phi\left(+\frac{v}{2}\right) \leqq 0$$

ist. Hieraus folgt, daß im Falle $U = r^6$, $h \geqq 0$ die Funktion $\Phi(\alpha)$ die Werte, deren absoluter Betrag kleiner als $\Phi\left(-\frac{v}{2}\right)$ ist, überhaupt nicht, alle übrigen genau einmal annimmt; konjugierte Punkte sind also nicht vorhanden, die Bewegung demnach nicht stabil.

Jedoch handelt es sich im Falle $h < 0$ um eine beschränkt stabile Bewegung; denn $\Phi(\alpha)$ nimmt die zwischen $\Phi\left(-\frac{v}{2}\right)$ und $\Phi\left(+\frac{v}{2}\right)$ liegenden Werte zweimal, die übrigen einmal an, falls $\alpha$ von $-\frac{v}{2}$ bis $+\frac{v}{2}$ geht, und zwar steigt die Funktion von dem negativen Werte $\Phi\left(-\frac{v}{2}\right)$ bis $+\infty$ im Intervall $-\frac{v}{2} \leqq \alpha \leqq -0$, von $-\infty$ bis zu dem positiven Wert $\Phi\left(+\frac{v}{2}\right)$ für $+0 \leqq \alpha \leqq +\frac{v}{2}$. Hieraus ergibt sich notwendig die Existenz zweier Werte $w_1$ und $w_2$, derart, daß

$$-\frac{v}{2} < w_1 < 0: \quad \Phi(w_1) = \Phi\left(+\frac{v}{2}\right) = -\Phi\left(-\frac{v}{2}\right),$$

$$0 < w_2 < +\frac{v}{4}: \quad \Phi(w_2) = \Phi\left(-\frac{v}{2}\right) = -\Phi\left(+\frac{v}{2}\right),$$

und wegen der oben bewiesenen Ungeradheit von $\Phi(\alpha)$

$$w_2 = -w_1 = w.$$

Die den Parameterwerten $+w$ und $-w$ zugeordneten Bahnpunkte $R$ und $R'$ liegen symmetrisch bezüglich der Geraden $\varphi = b$ wie alle Punkte, die entgegengesetzt gleichen Werten von $\alpha$ entsprechen; denn man hat

$$\varrho(\alpha) = \varrho(-\alpha),$$

$$\varphi(\alpha) - b = \frac{i}{2}\left[\ln \frac{\sigma\left(\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)}{\sigma\left(-\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)} + \alpha(\zeta u_1 - \zeta u_2)\right] + \frac{\pi}{2},$$

$$b - \varphi(-\alpha) = -\frac{i}{2}\left[\ln \frac{\sigma\left(\frac{u_1 - u_2}{2} - \alpha\right)}{\sigma\left(-\frac{u_1 - u_2}{2} - \alpha\right)} - \alpha(\zeta u_1 - \zeta u_2)\right] - \frac{\pi}{2},$$

wegen

$$u_2 + u_2 = -v_2;$$

$$\frac{\sigma\left(\frac{u_1 - u_2}{2} - \alpha\right)}{\sigma\left(-\frac{u_1 - u_2}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sigma\left(-\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)}{\sigma\left(\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)} = \frac{1}{\frac{\sigma\left(\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)}{\varrho\left(-\frac{u_1 - u_2}{2} + \alpha\right)}},$$

$$\ln 1 = 2i\pi,$$

daher

$$b-\varphi(-\alpha)=-\frac{i}{2}\left[-\ln\frac{\sigma\left(\frac{u_1-u_2}{2}+\alpha\right)}{\sigma\left(-\frac{u_1-u_2}{2}+\alpha\right)}-\alpha(\zeta u_1-\zeta u_2)\right]+\frac{\pi}{2}=\varphi(\alpha)-b.$$

Jedem Punkte $P(\alpha)$, dessen Parameter in einem der Intervalle

$$-\frac{v}{2}\leqq\alpha\leqq-w,$$

$$+w\leqq\alpha\leqq+\frac{v}{2}$$

liegt, entspricht ein Punkt $P'(\alpha')$, wo $\alpha'$ dem anderen Intervall angehört.

Geht $P$ von $R$ auf der oberen Hälfte der Bahn ins Unendliche, so wandert der konjugierte Punkt $P'(\alpha')$ auf der unteren Hälfte der Bahn aus dem Unendlichen nach $R'$.

Solchen Punkten, die dem Bereich $-w<\alpha<+w$ zugeordnet sind, also die zwischen $R'$ und $R$ liegen, entsprechen keine konjugierten.

(Eingegangen am 9. Juli 1929.)

# Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die die Differentialgleichung $\Delta V + V = 0$ befriedigen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta V + V = \frac{\partial^2 V(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,z)}{\partial z^2} + V(x,z) = 0,$$

wo $x$ und $z$ zwei komplexe Veränderliche bedeuten, lassen sich in der Umgebung einer Regularitätsstelle (für die wir im folgenden den Punkt $x=0, z=0$ wählen) in der Form:

$$(2) \qquad V(x,z) = \int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left(i\,t\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} [f(u) + g(\tilde{u})]\,dt\ ^{1}),$$

$$u = (x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right), \qquad \tilde{u} = (x-iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right), \qquad -1 \leqq t \leqq 1$$

---

[1]) $\exp.(w) = e^{w}$. Man kann — wie man sich leicht überlegt — in (2) an Stelle $\exp.\left(i\,t\sqrt{x^2+z^2}\right)$ den Ausdruck $\cos\left(t\sqrt{x^2+z^2}\right)$ setzen.

Der Übergang von (1) zu $\Delta V + \lambda V = 0$ ($\lambda$ komplexe Konstante) bedeutet eine Drehung und Maßstabveränderung.

Wegen anderer Anwendungen der Darstellung (2) vgl. ebenfalls die Arbeiten „Anwendung eines Koebeschen Satzes auf eine Klasse von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Jahresb. d. d. Math.-Ver. **38** (1929), S. 187, und „Anwendung des Schwarzschen Lemma auf eine Klasse von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Jahresb. d. d. Math.-Ver. **39** (1930), S. 163–167.

Eine ähnliche Methode wurde in der Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Potentialfunktionen des dreidimensionalen Raumes", Math. Annalen **99** (1928), S. 629 und **101** (1929), S. 534, bei der Untersuchung von Singularitäten dieser Funktionen angewandt.

darstellen, wobei $f$ und $g$ in der Umgebung von $u=0$ (bzw. $\tilde{u}=0$) reguläre analytische Funktionen der einen komplexen Veränderlichen sind. Umgekehrt lassen sich $f$ und $g$ in einer einfachen Weise durch $V$ ausdrücken (§ 1). Hiermit wird man geführt auf die Untersuchung der Funktionen

$$F(x,z)=\int_{-1}^{1}\frac{\exp.\,(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}f(u)\,dt, \tag{3}$$

die somit im kleinen in einer eineindeutigen Beziehung zu den Funktionen $f(u)$ stehen. $f(u)$ wird als die zu $F(x,z)$ zugeordnete Funktion bezeichnet (entsprechend $g(\tilde{u})$ zu $G(x,z)$). Somit entspricht jeder Funktionenklasse der $f(u)$ eine Klasse der Funktionen $F(x,z)$ [2]). Insbesondere werden wir den Fall betrachten, wo $f(u)$ rational bzw. algebraisch ist. Die Integraldarstellung (3), die zunächst für die Umgebung des Koordinatenanfangspunktes definiert war, gilt im Falle eines gebrochenen rationalen $f(u)$ für jeden endlichen Wert von $x, z$, sobald er nicht auf einer im weiteren näher definierten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (Trennungsraum) $\mathfrak{T}_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ liegt. Die Darstellung (2) gibt einen Zweig von $F(x,z)$ wieder. Das (geschlitzte) Raumblatt, in dem die Darstellung (3) gilt, bezeichnen wir als den Zuordnungsraum $\mathfrak{Z}$ von $F(x,z)$ (in bezug auf $f(u)$).

Einer ganzen rationalen Zugeordneten entspricht eine lineare Verbindung von endlich vielen Funktionen, die mit den Besselschen in einer einfachen Weise zusammenhängen.

Beschränken wir uns an dieser Stelle auf den Fall der speziellen Zugeordneten $f(u)=\frac{1}{(u-\alpha)^n}$, $\alpha\neq 0$, so hat $F(x,z)$ die Singularitätenebene $\mathfrak{E}$:

---

[2]) Die durch (3) vermittelte Zuordnung der $F$ zu den $f$ ist eine lineare Funktionaloperation, die den Bereich der $F$ auf den der $f$ abbildet. Man kann unsere Betrachtungen also so auffassen, daß die Lösungsfunktionen $F$ und die Differentialgleichung, die sie befriedigen, durch die Funktionaltransformation in einen anderen Funktionenbereich übersetzt werden. Das ist der Gesichtspunkt, den F. Bernstein und G. Doetsch in ihren Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und andere Funktionalgleichungen zur Geltung gebracht haben. Vgl. dazu besonders Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Annalen 89 (1923), S. 192; Bernstein und Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, I. Mitteilung, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285; Doetsch, II. und III. Mitteilung, ebenda 22 (1925), S. 293, 25 (1926), S. 608; Doetsch, Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung, Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart, Verlag Springer 1929, S. 56.

$x+iz=2\alpha$, die dem Pol $u=\alpha$ von $f(u)$ entspricht. $\mathfrak{E}$ liegt auf der Berandung des Trennungsraumes $\mathfrak{T}$: $x+iz=\frac{2\alpha}{1-t^2}$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ [3]).

Im Falle einer allgemeinen rationalen Zugeordneten superponieren sich endlich viele $F(x,z)$ von angegebener Art. Ähnlich gestalten sich die Verhältnisse, wenn $f(u)$ algebraisch ist.

Ist $f(u)$ rational oder algebraisch, so befriedigt $F(x,z)$, betrachtet als Funktion von $x$ bzw. $z$, eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung mit Koeffizienten, die algebraisch in $x$ und $z$ sind (§ 2). Es folgt daraus, daß $F(x,z)$ nur auf algebraischen (zweidimensionalen) Flächen singulär ist. Die früher angegebene Ebene $\mathfrak{E}$ ist z. B. eine derartige Verzweigungsfläche.

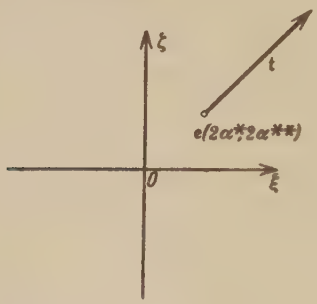



Fig. 1.

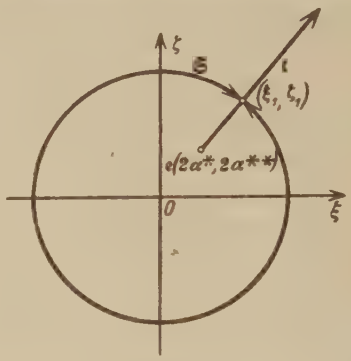



Fig. 2.

In § 3 betrachten wir Integrale der Funktionen $F(x,z)$, erstreckt über Kurven, die auf analytischen (zweidimensionalen) Flächen $\mathfrak{M}$ liegen. Diese Flächen sind durch die Gleichung

$$\sqrt{x^2+z^2}=h(x+iz) \tag{4}$$

gegeben, wo $h$ eine reguläre Funktion einer komplexen Veränderlichen ist.

Es gehöre insbesondere $F(x,z)$ zu der Zugeordneten $f(u)=\frac{1}{(u-\alpha)^n}$ und es sei $\mathfrak{S}$ eine im schlichten $xz$-Raume geschlossene, auf $\mathfrak{M}$ gelegene Kurve, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt, ohne die Singularitätenebene $\mathfrak{E}$ von $F(x,z)$ zu schneiden, und die den Trennungsraum $\mathfrak{T}$ nur in einem Punkte $x_1, z_1$ durchsetzt [4]). Es gilt dann:

---

[3]) Betrachtet man $F$ in der reellen Ebene ($\mathbf{Im}(x)=0$, $\mathbf{Im}(z)=0$), so sind die Schnitte von $\mathfrak{E}$ bzw. von $\mathfrak{T}$ mit der reellen Ebene, der Punkt $e$ mit den Koordinaten $2\alpha^*$, $2\alpha^{**}$, bzw. die Strecke $t$, die im Punkte $e$ beginnt, auf einem Strahle aus dem Koordinatenanfangspunkt liegt und sich ins Unendliche erstreckt. Der Schnitt des Zuordnungsraumes $\mathfrak{Z}$ ist das eine Blatt $\mathfrak{z}$ der unendlichvieldeutigen Funktion $F(\xi,\zeta)$ [$\xi=\mathbf{Re}(x)$, $\zeta=\mathbf{Re}(z)$] mit Ausschluß der Strecke $t$.

[4]) In der Fig. 2 werden die Verhältnisse für den Fall, daß $\mathfrak{S}$ ganz in der reellen Ebene liegt, angedeutet.

$$(5)\quad \int_{\mathfrak{C}} F(x,z)\,d(x+iz) = 4\pi i \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \frac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!} \int_{-t_1}^{t_1} \frac{\exp.\left[h\left(\frac{2\alpha}{1-t^2}\right)\right]}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}\,dt,$$

$$t_1 = \left|\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x_1+iz_1}}\right|.$$

Ähnliche Formeln gewinnt man, wenn $f(u)$ algebraisch ist. In diesem Falle betrachten wir außer der Integrale über eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ die Ausdrücke $\int_{0,0}^{x_1,z} F(x,z)(dx+i\,dz)$, wobei die Integration im Zuordnungsraum $\mathfrak{Z}$ von $F(x,z)$ längs eines (offenen) Kurvenstückes, das auf $\mathfrak{M}$ liegt, geschieht. Zu jeder Klasse der $F(x,z)$ (zu jedem $\mathfrak{M}$) existiert ähnlich, wie in der Theorie der Integrale der algebraischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, gewisse Normalintegrale. Es läßt sich dabei $\int_{0,0}^{x,z} F(x,z)(dx+i\,dz)$ stets als eine lineare Kombination dieser Normalintegrale, vermehrt um eine Funktion mit einer algebraischen Zugeordneten, darstellen. Diese Normalintegrale hängen in einer einfachen Weise mit den Weierstraßschen Integranden erster, zweiter und dritter Gattung zusammen.

Ist $h$ (siehe (4)) algebraisch, so lassen sich ähnliche Ergebnisse für die Integrale $\int F(x,z)\,d(x-iz)$ erhalten[5]).

## § 1.

## Die Zugeordnete.

Satz. *Es sei die Funktion $V(x,z)$ in einem Bereiche des $xz$-Raumes, der den Punkt $x=0$, $z=0$ im Innern enthält, regulär und befriedige dort die Differentialgleichung*

$$(1)\qquad \Delta V + V \equiv \frac{\partial^2 V(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,z)}{\partial z^2} + V(x,z) = 0.$$

[5]) Betrachtet man die Integrale $\int V(x,z)\,dx$ (mit $\Delta V + V = 0$) längs einer Kurve, die auf einer algebraischen Fläche des vierdimensionalen Raumes: $a(x,z)=0$ liegt, so kann man mit Hilfe der letzten Gleichung $z$ aus $V(x,z)$ eliminieren; man erhält dann $\int V[x,z(x)]\,dx$, d. h. ein Integral einer Funktion einer komplexen Veränderlichen. Die Schwierigkeit bei der Auswertung dieses Integrals liegt darin, daß man zunächst keine Aufschlüsse über den Charakter der im allgemeinen unendlichvieldeutigen Funktion $V[x,z(x)]$ besitzt. Benutzt man den im § 2 angegebenen Satz, so kann man schließen, daß $V[x,z(x)]$ eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten befriedigt. Man könnte versuchen, die von L. Fuchs angedeutete Theorie der Integrale von Funktionen, die lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen, auszubauen und bei $V[x,z(x)]$ anzuwenden. Die allgemeine Theorie der Integrale von Funktionen, die lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen, wäre viel komplizierter als die in der Arbeit niedergelegten Betrachtungen. Aus der Darstellung (2) folgt, daß die von uns betrachteten Funktionen einen besonders einfachen Spezialfall darstellen. Der Integrationsweg $\mathfrak{C}$ [in der rechten Seite von (5)] geht in eine offene Kurve auf der Riemannschen Fläche der Funktion $V[x,z(x)]$ über, so daß der Cauchysche Residuensatz nicht mehr anwendbar ist.

*Es gilt dann in einer Umgebung von* $x=0,\ z=0$ *die Darstellung*:

$$V(x,z)=F(x,z)+G(x,z), \tag{2}$$

wo

$$F(x,z)=\int_{-1}^{1}\frac{\exp.\left(i\,t\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}f(u)\,dt, \tag{2*}$$

$$G(x,z)=\int_{-1}^{1}\frac{\exp.\left(i\,t\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}g(\tilde{u})\,dt, \tag{2**}$$

$$u=(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right),\qquad \tilde{u}=(x-iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right), \tag{2***}$$

$$-1\leqq t\leqq 1$$

*ist. Die Funktionen* $f(u)$ *und* $g(\tilde{u})$ *der komplexen Veränderlichen* $u$ *bzw.* $\tilde{u}$ *sind durch die Formeln*

$$f(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u\,v_1(u\sin^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta+\frac{1}{\pi}V(0,0), \tag{3}$$

$$g(\tilde{u})=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tilde{u}\,v_2(\tilde{u}\sin^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta, \tag{3*}$$

$$v_1(T)\equiv\frac{dV(T,-iT)}{dT},\qquad v_2(T)\equiv\frac{dV(T,iT)}{dT} \tag{3**}$$

*bestimmt.*

Beweis. Wir setzen $x=\xi+i\eta$, $z=\zeta+i\tau$ und betrachten die Funktionen $V(\xi,\zeta)$ der beiden reellen Veränderlichen $\xi$ und $\zeta$. $V(\xi,\zeta)$ als eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial\zeta^2}+V=0$ läßt sich bekanntlich in der Form

$$V(\xi,\zeta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}J^{(n)}(r)\left[A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right] \tag{4}$$

darstellen, wo $J^{(n)}(r)$ die Besselschen Funktionen, $A_n$, $B_n$ komplexe Konstanten bedeuten ($B_0=0$), und $\xi=r\cos\varphi$, $\zeta=r\sin\varphi$ gesetzt wurde. Wir benutzen die Integraldarstellung[6])

$$J^{(n)}(r)=\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(i\,t\,r)}{\sqrt{1-t^2}}(1-t^2)^n\,dt\qquad(n\geqq 0)$$

[6]) Vgl. dazu N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, § 18, S. 51, Formel (2). Wir werden im folgenden dieses Werk als Nielsen zitieren.

und bringen (4) auf die Form

$$(\xi,\zeta)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(i\,t\,r)}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^n r^n\left[\frac{A_n-iB_n}{2}e^{in\varphi}+\frac{A_n+iB_n}{2}e^{-in\varphi}\right]dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(i\,t\sqrt{\xi^2+\zeta^2})}{\sqrt{1-t^2}}\left[\frac{A_n-iB_n}{2}(\xi+i\zeta)^n\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^n+\frac{A_n+iB_n}{2}(\xi-i\zeta)^n\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^n\right]$$

Bekanntlich ist für genügend kleine $r$ die Funktion $J^{(n)}(r)$ asymptotisch durch $\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}$ gegeben. (Vgl. Nielsen, § 2, S. 7, (3).) Man darf in $(4^{**})$ die Reihenfolge der Integration und der Summation vertauschen, denn $(4^{**})$ konvergiert in einem genügend kleinen Kreise absolut und gleichmäßig, und in dem Ausdruck

$$\frac{\exp.(i\,t\sqrt{\xi^2+\zeta^2})}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1-t^2}}\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left((\xi+i\zeta)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right)^n+\frac{A_n+iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left((\xi-i\zeta)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right)^n\right]\right\}dt$$

konvergieren die in der geschweiften Klammer stehenden Reihen für genügend kleine $|\xi|$ und $|\zeta|$ gleichmäßig und absolut in $t$. Die analytische Fortsetzung $V(x,z)$ von $V(\xi,\zeta)$ ins Komplexe ergibt sich offenbar dadurch, daß wir in (5) $\xi$ und $\zeta$ durch $x$ und $z$ ersetzen. Wir gelangen dann zu der behaupteten Darstellung (2).

Wir gehen dazu über, die Formel (3) und $(3^*)$ abzuleiten. Das Funktionselement von $f(u)$ ist die Reihe $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}u^n$. Setzt man — unter der Berücksichtigung von $(3^{**})$ — in dem unten stehenden Integral für $V(u\sin^2\vartheta,\,-iu\sin^2\vartheta)$ den in $(4^{**})$ erhaltenen Ausdruck und ersetzt man darin $t$ durch $\cos T$, so ist, wie eine formale Rechnung zeigt,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\,v_1(u\sin^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}u^n\sin^{2n-1}\vartheta\;n\int_0^{\pi}\sin^{2n}T\,dT\right\}d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}u^n\sin^{2n-1}\vartheta\,\frac{n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\right\}d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}u^n\,\frac{n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{A_n-iB_n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}u^n,$$

w. z. b. w. Auf gleiche Weise läßt sich die Beziehung $(3^*)$ beweisen.

Wir werden im folgenden die Funktion $f(u)$ als die zu $F(x,z)$ zugeordnete bezeichnen. Ebenfalls bezeichnen wir $g(\tilde{u})$ als die zu $G(x,z)$ zugeordnete Funktion.

Bemerkung. Die Funktionen $V(x,z)$ lassen sich in dem Bizylinder: $|x+iz| \leqq a$, $|x-iz| \leqq b$ ($a, b$ genügend klein) in der Form

$$V(x,z) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp.\left(it\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ v_1\left((x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\sin^2\vartheta\right) + \right.$$
$$\left. + v_2\left((x-iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\sin^2\vartheta\right)\right\} dt\, d\vartheta$$

darstellen. Nach $(3^{**})$ ist $v_{\frac{1}{2}}(T) = \frac{dV(T, \mp iT)}{dT}$, und $V(x, -ix)$, $V(x, ix)$ sind die Werte, die $V(x,z)$ auf den Faktorenkreisen des Bizylinders ($|x+iz| \leqq a$ in der Ebene $x = iz$ bzw. $|x-iz| \leqq b$ in der Ebene $x = -iz$) annimmt.

Der oben bewiesene Satz legt es nahe, an Stelle der die Differentialgleichung (1) befriedigenden Funktionenklasse $V(x,z)$ die Funktionenklasse $F(x,z)$ (bzw. $G(x,z)$) zu betrachten. Die Klasse $F(x,z)$ besitzt aber die Eigenschaft, daß man sie in eine eineindeutige Beziehung zu den Funktionen $f(u)$ einer komplexen Veränderlichen bringen und auf diese Weise die Sätze der (ebenen) Funktionentheorie für die $F(x,z)$ verwerten kann.

Die Darstellung (2) ist zunächst für eine Umgebung der Stelle $x=0$, $z=0$ bewiesen. Ist nun $f(U)$ eine in der schlichten euklidischen $U$-Ebene mit der Ausnahme der singulären Punkte $\alpha_\varkappa \equiv \alpha_\varkappa^* + i\alpha_\varkappa^{**}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \mu)$ definierte Funktion der komplexen Veränderlichen $U$, so gilt die Integraldarstellung (2) der Funktion $F(x,z)$ in schlichten $\xi\zeta\eta\tau$-Raume definiert, wobei aus dem Raum gewisse dreidimensionale Schlitze $\mathfrak{T}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, \mu)$ ausgeschlossen sind. Diese Schlitze $\mathfrak{T}_\varkappa$ sind Teile von gewissen dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten. $\mathfrak{T}_\varkappa$ sind durch die Gleichungen

$$(6) \qquad \xi - \tau = \frac{2\alpha_\varkappa^*}{1-t^2}, \qquad \eta + \zeta = \frac{2\alpha_\varkappa^{**}}{1-t^2} \qquad \begin{pmatrix} -1 \leqq t \leqq 1 \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, \mu \end{pmatrix}$$

gegeben (vgl. die Fußbemerkung [2]). Die $\mathfrak{T}_\varkappa$ sind begrenzt von den Ebenen $\mathfrak{E}_\varkappa$: $\xi - \tau = 2\alpha_\varkappa^*$, $\eta + \zeta = 2\alpha_\varkappa^{**}$ und erstrecken sich ins Unendliche.

Wie im § 2 wir nachträglich beweisen werden, befriedigt eine Funktion $F(x,z)$ mit einer rationalen oder algebraischen Zugeordneten eine gewöhnliche lineare Gleichung, deren Koeffizienten algebraisch von $x$ und $z$ abhängen.

Die Funktionen $F(x, z)$ sind im allgemeinen unendlichvieldeutig. Die $\mathfrak{E}_\varkappa$ sind die Verzweigungsebenen von $F(x, z)$. Das geschlitzte Raumblatt, wo die Darstellung (2) gilt, werden wir als den Zuordnungsraum $\mathfrak{Z}$ in bezug auf $f(u)$ bezeichnen, die Schlitze als Trennungsräume $\mathfrak{T}_\varkappa$. In jedem inneren Punkt des Zuordnungsraumes $\mathfrak{Z}$ ist $F(x, z)$ regulär und läßt sich mit Hilfe des Integrals (2) darstellen. Auf das Verhalten von $F(x, z)$ in der Umgebung von $\mathfrak{E}_\varkappa$ werden wir noch im § 2 zurückkommen.

Ist $f(u)$ nicht in einer schlichten $u$-Ebene, sondern auf einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen Blättern gegeben, so lassen sich unsere Überlegungen ohne wesentliche Schwierigkeiten übertragen. Wir zerschneiden die Riemannsche Fläche von $f(u)$ in der Weise, daß sämtliche Schnitte auf den Strahlen aus dem Koordinatenanfangspunkt von dem Verzweigungspunkt ins Unendliche gehen. Aus jeden Zweig $f^{(q)}(u)$ von $f(u)$ läßt sich vermöge der Darstellung $F^{(q)}(x, z) = \int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left(i t \sqrt{x^2 + z^2}\right)}{\sqrt{1 - t^2}} f^{(q)}(u)\, dt$ die Funktion $F^{(q)}(x, z)$ bilden. $f(u)$ gibt somit Veranlassung, so viele Funktionen zu bilden, wieviel Riemannsche Blätter $f(u)$ besitzt. Die $F^{(q)}(x, z)$ sind im allgemeinen nicht die Zweige einer und derselben Funktion.

Man kann auf Grund des im § 2 bewiesenen Satzes und (3) folgendes einsehen:

Ist die Zugeordnete eines Zweiges der Funktion $F(x, z)$ algebraisch, so befriedigen die Zugeordneten der übrigen Zweige eine Differentialgleichung mit Koeffizienten, die in $u$ algebraisch sind.

Bemerkung 1. Betrachtet man die Funktion $F(x, z)$ auf der Ebene $z = -ix$ (bzw. $z = ix$), so werden die $F(x, -ix)$ algebraisch-logarithmische Funktionen von $x$, falls die Zugeordnete von $F(x, z)$ eine rationale Funktion ist, — Integrale von algebraischen Funktionen im Falle einer algebraischen Zugeordneten.

Bemerkung 2. Die Funktionen $F(x, z)$ bilden einen Körper: sind uns zwei Funktionen $F_1$ und $F_2$, dessen Zugeordnete $f_1$ bzw. $f_2$ sind, so soll als Kompositionsprodukt von $F_1$ und $F_2$ diejenige Funktion $F$ erklärt sein, deren Zugeordnete $f = f_1 f_2$ ist.

## § 2.

## Die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, die die $F(x, z)$ mit algebraischen Zugeordneten befriedigen.

Satz. *Betrachtet man die Funktion $F(x, z)$ mit algebraischer Zugeordneten als Funktion der einen Veränderlichen $x$ bzw. $z$, so genügt sie einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit Koeffizienten, die algebraisch von $x$ und $z$ abhängen.*

Beim Beweis unseres Satzes gehen wir von folgender Tatsache aus:

Genügen die Funktionen $w_1(x)$ bzw. $w_2(x)$ je einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten

$$(7) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=h} a_\varkappa(x)\frac{d^\varkappa w_1(x)}{dx^\varkappa} = a(x), \qquad (7^*) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=h'} b_\varkappa(x)\frac{d^\varkappa w_2(x)}{dx^\varkappa} = b(x),$$

so genügt

$$(8) \qquad w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

ebenfalls einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten

$$(7^{**}) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=h''} c_\varkappa(x)\frac{d^\varkappa w(x)}{dx^\varkappa} = c(x).$$

Beim Beweise dieser Behauptung geht man auf dem üblichen Wege vor, indem man die Gleichungen (7), (7*) und (8) genügend oft differenziert. Man erhält dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}
L_\varrho &\equiv -w^{(\varrho)} + w_1^{(\varrho)} + w_2^{(\varrho)} &&= 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots \\
(9) \quad L_{\varkappa+\varrho} &\equiv -a^{(\varrho)} + a_0^{(\varrho)} w_1 + [\varrho\, a_0^{(\varrho-1)} + a_1^{(\varrho)}] w_1' + \ldots &&= 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots \\
L_{\varkappa+\varkappa'+\varrho} &\equiv -b^{(\varrho)} + b_0^{(\varrho)} w_2 + [\varrho\, b_0^{(\varrho-1)} + b_1^{(\varrho)}] w_2' + \ldots = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

$$w_3^{(\varrho)} = \frac{d^\varrho w_3(x)}{dx^\varrho}, \qquad a_3^{(\varrho)} = \frac{d^\varrho a_3(x)}{dx^\varrho}, \qquad b_3^{(\varrho)} = \frac{d^\varrho b_3(x)}{dx^\varrho}.$$

Wir betrachten die $w_1^{(\varrho)}, w_2^{(\varrho)}$ als die zu eliminierenden Größen und stellen in üblicher Weise die Eliminationsdeterminante auf, deren einzelne Glieder Polynome in $w^{(\varrho)}, a_\varkappa^{(\varrho)}, b_\varkappa^{(\varrho)}$ sind, und die verschwinden muß, falls $w_1$ und $w_2$ nicht identisch Null sind. Die $w^{(\varrho)}$ kommen nur in den ersten $\varkappa$ Zeilen, in der ersten Kolonne vor. Entwickelt man nun diese Determinante nach der ersten Kolonne, so gelangt man zu der Relation

$$(10) \qquad -w\,\|\ldots\| + w'\,\|\ldots\| + w''\,\|\ldots\| + \ldots = 0.$$

Es können nun zwei Fälle eintreten: Entweder ist mindestens ein Koeffizient der $w^{(\varrho)}$ in (10) nicht identisch Null, oder aber alle verschwinden identisch. Im ersten Falle liefert (10) die gesuchte Gleichung (7). Im zweiten Falle betrachten wir etwa die erste Unterdeterminante (den Koeffizienten von $-w$), deren Glieder wir durchweg mit $\alpha_{\nu\mu}$ bezeichnen; m. a. W. es sei gesetzt

$$(11)\qquad \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ a_0' & 0 & (a_0+a_1') & 0 & (a_1+a_2') & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_0' & 0 & (b_0+b_1') & 0 & (b_1+b_2') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\| = \| \alpha_{\nu\mu} \|$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, p; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Der Rang von (11) sei $r$. Wir können dann die erste Zeile von (11) in der Form $\alpha_{\nu 0} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \lambda_\varkappa \alpha_{\nu p_\varkappa}$ darstellen. Da ferner $L_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ ist, so ist

$$(12)\qquad L_2 - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \lambda_\varkappa L_{p_\varkappa} \equiv -w' - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\varkappa_1} \lambda_\varkappa w^{(p_\varkappa)} + \sum_{\varkappa=\varkappa_1+1}^{\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2} \lambda_\varkappa a^{(p_\varkappa')} + \sum_{\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2+1}^{\varkappa=r} \lambda_\varkappa b^{(p_\varkappa'')} = 0.$$

Wir erhalten also auch in dem zweiten Falle in (12) die gesuchte Beziehung (7).

Bei dem Verfahren wurden nur algebraische Operationen angewandt, so daß die $c_\varkappa$ algebraische Funktionen von $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ und deren Ableitungen — somit algebraisch in $x$ und $z$ — sind.

Wir gehen nunmehr zu dem eigentlichen Beweis unseres Satzes über, wobei wir seine Richtigkeit stufenweise zunächst für ganze rationale, dann gebrochene rationale und schließlich für algebraische Zugeordnete zeigen werden.

I. Im Falle einer ganzen rationalen Zugeordneten $f(u) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} C_\varkappa u^{(\varkappa)}$ $\equiv \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} C_\varkappa \left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right]^\varkappa$ genügt es, unserer Behauptung gemäß, die Funktion $S_n(x,z) = \int_{-1}^{1} s_n(x,z,t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}\, t^n\,dt$ zu betrachten. Da ferner

$$\frac{ds_n(x,z,t)}{dx} = \frac{ix}{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}\, t^{n+1} \equiv \frac{ix}{\sqrt{x^2+z^2}}\, s_{n+1}(x,z,t)$$

ist, und somit $\frac{dS_n(x,z)}{dx} = \frac{ix}{\sqrt{x^2+z^2}} S_{n+1}(x,z)$ ist, brauchen wir nur den Fall $n=0$, d. h. den Ausdruck $S_0(x,z) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ zu be-

trachten. Eine formale Rechnung zeigt aber, daß

$$(13)\quad \frac{i(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}\frac{d^2 s_0(x,z,t)}{dx^2} - \frac{i\sqrt{x^2+z^2}}{x^3}(z^2-x^2)\frac{ds_0(x,z,t)}{dx} + i\sqrt{x^2+z^2}\,s_0(x,z,t) = \frac{d[s_0(x,z,t)(1-t^2)]}{dt}$$

und somit auch

$$(13^*)\quad \frac{x^2+z^2}{x^2}\frac{d^2 S_0(x,z)}{dx^2} - \frac{z^2-x^2}{x^3}\frac{dS_0(x,z)}{dx} + S_0(x,z) = 0$$

gilt, womit der erste Fall erledigt ist.

II. Im Falle einer rationalen gebrochenen Zugeordneten brauchen wir nur $f(u)$ von der Form $\frac{1}{(u-\alpha)^\varkappa}$ $(\alpha \neq 0,\ \varkappa$ ganz, positiv) zu betrachten. Es sei zunächst $\varkappa = 1$. Den Ausdruck $\frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right]}$ zerlegen wir in zwei Summanden

$$\frac{1}{\sqrt{(x+iz)(x+iz-2\alpha)}}[e(x,z,t) - l(x,z,t)]$$
$$\equiv \frac{1}{\sqrt{(x+iz)(x+iz-2\alpha)}}\left[\frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left(t+\sqrt{\frac{x+iz-2\alpha}{x+iz}}\right)} - \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left(t-\sqrt{\frac{x+iz-2\alpha}{x+iz}}\right)}\right].$$

Wir betrachten zunächst

$$E(x,z) = \int_{-1}^{1} e(x,z,t)\,dt \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left(t+\sqrt{\frac{x+iz-2\alpha}{x+iz}}\right)}\,dt\,.$$ [7])

Wir führen noch die Funktion $q(x,z,t) \equiv \frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{1-t^2})^3}$ ein. Es gelten nun die leicht verifizierbaren Beziehungen

$$(14)\quad i\frac{(\sqrt{x^2+z^2})^3}{x^2}\frac{d^2 q(x,z,t)}{dx^2} + \frac{(\sqrt{x^2+z^2})^3}{ix^3}\frac{dq(x,z,t)}{dx} + i\sqrt{x^2+z^2}\,q(x,z,t) = \frac{d[(1-t^2)\,q(x,z,t)]}{dt}$$

---

[7]) Einen von $t$ unabhängigen, in $x, z$ algebraischen Faktor brauchen wir bei unseren Überlegungen nicht zu berücksichtigen: ist $m(x,z,t) = J(x,z)\,j(x,z,t)$ und gilt für $m(x,z,t)$ die gewünschte lineare gewöhnliche Differentialgleichung, so kann man $m(x,z,t)$ und deren Ableitungen nach $x$, linear durch $j(x,z,t)$ und deren Ableitungen ausdrücken, wobei die Koeffizienten dieses linearen Ausdruckes in $x, z$ algebraisch sind.

und

$$(15)\quad -\frac{2\alpha}{(x+iz)}\frac{de(x,z,t)}{dx}+\left\{\frac{\alpha}{(x+iz)^2}\left(i\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{\frac{x+iz-2\alpha}{x+iz}}+1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2i\alpha x}{(x+iz)\sqrt{x^2+z^2}}\sqrt{\frac{x+iz-2\alpha}{x+iz}}-\frac{i\alpha\sqrt{x^2+z^2}}{(x+iz)^2}\sqrt{\frac{x+iz}{x+iz-2\alpha}}\right\}e(x,z,t)+$$

$$+\frac{\alpha}{(x+iz)^2}\sqrt{\frac{x+iz}{x+iz-2\alpha}}\frac{de(x,z,t)}{dt}+\frac{\alpha}{(x+iz)^2}\frac{d[te(x,z,t)]}{dt}+$$

$$+\left[-\frac{i\alpha\sqrt{x^2+z^2}}{(x+iz)^2}+\frac{2i\alpha x}{(x+iz)\sqrt{x^2+z^2}}\right]s_0(x,z,t)-\frac{\alpha}{(x+iz)^2}\sqrt{\frac{x+iz}{x+iz-2\alpha}}q(x,z,t)=0$$

Differentiiert man die Gleichung (15) viermal, die Gleichungen (13) und (14) je zweimal nach $x$, so erhält man im ganzen elf Gleichungen. In gleicher Weise, wie bei dem Beweis der Behauptung, läßt sich jetzt eine Eliminationsdeterminante aufstellen. In der ersten Kolonne dieser Determinante treten lineare Kombinationen von $\frac{d^\varkappa e(x,z,t)}{dx^\varkappa}$ $(\varkappa=0,1,2,3,4,5)$ und von Ableitungen gewisser Ausdrücke nach $t$ vor, in den übrigen Kolonnen nur die Koeffizienten der $\frac{d^\varkappa s_0(x,z,t)}{dx^\varkappa}$, $\frac{d^\varkappa q(x,z,t)}{dx^\varkappa}$ $(\varkappa=0,1,2,3,4,5)$, d. h. von $t$ unabhängige, in $x, z$ algebraische Funktionen.

Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Kolonne, zieht man wie bei dem früheren Beweis die beiden Alternativen in Betracht und schließt man weiter wie dort, so gelangt man zu der gesuchten linearen Differentialgleichung. Verschwindet der erste Koeffizient in der letztgenannten Determinante nicht, so erhält man eine Differentialgleichung fünfter Ordnung von der Form

$$(16)\qquad \left(\frac{2\alpha}{x+iz}\right)\frac{d^5e(x,z,t)}{dx^5}+\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=4}M_\varkappa(x,z)\frac{d^\varkappa e(x,z,t)}{dx^\varkappa}=\frac{dm(x,z,t)}{dt},$$

wobei $M_\varkappa(x,z)$ beziehungsweise $m(x,z,t)$ algebraische Funktionen von $x, z$ bzw. $x, z, t$ sind. Da man offenbar die linke Seite von $t=-1$ bis $t=1$ integrieren kann, so muß auch der Ausdruck $m(x,z,t)\big|_{t=-1}^{t=1}$ einen endlichen Wert haben. Führt man nun diese Integration durch, so erhält man die gewünschte Differentialgleichung für $E(x,z)=\int_{-1}^{1}e(x,z,t)\,dt$.

Verschwindet der erste Koeffizient in der Entwicklung der Determinante, so erniedrigt sich der Grad von (16). Die übrigen Überlegungen verlaufen analog wie früher.

Auf eine ähnliche Weise wird die Gleichung für $L(x,z)=\int_{-1}^{1}l(x,z,t)\,dt$ abgeleitet.

Bezeichnet man ferner mit $p_n(x,z,t)$ bzw. $k_n(x,z,t)$ die Ausdrücke

$$\frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right]^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{t\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}\left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right]^n},$$

so gelten die Relationen

$$(17)\quad \frac{dp_n(x,z,t)}{dx} = \frac{ix}{\sqrt{x^2+z^2}}k_n(x,z,t) - \frac{n}{(x+iz)}[p_n(x,z,t)+\alpha p_{n+1})\,x,z,t)]$$

und

$$(18)\quad \frac{dk_n(x,z,t)}{dx} = \frac{ix}{\sqrt{x^2+z^2}}\left[-\frac{2}{x+iz}p_{n-1}(x,z,t) - \left(\frac{2\alpha}{x+iz}-1\right)p_n(x,z,t)\right] - \frac{n}{x+iz}[k_n(x,z,t)+\alpha k_{n+1}(x,z,t)],$$

mit deren Hilfe man unseren Satz für die Zugeordnete von der allgemeinen Form $\frac{1}{(u-\alpha)^n}$ ($\alpha \neq 0$, $n$ ganz, positiv) beweisen kann.

III. Wir gehen nunmehr zu dem Fall der algebraischen Zugeordneten über, wobei wir der Kürze halber uns auf die zweiwertigen algebraischen Zugeordneten beschränken werden. Es gilt bekanntlich der Satz[8]):

Ist $j(x,z,t)$ eine algebraische in $t$ zweiwertige Funktion, die ebenfalls algebraisch von $x$ und $z$ abhängt, so läßt sich ein Ausdruck von der Form

$$(20)\qquad a(x,z,t) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu} A_\nu(x,z)\frac{d^\nu j(x,z,t)}{dx^\nu},$$

der in $t$ rational, in $x$, $z$ algebraisch ist, angeben. $A_\varkappa(x,z)$ sind algebraische Funktionen von $x$ und $z$. $\mu$ ist dabei eine endliche Zahl, die nur von dem Geschlecht und der Anzahl der Nullstellen von $j(x,z,t)$ (betrachtet als Funktion von $t$) abhängt.

Aus diesem Satz folgt nun, daß stets eine Relation von der Form

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu} A_\nu(x,z)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(it\sqrt{x^2-z^2})}{\sqrt{1-t^2}}j(x,z,t)\,dt\right] = \int_{-1}^{1}\frac{\exp.(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}a(x,z,$$

[8]) Vgl. dazu die folgenden Untersuchungen von L. Fuchs: Die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale, als Funktionen eines Parameters aufgefaßt, Math. Werke 1, Berlin 1904, S. 241—281; Über die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale genügen, und über verschiedene Arten von Differentialgleichungen für $\vartheta(0,0,0,\ldots,0)$, Werke 1, S. 343—360; Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Werke 3 (1909), S. 249—267, S. 283—295, und die Arbeit von Edward Ullrich, Die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Normalintegrale dritter Gattung als Funktionen eines Parameters aufgefaßt, Inaugural-Dissertation, Heidelberg, Leipzig 1884.

möglich ist. Auf das rechts stehende Integral lassen sich die unter I und II erhaltenen Resultate anwenden. Durch eine übliche Elimination gelangen wir zu den gesuchten Differentialgleichungen für

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp.(i\,t\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}\, j(x,z,t)\,dt.$$

Die Übertragung unserer Ergebnisse auf die mehrwertigen algebraischen Zugeordneten bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten; wir werden in unserer Arbeit darauf nicht näher eingehen, da die den Fuchsschen und Ullrichschen analogen Sätze nicht ganz allgemein bewiesen sind und wir das Eingehen auf Fragen, die mehr der Theorie der Integrale von algebraischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen angehören, hier vermeiden möchten.

Vertauscht man $x$ mit $iz$, $z$ mit $-ix$, so gelangt man zu den entsprechenden Differentialgleichungen, die $F(x,z)$, betrachtet als Funktionen von $z$, befriedigt.

Unser Satz gestattet auf das Verhalten der Funktionen $F(x,z)$ im Großen zu schließen. $F(x,z)$ mit algebraischen Zugeordneten können nur in den Nullstellen des Koeffizienten der Ableitung höchster Ordnung oder in den Singularitätsstellen irgendeines Koeffizienten der Differentialgleichung singulär sein: Die Funktionen $F(x,z)$ mit algebraischen Zugeordneten sind demnach nur auf algebraischen Flächen singulär. Wir können ebenfalls auf Grund der bekannten Sätze über die Entwicklung in der Umgebung der Singularitäten von Funktionen einer komplexen Veränderlichen die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten befriedigen, bei unseren Funktionen die entsprechenden Entwicklungen angeben[9]), worauf wir aus Raumrücksichten nicht eingehen.

Je nach der Art der Zugeordneten wird die Gestalt der algebraischen Koeffizienten der linearen Gleichungen, denen $F(x,z)$ genügt, verschieden sein. Wir können *jede Klasse unabhängig von der Darstellung* (2*) *durch die Angabe der Koeffizienten der Gleichungen, die die Funktionen der betreffenden Klasse befriedigen, charakterisieren*[9]).

---

[9]) Unter der Voraussetzung natürlich, daß man die beiden gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen, die die betreffende Funktion befriedigt, tatsächlich aufstellt, was in der Arbeit zwar nicht durchgeführt wurde, aber was prinzipiell stets möglich ist, da der Beweis des Fuchsschen Satzes die Differentialgleichung (21) zu berechnen erlaubt.

Gewisse Überlegungen, auf die wir hier nicht näher eingehen, legen die Vermutung nahe, daß die oben angegebenen Flächen stets analytische Ebenen sind.

## § 3.

### Linienintegrale von Funktionen $F(x, z)$ mit algebraischen Zugeordneten.

Wir werden im folgenden die $F(x, z)$ mit den rationalen und algebraischen Zugeordneten betrachten, wobei unsere Überlegungen stets nur in dem Zuordnungsraum $\mathfrak{Z}$ gelten werden, d. h. in dem Riemannschen Raumblatt, indem die Darstellung $(2^*)$ gilt. Diese Festsetzung werden wir im folgenden stets beibehalten, ohne es ausdrücklich hervorzuheben.

Wir werden im folgenden

I. eine Integralrelation bei den $F(x, z)$ mit der rationalen Zugeordneten angeben, die nachher für $F(x, z)$ mit algebraischen Zugeordneten verallgemeinert wird;

II. $\int_{0,0}^{x,z} F(x, z)\, d(x + iz)$ als Funktionen der oberen Grenze betrachten und diese Integrale im Zusammenhang mit den Weierstraßschen $H$-Funktionen bringen.

I. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir eine analytische Fläche des vierdimensionalen Raumes, deren Gleichung die Form

$$\sqrt{x^2 + z^2} = h(x + iz) \tag{22}$$

hat, wobei $h(U)$ eine reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen $U$ bedeutet.

Sei $F(x, z)$ eine Funktion mit der rationalen Zugeordneten

$$f(u) = \sum_k a_{0k} u^k + \sum_\varrho \sum_\varkappa \frac{a_{\varrho\varkappa}}{(u - \alpha_\varkappa)^\varrho} \qquad (\alpha_\varkappa \neq 0).$$

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Fläche von der oben definierten Art und $\mathfrak{S}$ eine auf ihr liegende, knotenfreie (im schlichten $\xi\zeta\eta\tau$-Raume) geschlossene Kurve, die im Regularitätsbereich von $F(x, z)$ liegt. Die Kurve $\mathfrak{S}$ sei ferner in dem Regularitätsbereiche von $h(x + iz)$ auf einen Punkt zusammenziehbar, während dies im Regularitätsbereiche von $F(x, z)$ unmöglich sein soll, ohne dabei einige der Singularitätenebenen von $F(x, z)$ (nämlich $\mathfrak{E}_\nu$: $x + iz = 2\alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, \mu$) zu schneiden. Sie muß dann mit den entsprechenden Trennungsräumen $\mathfrak{T}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$ gemeinsame Punkte haben und wir setzen einfachheitshalber voraus, daß die Durchsetzung mit dem $\mathfrak{T}_\nu$ je in einem Punkte $x_\nu, z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$ geschieht. (Vgl. dazu Fußnote [4]).)

Satz. *Unter den hier gemachten Voraussetzungen gilt die Formel:*

$$(23)\quad \int_{\mathfrak{C}} F(x,z)\,d(x+iz) = 4\pi i \sum_{\varrho}\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}\,\frac{d^{\varrho-1}}{d\alpha_\nu^{\varrho-1}}\left[\int_{-t_\nu}^{t_\nu} \frac{\exp.\left[ith\left(\frac{2\alpha_\nu}{1-t^2}\right)\right]}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}\,dt\right],$$

$$t_\nu = \left|\sqrt{1-\frac{2\alpha_\nu}{x_\nu+iz_\nu}}\right|.$$

Beweis. Es genügt offenbar unseren Satz für die Zugeordnete $\frac{1}{(u-\alpha)^\varrho}$ zu beweisen. Es sei zunächst $\varrho=1$, $f(u)$ habe also die Gestalt $f(u)=\frac{1}{u-\alpha}$. Der Kurve $\mathfrak{S}(s)$ $(0\leqq s\leqq 2\pi,\ \mathfrak{S}(0)=\mathfrak{S}(2\pi))$ entspreche in der komplexen $u$-Ebene die Kurvenschar $\mathfrak{z}(t;s)$. $\mathfrak{S}(s)$ schneide den Trennungsraum $\mathfrak{T}$ in dem Punkte $\mathfrak{S}(s_1)$. In jedem abgeschlossenen Intervall von $\mathfrak{S}(s)$, das $\mathfrak{S}(s_1)$ nicht enthält, ist $\frac{1}{u-\alpha}$ gleichmäßig für $-1\leqq t\leqq 1$ beschränkt. Mit $t_1$ bezeichnen wir den Wert $+\left|\sqrt{1-\frac{2\alpha}{x(s_1)+iz(s_1)}}\right|$. $\varepsilon$ soll eine kleine positive feste Zahl bedeuten. Um den Punkt $\mathfrak{S}(s_1)$ grenzen wir ein kleines Kurvenstück von $\mathfrak{S}(s_1-\varepsilon)$ bis $\mathfrak{S}(s_1+\varepsilon)$ ab, den übrigbleibenden Teil der Kurve $\mathfrak{S}(s)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}^\dagger(s)$, die Integrale längs $\mathfrak{S}^\dagger(s)$ durch $\int_0^{2\pi\dagger}$. Da $\mathfrak{S}^\dagger(s)$ ganz im Regularitätsbereiche von $F(x,z)$ liegt, so ist

$$(24)\quad \int_0^{2\pi} F(x,z)\left[\frac{d(x+iz)}{ds}\right]ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi\dagger} F(x,z)\left[\frac{d(x+iz)}{ds}\right]ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi\dagger}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(ith(x+iz))}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha}\,dt\right]\frac{d(x+iz)}{ds}\,ds,$$

da vermöge der Integraldarstellung $(2^*)$ wir bei festem $\varepsilon$ die Funktion $F(x,z)$ (auf $\mathfrak{S}^\dagger(s)$) in der Form $\int_{-1}^{1}\frac{\exp.(ith(x+iz))}{\sqrt{1-t^2}\left((x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right)}\,dt$ darstellen können.

Um die Möglichkeit der Vertauschung der Reihenfolge der Integration in (24) einzusehen, genügt es nachzuweisen, daß die Funktion $\frac{\exp.[ith(x(s)+iz(s))]}{\sqrt{1-t^2}\left[(x(s)+iz(s))\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right]}$ der beiden Veränderlichen $s$ und $t$ absolut integrierbar ist. Wir zeigen, daß

$$(25)\quad \int_{t_1}^{T}\int_{s_1}^{S}\left|\frac{1}{[x(s)+iz(s)]\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha}\right|\left|\frac{d[x(s)+iz(s)]}{ds}\,ds\right||dt|$$

endlich ist, wobei $T$ bzw. $S$ sich in einer genügend kleinen, aber festen Entfernung von $t_1$ bzw. von $s_1$ befindet. Sei

$$[x(s)+iz(s)]\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha=\varrho(s,t)\,e^{i\varphi},\qquad \varrho(s,t)\geqq 0\,.$$

Wir setzen dabei voraus, daß im Intervalle von $s_1$ bis $S$ die Funktion $\varrho(s,t)\equiv\left|[x(s)+iz(s)]\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right|$ für jedes feste $t$ $(t_1\leqq t\leqq T)$ monoton wächst. Da

$$|d(x+iz)|\leqq d\varrho+\varrho\,|d\varphi|$$

ist, so ist

$$\int_{t_1}^{T}\int_{s_1}^{S}\left|\frac{1}{[x(s)+iz(s)]\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha}\right|\left|\frac{d[x(s)+iz(s)]}{ds}\,ds\right||dt|\leqq\int_{t_1}^{T}\frac{2}{(1-t^2)}\int_{s_1}^{S}\left[\frac{d\varrho(t,s)}{\varrho(t,s)}+|d\varphi\right.$$

$$\leqq\int_{t_1}^{T}\frac{2}{1-t^2}|\log\varrho(t,S)|\,|dt|+\int_{t_1}^{T}\frac{2}{1-t^2}|\log\varrho(t,s_1)|\,|dt|+\int_{t_1}^{T}\frac{dt}{1-t^2}\int_{s_1}^{S_1}|d\varphi|\,.$$

Da nur $\log\varrho(t,s_1)$ an der Stelle $t=t_1$ unendlich wird, und zwar so wie $\log(t-t_1)$, so folgt ohne weiteres die Endlichkeit von (25). Hieraus folgt dann leicht die Existenz von

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp.[ith(x+iz)]}{\sqrt{1-t^2}\left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)-\alpha\right]}\,\frac{d(x+iz)}{ds}\,ds\,dt$$

als absolut konvergentes Doppelintegral, und es ist erlaubt, dessen Auswertung durch iterierte Integration in einer beliebigen Reihenfolge vorzunehmen[10]). (24) ist somit

$$(25^*)\qquad\int_{-1}^{1}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\exp.[ith(x+iz)]}{\sqrt{1-t^2}\left[(x+iz)\left(\frac{1+t^2}{2}\right)-\alpha\right]}\,\frac{d(x+iz)}{ds}\,ds\right\}dt$$

gleich.

Wir gehen dazu über, das Integral

$$(26)\qquad\int_0^{2\pi}\frac{\exp.[ith(x+iz)]}{\sqrt{1-t^2}[(x+iz)(1-t^2)-2\alpha]}\,\frac{d(x+iz)}{ds}\,ds$$

auszuwerten. Für alle Werte $t$, für die der Punkt sich im Innern der

---

[10]) Den Hinweis auf die Anwendbarkeit dieses Satzes und die damit verbundene Vereinfachung meines ursprünglichen Beweises für die Möglichkeit der Vertauschung der Integrationsreihenfolge verdanke ich Herrn A. Pleßner.

Kurve $\mathfrak{s}(t, s)$ befindet, also im ganzen Intervalle von $t = -t_1$ bis $t = t_1$, wird (26) uns das Residuum, d. h. $4\pi i \frac{\exp.\left[ith\left(\frac{2\alpha}{1-t^2}\right)\right]}{(\sqrt{1-t^2})^3}$ ergeben. Für die Werte von $t = -1$ bis $t = -t_1$ und von $t = t_1$ bis $t = 1$ wird die Unendlichkeitsstelle $x + iz = \frac{2\alpha}{1-t^2}$ sich außerhalb der Kurve $\mathfrak{s}(t, s)$ befinden und (26) ergibt für diese $t$ Werte Null. (26) ist eine im ganzen Intervalle beschränkte Funktion, die an den Stellen $t = -t_1$ und $t = t_1$ Sprünge erleidet. (25) ist

$$(27) \qquad \int_{-t_1}^{t_1} \frac{\exp.\left[ith\left(\frac{2\alpha}{1-t^2}\right)\right]}{(\sqrt{1-t^2})^3}\, dt$$

gleich. Die Relation (23) ist somit im Falle der Zugeordneten $f(u) = \frac{1}{u-\alpha}$ bewiesen.

In der Bezeichnungsweise

$$F^{(\varrho)}(x, z) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left(it\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(u-\alpha)^\varrho}\, dt$$

ist

$$(28) \qquad F^{(\varrho)}(x, z) = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \frac{d^{\varrho-1} F^{(1)}(x, z)}{d\alpha^{\varrho-1}}.$$

Infolge der Permanenz der Funktionalbeziehung gilt (28) überall im Regularitätsbereiche von $F^{(1)}(x, z)$, auch da, wo die Integraldarstellung (2*) ungültig ist. Es ist somit

$$(23) \qquad \int_0^{2\pi} F^{(\varrho)}(x, z) \frac{d(x+iz)}{ds}\, ds = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \frac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}} \int_0^{2\pi} F^{(1)}(x, z) \frac{d(x+iz)}{ds}\, ds$$

$$= 4\pi i \frac{(-1)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \frac{d^{\varrho-1}}{d\alpha^{\varrho-1}} \left[ \int_{-t_1}^{t_1} \frac{\exp.\left[ith\left(\frac{2\alpha}{1-t^2}\right)\right]}{(\sqrt{1-t^2})^3}\, dt \right]$$

w. z. b. w.

Es bietet keine Schwierigkeiten, unsere Betrachtungen auf den Fall, daß $f$ algebraische Funktion ist, und $h$ in dem in Betracht kommenden Bereiche auf einer algebraischen Riemannschen Fläche eindeutig ist, zu übertragen.

Sei $h(U)$ eine algebraische Funktion von $U$ $(U = x + iz)$; $S$ sei eine primitive Größe des algebraischen Funktionenkörpers, der aus den rationalen Funktionen von $h(U)$ und $f\left[U\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right]$ besteht. Sei ferner $\mathfrak{S}(s)$ eine Kurve im $xz$-Raume, der die Kurvenschar $\mathfrak{s}(t, s)$ in der $u$-Ebene ent-

spricht, die für jedes $t$ in der Riemannschen Fläche von $S$ geschlossen ist. Wir setzen voraus, daß als Integrationskurve nur solche $\mathfrak{S}(s)$ in Betracht kommen, die im Innern einer Hyperkugel liegen, deren Radius endlich und ein für alle Male fest gewählt ist (vgl. Fußnote [11]). ($\mathfrak{z}(t,s)$ kann evtl. aus mehreren getrennten geschlossenen Kurven bestehen.) Da $\mathfrak{z}(t,s)$ auf einer Riemannschen Fläche liegt, müssen wir im Sinne einer früheren Bemerkung (vgl. S. 393) an Stelle von $\int_{\mathfrak{S}(s)} F(x,z)\frac{d(x+iz)}{ds}ds$ die Summe $\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{S}_\varrho(s)} F^{(\varrho)}(x,z)\frac{d(x+iz)}{ds}ds$ betrachten, wo $F^{(\varrho)}(x,z)$ diejenigen Funktionen bedeuten, die aus den verschiedenen Zweigen von $f^{(\varrho)}(u)$ durch die Integration in $\int_{-1}^{1}\frac{\exp.\,(it\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{1-t^2}}f^{(\varrho)}(u)$ entstehen. Liegen im Innern von $\mathfrak{z}(t,s)$ keine singulären Punkte von $e^{ith(x+iz)}$, so gelangen wir durch die Wiederholung der früheren Schlüsse zur Relation

$$(29)\qquad \sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{S}_\varrho(s)} F^{(\varrho)}(x,z)\frac{d(x+iz)}{ds}ds = \sum_{\nu}\sum_{\mu=1}^{\mu=2\varrho} c_\mu^{(\nu)}\int_{-t_\nu}^{t_\nu}\frac{\omega_\mu(t)}{(\sqrt{1-t^2})^3}dt,$$

$$(29^*)\qquad \sum_{\varrho}\mathfrak{S}_\varrho(s)=\mathfrak{S},\qquad (29^{**})\qquad t_\nu=\left|\sqrt{1-\frac{2\alpha_\nu}{x(s_\nu)+iz(s_\nu)}}\right|,$$

unter der Voraussetzung, daß im Innern von $\mathfrak{z}(t,s)$ keine Pole von $f(u)$ liegen. Es bedeuten dabei: $\varrho$ das Geschlecht von $S$, $\omega_\mu(t)$ die Periodizitätsmoduln[11]) von $f(u)e^{ith(u)}$; $x+iz=\alpha_\nu$ sind die Verzweigungsebenen

[11]) $f(u)e^{ith(u)}$ ist eine transzendente Funktion, man kann aber leicht schließen, daß man auch in diesem Falle die üblichen, aus der Theorie der Integrale von algebraischen Funktionen bekannten Überlegungen wiederholen kann (sobald die Integrationskurven innerhalb einer Hyperkugel von beliebig großem, aber ein für alle Male fest gewählten Radius verlaufen).

Wir können nun innerhalb dieser Hyperkugel $e^{ith(u)}$ durch den Ausdruck $\sum_{n=0}^{n=\mu}\frac{[ith(u)]^n}{n!}$ mit beliebiger Genauigkeit approximieren. Da das Geschlecht von einem genügend großen $\mu$ an das gleiche bleibt, so läßt sich leicht folgern:

1. daß bei jedem genügend großen $\mu$

$$\int_{\mathfrak{z}(t,s)} f(u)\sum_{n=0}^{n=\mu}\frac{[ith(u)]^n}{n!}du=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=2\varrho} c_{\mu\varkappa}\omega_{\mu\varkappa}(t)$$

ist, wobei die $c_{\mu\varkappa}$ ganz sind;

2. daß $\lim_{\mu\to\infty}\omega_{\mu\varkappa}(t)=\omega_\varkappa(t)$ und $\lim_{\mu\to\infty}c_{\mu\varkappa}(t)=c_\varkappa(t)$ existieren. $c_\varkappa(t)$ müssen für jedes $t$ ganzzahlig sein.

Bei variierenden $t$ können $c_\varkappa(t)$ nur dann einen Sprung erleiden, wenn die Kurve $\mathfrak{z}(t,s)$ einen Verzweigungspunkt passiert. Die Werte von $t$, für die dies zutrifft, sind durch (29**) gegeben.

von $F(x, z)$, die im Innern von $\mathfrak{S}(s)$ liegen. $\alpha_\nu$ sind die Verzweigungspunkte von $f(u)$. $x(s_\nu)$, $z(s_\nu)$ sind die Durchstoßpunkte der Kurve $\mathfrak{S}(s)$ mit den Trennungsmannigfaltigkeiten

$$x + iz = \frac{2\alpha_\nu}{1-t^2} \qquad (-1 \leqq t \leqq 1), \tag{30}$$

$c_\mu^{(\nu)}$ sind ganze Zahlen. $\sum_{\mathfrak{y}}$ ist in folgendem Sinne zu verstehen: $\mathfrak{s}(t, s)$ liegt im allgemeinen auf einigen Blättern der Riemannschen Fläche von $f(u)$, etwa auf den Blättern, die den Zweigen $f^{(q)}(u)$ $(q = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ entsprechen. $\mathfrak{s}_q(t, s)$ soll denjenigen Teil von $\mathfrak{s}(t, s)$ bedeuten, der in der Riemannschen Fläche, die dem Zweig $f^{(q)}(u)$ entspricht, liegt. Bedeutet nun

$$F^{(q)}(x, z) = \int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left(i\,t\,\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}\, f^{(q)}(u)\, dt \quad (q = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

und bildet man die Integrale $\int_{\mathfrak{S}_q} F^{(q)}(x, z)\, d(x + iz)$ $(q = 1, 2, \ldots, \varkappa)$, so soll $\sum_q$ die Summation über diese $\varkappa$ Integrale bedeuten. $\mathfrak{S}_q$ sind Kurvenstücke, die den $\mathfrak{s}_q(t, s)$ entsprechen und deren Gesamtheit die Kurve $\mathfrak{S}$ ergibt.

II. Es läßt sich bekanntlich in jedem algebraischen Funktionenkörper eine endliche Anzahl von Normalintegralen angeben, derart, daß jedes Integral sich als eine lineare Verbindung mit konstanten Koeffizienten, diese Normalintegrale vermehrt um eine algebraische Funktion, darstellen läßt.

Diese Sätze lassen sich unmittelbar auf unsere Funktionen übertragen.

Wir werden im folgenden mit $H_\nu(u)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ die Weierstraßschen Integranden erster, zweiter und dritter Gattung bezeichnen. $\mathfrak{C}$ soll ein differentiierbares Kurvenstück bedeuten, das auf $\mathfrak{M}$ liegt und dessen Endpunkte mit $x, z$ bzw. $x_1, z_1$ bezeichnet werden. Man kann nun die Integrale $\int_{\mathfrak{C}} F(x, z)\, d(x + iz)$ je nach der Zugehörigkeit der Zugeordneten $f(u)$ (bei fest gewähltem $\mathfrak{M}$) zu einem algebraischen Körper in Klassen verteilen.

*Es lassen sich nur zu jeder Klasse eine endliche Anzahl von Funktionen*

$$\left[\int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left[i\,t\,h\,(x+iz)\right]}{\sqrt{1-t^2}}\, H_\nu(u)\, dt\right] d(x + iz) = \int_{-1}^{1}\left[\int_{u_1}^{u} \frac{\exp.\left[i\,t\,h\left(\frac{2u}{1-t^2}\right)\right]}{\sqrt{1-t^2}}\, H_\nu(u)\, du\right] dt,$$

$$\left(u = (x + iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right), \quad u_1 = (x_1 + iz_1)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right),$$

*die nur von der Klasse und von der Fläche $\mathfrak{M}$, auf der die Integrationskurve $\mathfrak{C}$ liegt, abhängen, angeben, derart, daß jedes Integral unserer Klasse*

*sich in der Form*

$$(31)\quad \sum C_\nu \int_{-1}^{1} \left[ \int_{u_1}^{u} \frac{\exp.\left[i\,t\,h\left(\frac{2u}{1-t^2}\right)\right]}{\sqrt{1-t^2}} H_\nu(u)\,du \right] dt + \int_{-1}^{1} \frac{\exp.\left[i\,t\,h\left(\frac{u}{1-t^2}\right)\right]}{\sqrt{1-t^2}} a(u)\,dt$$

*darstellen läßt.* $C_\nu$ sind dabei Konstanten, $a(u)$ eine algebraische Funktion von $u$.

Ist $h(u)$ eine algebraische Funktion von $u$, so lassen sich in gleicher Weise wie $\int F(x,z)\,d(x+iz)$ die Integrale $\int F(x,z)\,d(x-iz)$ behandeln:

Berücksichtigt man, daß wir längs einer Kurve, die auf einer algebraischen Fläche liegt, integrieren, und daß $x-iz=b(x+iz)$ ist, wobei $b$ eine algebraische Funktion bedeutet, so dürfen wir offenbar alle unsere früheren Überlegungen im Falle I (S. 400ff.) wiederholen.

Bedeuten $H_\nu(u)$ den Weierstraßschen Normalintegranden des Funktionenkörpers von $f(u)$, $\overline{H}_\nu(x+iz)$ den Normalintegranden des Körpers von $b'(x+iz)$, so ist

$$(32)\quad \int_{\mathfrak{C}} F(x,z)\,d(x-iz) = \int_{\mathfrak{C}} F(x,z)\,b'(x+iz)\,d(x+iz)$$

$$= \sum_{\nu,\mu} C_{\nu\mu} \int_{\mathfrak{C}} \left[ \int_{-1}^{1} \frac{\exp.[i\,t\,h(x+iz)]}{\sqrt{1-t^2}} H_\nu\left[(x+iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right)\right] \overline{H}_\mu(x+iz)\,dt \right] d(x+iz$$

wobei $C_{\nu\mu}$ Konstanten bedeuten.

(Eingegangen am 3. September 1929.)

# Ein Existenztheorem der Flächen konstanter Krümmung.

Von

Anton Vakselj in Laibach (Südslawien).

In der Theorie der Flächen beweist man, daß man jede Fläche auf unendlich viele Weisen so verbiegen kann, daß eine auf ihr beliebig gegebene Kurve zur Krümmungslinie wird. Die Flächen konstanter Krümmung lassen eine Erweiterung der Voraussetzungen zu, die zur eindeutigen Bestimmung der deformierten Fläche führt: Ist zum Beispiel im gewöhnlichen Raume eine Kurve $\mathfrak{C}$ gegeben, die Krümmungslinie einer durch sie gelegten Torse ist, so gibt es eine und nur eine Fläche konstanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$, die die Torse längs $\mathfrak{C}$ berührt und also die Kurve $\mathfrak{C}$ als Krümmungslinie enthält[1]). Im Gegensatz zu dieser „äußeren" Bedingung behandle ich in diesem Aufsatz folgende „innere" Bedingung:

*Es werde auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung eine Kurve und auf dieser eine Funktion der Bogenlänge beliebig gewählt. Gefragt wird nach den Verbiegungen, welche die Eigenschaft haben, daß auf der neuen Fläche die gegebene Kurve zur Krümmungslinie wird und daß der ihr zugeordnete Hauptkrümmungsradius der Fläche die durch die gegebene Funktion bestimmten Werte annimmt.*

Mit anderen Worten: Gefragt wird nach Realisierung als Fläche einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit von konstanter negativer Krümmung in der Art, daß eine auf der Mannigfaltigkeit gewählte Kurve so zur Krümmungslinie der Fläche wird, daß der der Kurve zugeordnete Hauptkrümmungsradius der Fläche Werte annimmt, die durch eine gegebene Funktion der Bogenlänge der Kurve vorgeschrieben sind.

Im ersten und zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes bringe ich die Mittel zum Beweise, im dritten aber den Beweis des Satzes für den analytischen Fall.

---

[1]) L. Bianchi, Lez. di Geom. Diff. 1 (1922), § 244.

## I.

Ich zeige, daß bei Flächen konstanter Krümmung die Krümmungslinien eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen, die durch die erste Differentialform allein bestimmt wird. Die Untersuchung werde bei Flächen konstanter negativer Krümmung durchgeführt.

Unter den Flächen konstanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ mit der ersten Differentialform $g_{ik}dx^i dx^k$ werde eine Fläche durch passende Angabe der zweiten Differentialform $a_{ik}dx^i dx^k$ individualisiert. Diese Differentialformen erhalten, wenn wir sie durch eine geeignete Transformation $x^i = x^i(u^1, u^2)$, $u^i = u^i(x^1, x^2)$, $i = 1, 2$ auf Krümmungslinien beziehen, die Gestalt[2]):

$$\bar{g}_{ik}du^i du^k \equiv R^2(\cos^2\theta\, du^1 du^1 + \sin^2\theta\, du^2 du^2), \tag{1}$$

$$\bar{a}_{ik}du^i du^k \equiv -R\sin\theta\cos\theta(du^1 du^1 - du^2 du^2). \tag{2}$$

Dabei ist $\theta$ eine Funktion von $u^1$ und $u^2$, die der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2 \partial u^2} = \sin\theta\cos\theta \tag{3}$$

genügt, welche aussagt, daß die Differentialform (1) die Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ besitzt.

Die Koeffizienten der transformierten ersten Differentialform $\bar{g}_{ik}du^i du^k$ erfüllen die Gleichungen:

$$\bar{g}_{11} + \bar{g}_{22} = R^2, \quad \bar{g}_{12} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichungen legen nun eine bestimmte Gestalt der ersten Differentialform fest. Im allgemeinen kann man diese Gestalt in Krümmungslinienkoordinaten auf eine einzige Weise erreichen, denn wir werden sehen, daß die eben benutzte Transformation $u^i = u^i(x^1, x^2)$ bis auf Translationen und Spiegelungen bestimmt ist. Ist in der Tat $v^i = v^i(x^1, x^2)$ eine weitere Transformation von denselben Eigenschaften, so bestehen bei geeigneter Wahl der Indizes die Beziehungen:

$$v^1 = \varphi(u^1), \quad v^2 = \psi(u^2),$$

weil ja die Kurven $v^i = \text{konst.}$ ebenfalls Krümmungslinien sind. Aus

$$R^2[\cos^2\theta\, dv^1 dv^1 + \sin^2\theta\, dv^2 dv^2]$$
$$= R^2\left[\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{du^1}\right)^2 du^1 du^1 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{du^2}\right)^2 du^2 du^2\right]$$

---

[2]) Vgl. Bianchi 1, § 245.

folgt, da die rechte Seite wieder von der durch (4) festgelegten Gestalt ist, für die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ folgende Gleichung:

$$\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{du^1}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{du^2}\right)^2=1=\cos^2\theta+\sin\theta$$

oder

$$\left(\frac{d\varphi}{du^1}\right)^2-1=\left[1-\left(\frac{d\psi}{du^2}\right)^2\right]\operatorname{tg}^2\theta. \tag{5}$$

Ist $\left(\frac{d\varphi}{du^1}\right)^2=1$, so ist auch $\left(\frac{d\psi}{du^2}\right)^2=1$; die beiden Transformationen $u^i=u^i(x^1,x^2)$ und $v^i=v^i(x^1,x^2)$ unterscheiden sich in diesem Falle nur durch Translationen und Spiegelungen. Im Falle $\left(\frac{d\varphi}{du^2}\right)^2+1$ ist $\left(\frac{d\varphi}{du^1}\right)^2-1$ eine Funktion von $u^1$, $1-\left(\frac{d\psi}{du^2}\right)^2$ von $u^2$ und die Gleichung (5) gleichbedeutend mit:

$$U^1=U^2\operatorname{tg}\theta,$$

wo $U^i$ eine Funktion von $u^i$ allein bedeutet. Durch Ableitung finden wir

$$\frac{dU^2}{du^2}\sin 2\theta+2U^2\frac{\partial\theta}{\partial u^2}=0,$$

$$2\frac{dU^2}{du^2}\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial u^1}+2U^2\frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2}=0$$

oder endlich für $\theta$ folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2}-2\operatorname{cotg}2\theta\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\frac{\partial\theta}{\partial u^2}=0. \tag{6}$$

Die Transformation $u^i=u^i(x^1,x^2)$ ist also im wesentlichen die einzig mögliche außer im Falle, daß $\theta$ den beiden Differentialgleichungen (3) und (6) genügt. Durch ziemlich weitläufige Eliminationen findet man, daß die gemeinsame Lösung von (3) und (6) noch eine der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\theta}{\partial u^1}=0,\qquad\frac{\partial\theta}{\partial u^2}=0$$

erfüllt. Die entsprechenden Flächen sind bekanntlich[3]) Schraubenflächen konstanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$. In diesem Falle gibt es unendlich viele Transformationen $u^i=u^i(x^1,x^2)$, die alle von einer nicht-additiven Konstanten abhängen und die auf ebenso viele verschiedene Ausdrücke von der Art (1) für die erste Differentialform führen:

*Jeder Fläche konstanter negativer Krümmung mit gegebenem $g_{ik}dx^idx^k$ entspricht im allgemeinen eine bis auf Translationen und Spiegelungen eindeutig bestimmte Transformation der ersten Differentialform auf die Gestalt* (1). *Für eine Schraubenfläche solcher Krümmung gibt es unendlich*

[3]) Vgl. Bianchi 1, § 250.

*viele derartige Transformationen und ihnen zugeordnete erste Differentialformen von der Gestalt* (1). *Diese Transformationen hängen von einer nicht-additiven Konstanten ab.*

Jetzt untersuchen wir ob man jeder solchen Transformation eine bestimmte Fläche zuordnen kann. Führen wir die gegebene Transformation aus, so erhält die erste Differentialform die Gestalt (1). Wir verlangen die Auffindung aller jenen Flächen mit (1), die die Kurven $u^i = \text{konst.}$ zu Krümmungslinien haben. Wir suchen also zur ersten Differentialform $\bar{g}_{ik}\,du^i du^k$ alle zulässigen zweiten Differentialformen $\bar{a}_{ik}\,du^i du^k$ mit $\bar{a}_{12}=0$. Die beiden Koeffizienten $\bar{a}_{11}$ und $\bar{a}_{22}$ genügen folgendem Systeme von Gleichungen[4]):

$$\frac{\partial \bar{a}_{11}}{\partial u^2} - \Gamma_{12}^1 \bar{a}_{11} + \Gamma_{11}^2 \bar{a}_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{a}_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^1 \bar{a}_{11} - \Gamma_{21}^2 \bar{a}_{22} = 0,$$

$$\frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}} = -\frac{1}{R^2}.$$

Setzen wir $\bar{a}_{ik} = \frac{1}{R}\sqrt{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}}\cdot b_{ik} = R\sin\theta\cos\theta\cdot b_{ik}$ und berechnen die Werte der obigen Christoffelschen Symbole $\Gamma_{ik}^{\varrho} = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \varrho \end{matrix} \right\}$, so bekommen wir für $b_{11}$ und $b_{22}$ die Gleichungen:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + (b_{11} + b_{22})\operatorname{cotg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - (b_{11} + b_{22})\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u^1} = 0,$$

$$b_{11}\,b_{22} = -1.$$

Durch Einsetzen von $b_{22} = -\frac{1}{b_{11}}$ in die beiden ersten, ergeben sich für $b_{11}$ zwei lineare partielle Differentialgleichungen, deren Integrabilitätsbedingung lautet:

$$(7)\qquad \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\,\partial u^2} - 2\operatorname{cotg}2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\,\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)(b_{11}^2\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta)\left(b_{11} - \frac{1}{b_{11}}\right) = 0.$$

Der zweite Faktor gibt die imaginäre Kugel, der letzte Faktor die Lösung (2). Diese geben im allgemeinen die einzigen Flächen mit der Differentialform (1) und den Krümmungslinien $u^i = \text{konst.}$ Eine Ausnahme bilden wieder die Schraubenflächen konstanter negativer Krümmung, für welche der erste Faktor von (7) verschwindet. Ist zum Beispiel $\theta = \theta(u^1)$, so finden wir:

$$(8)\qquad \bar{a}_{11} = -R\sin\theta\cos\theta\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{C+\cos^2\theta}},\quad \bar{a}_{12}=0,\quad \bar{a}_{22} = R\sin\theta\cos\theta\,\frac{\sqrt{C+\cos^2\theta}}{\cos\theta}.$$

---

[4]) Vgl. Bianchi 1, § 67.

Die entsprechenden Flächen hängen von der Integrationskonstanten $C$ ab. Für $C = 0$ erhält man wieder die Fläche (2). Alle diese Flächen unterscheiden wir am besten voneinander, wenn wir die Werte des Hauptkrümmungsradius zum Beispiel längs der Linie $u^1 = \text{konst.}$ vergleichen. Es ist

$$(8^*) \qquad R_1 = \frac{\bar{g}_{22}}{\bar{a}_{22}} = R\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{C+\cos^2\theta}};$$

es hängt $R_1$ in der Tat von $C$ ab.

Also: *Jeder Transformation der Differentialform $g_{ik}dx^i dx^k$ auf die Gestalt* (1) *entspricht im allgemeinen eine einzige Fläche konstanter negativer Krümmung. Ist die entsprechende Fläche Schraubenfläche, so gibt es deren unendlich viele, die alle von einer Integrationskonstante abhängen.*

## II.

Transformieren wir die erste Differentialform $g_{ik}dx^i dx^k$ durch das System

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \qquad u^i = u^i(x^1, x^2) \qquad (i = 1, 2);$$

so sind, da

$$\bar{g}_{12} = \frac{-\nabla(u^2, u^1)}{\nabla(u^1, u^1)\nabla(u^2, u^2) - \nabla^2(u^2, u^1)} = 0$$

sein soll, die Koeffizienten der transformierten Form gegeben durch die Formeln:

$$(9) \qquad \bar{g}_{11} = \frac{1}{\nabla(u^1, u^1)}, \qquad \bar{g}_{22} = \frac{1}{\nabla(u^2, u^2)}.$$

Das Symbol $\nabla(\varphi, \psi)$ bedeutet den Operator

$$\nabla(\varphi, \psi) = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}.$$

Da

$$\nabla(u^2, u^1) = \left(g^{11}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \left(g^{21}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + g^{22}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0$$

ist, können wir in Analogie zur Auffindung der isothermen Parameter setzen

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} &= \mu\left(g^{21}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + g^{22}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\right), \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^2} &= -\mu\left(g^{11}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\right). \end{aligned}$$

Der Wert von $\mu$ folgt aus der Bedingung $\bar{g}_{11} + \bar{g}_{22} = R^2$. Da

$$\nabla(u^2, u^2) = \mu^2(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})\nabla(u^1, u^1)$$

ist, findet man für $\mu$ den Ausdruck

$$(11) \qquad \mu = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{R^2\nabla(u^1, u^1) - 1}},$$

wo $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \dfrac{1}{g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}}$ ist.

Unter Berücksichtigung von (11) ergibt (10) als Integrabilitätsbedingung für $u^1$ die Differentialgleichung:

$$(12)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{g_{22}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}-g_{21}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}}{\sqrt{g}\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}-g_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\sqrt{g}\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}}\right)\right\}=0,$$

die wir invariant schreiben können:

$$(13)\qquad \frac{\Delta(u^1)}{\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}}+V\left(u^1,\ \frac{1}{\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}}\right)=0.$$

Das Symbol $\Delta(\varphi)$ bedeutet der Operator:

$$\Delta(\varphi)=g^{ik}\varphi_{ik}=g^{ik}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}-\Gamma^{\varrho}_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\varrho}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{22}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}-g_{21}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}}{\sqrt{g}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}-g_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\sqrt{g}}\right)\right\}.$$

Teilweise durchgerechnet lautet diese Gleichung:

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial u^1}{\partial x^2}-\frac{g_{22}}{R^2}\right)u^1_{11}-2\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}-\frac{g_{12}}{R^2}\right)u^1_{12}+\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}-\frac{g_{11}}{R^2}\right)u^1_{22}=0,$$

wo wiederum

$$u^1_{ik}=\frac{\partial^2u^1}{\partial x^i\partial x^k}-\Gamma^{\varrho}_{ik}\frac{\partial u^1}{\partial x^{\varrho}}$$

ist. Diese Form wird uns noch nützlich sein.

Die Funktion $u^2$ erfüllt ebenfalls, wie leicht ersichtlich, die Differentialgleichung (13).

Der Ausdruck $\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}$ besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Der Hauptkrümmungsradius der Fläche (1), (2) für die Kurven $u^1=\text{konst.}$ ist nach (9) und (10):

$$(15)\qquad R_1=\frac{\bar{g}_{22}}{\bar{a}_{22}}=R\,\mathrm{tg}\,\theta=R\,\frac{\bar{g}_{22}}{\sqrt{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}}}=R\sqrt{R^2V(u^1,u^1)-1}.$$

Die vorstehende Untersuchung ergibt, daß *die speziellen Koordinaten* $u^i=u^i(x^1,x^2)$, *die der ersten Differentialform die Gestalt* (1) *verleihen, bei welchen die Kurven* $u^i=\text{konst.}$ *Krümmungslinien sind und die im allgemeinen vollkommen bestimmt sind, der Differentialgleichung* (13) *genügen.*

Ich nenne sie besonders in Hinblick auf den Ausdruck (16) *die natürlichen Krümmungslinienkoordinaten* der betrachteten Fläche konstanter Krümmung.

## III.

Auf der Fläche konstanter Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ mit der ersten Differentialform $g_{ik}\,dx^i dx^k$ sei nun eine analytische Kurve $\mathfrak{C}$

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, 2)$$

vorgelegt, auf dieser die analytische Funktion $\varphi(s)$ definiert. Um jene Flächen konstanter Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ zu finden, die $\mathfrak{C}$ als Krümmungslinie besitzen und deren Hauptkrümmungsradius längs $\mathfrak{C}$ die Werte $\varphi(s)$ annimmt, müssen wir zuerst die natürlichen Krümmungslinienkoordinaten $u^1, u^2$ der gesuchten Flächen bestimmen. Die Koordinaten $u^1, u^2$ als Funktionen von $x^1, x^2$ genügen aber der Differentialgleichung (14) und insbesondere soll $u^1 = u^1(x^1, x^2)$ ein Integral dieser Gleichung sein. Die gestellten Bedingungen bestimmen eindeutig eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (14). Das gesuchte Integral $u^1 = u^1(x^1, x^2)$ sei erstens für die Werte $x^i = x^i(s)$ gleich Null

$$u^1[x^1(s), x^2(s)] = 0$$

und zweitens sollen längs der Kurve $\mathfrak{C}$ die ersten Ableitungen $\frac{\partial u^1}{\partial x^1}, \frac{\partial u^1}{\partial x^2}$ folgenden Gleichungen genügen:

$$du^1 = \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\,dx^2 = 0, \qquad R_1 = R\sqrt{R^2 V(u^1, u^1) - 1} = \varphi(s).$$

Die zweite Gleichung entspricht nach (15) der Bedingung, daß der Hauptkrümmungsradius $R_1$ gleich $\varphi(s)$ sei. Längs $\mathfrak{C}$ sind also auch die Werte von $\frac{\partial u^1}{\partial x^1}$ und $\frac{\partial u^1}{\partial x^2}$ als Funktion von $s$ bekannt. Dies ist aber das Cauchysche Problem für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, daß im allgemeinen eine einzige vollkommen bestimmte Lösung besitzt. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die gegebene eindimensionale Mannigfaltigkeit

$$x^i = x^i(s), \qquad u^1 = 0, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \varphi_i(s) \qquad (i = 1, 2),$$

eine charakteristische ist. Für solche Mannigfaltigkeiten verschwindet aber der Ausdruck:

$$R_{11}\,dx^2 dx^2 - R_{12}\,dx^1 dx^2 + R_{22}\,dx^1 dx^1,$$

wo $R_{ik}$ die Ableitung der Differentialgleichung (14) nach $\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^i \partial x^k}$ bedeutet. Im gegenwärtigen Falle reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$du^1 du^1 - g_{ik}\,dx^i dx^k \tag{16}$$

und endlich auf $-g_{ik}\,dx^i dx^k$, da längs $\mathfrak{C}$ $du^1 = 0$ ist. Der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der gegebenen Fläche ist die einzige Beschränkung auferlegt keine Minimalkurve zu sein.

Zur schließlichen Auffindung der gesuchten Fläche berechnen wir zu der eben gefundenen Lösung $u^1 = u^1(x^1, x^2)$ aus dem linearen System (10) die konjugierte Lösung $u^2 = u^2(x^1 x^2)$. Die zu $u^i = u^i(x^1, x^2)$ inverse Transformation bringt dann die erste Differentialform $g_{ik}\,dx^i dx^k$ auf die Gestalt (1). Daraus bestimmen wir den Wert der Funktion $\theta$, mit welcher wir im allgemeinen die Form (2) und im speziellen Falle der Schraubenflächen die Differentialformen mit den Koeffizienten (8) aufbauen. Unter diesen von der Konstanten $C$ abhängenden unendlich vielen Formen sind aber für unsere Zwecke nur jene brauchbar, für welche der erste Hauptkrümmungsradius die vorgegebenen Werte $\varphi(s)$ erhält. Nach (8*) hängen diese Werte von der Konstanten $C$ ab:

$$R_1 = R\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{C^2+\cos^2\theta}},$$

während nach (15) die Werte $\varphi(s)$ den Werten $R\,\mathrm{tg}\,\theta$ gleich sind:

$$R_1 = \varphi(s) = \sqrt{R^2 V(u^1, u^1) - 1} = R\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Die Konstante $C$ ist also gleich Null; wir finden auch im Falle der Schraubenflächen die Differentialform (2) als die einzig mögliche.

Die Fläche mit den beiden Differentialformen (1) und (2) und nur diese ist die gesuchte Fläche.

(Eingegangen am 7. Januar 1930.)

# Über nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Der Hadamardsche Lückensatz hat eine Reihe von Verallgemeinerungen erfahren, die darauf hinauslaufen, die Nichtfortsetzbarkeit einer Potenzreihe

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

durch eine Lückenbedingung zu sichern, die weniger fordert, als die ursprüngliche Hadamardsche Lückenbedingung:

A. Die Hadamardsche Bedingung[1]) fordert, daß für ein $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$ alle Koeffizienten $a_n$, die der $\vartheta$-Umgebung[2]) eines nichtverschwindenden Koeffizienten $a_{n_\nu}$ angehören, außer $a_{n_\nu}$ selbst verschwinden.

B. Es genügt jedoch schon[3]), daß in der Folge $(a_{n_\nu})$ aller nichtverschwindenden Koeffizienten eine Teilfolge $a_{n_{\varrho_1}}, a_{n_{\varrho_2}}, \ldots, a_{n_{\varrho_\nu}}, \ldots$ mit $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[n_{\varrho_\nu}]{|a_{n_{\varrho_\nu}}|} = 1$ existiert, derart, daß alle $a_n$, die der $\vartheta$-Umgebung eines $a_{n_{\varrho_\nu}}$ angehören, außer $a_{n_{\varrho_\nu}}$ selbst verschwinden $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

C. Nach Fabry[4]) kann die Forderung B noch so gemildert werden, daß in der $\vartheta$-Umgebung jedes $a_{n_{\varrho_\nu}}$ eine Anzahl, $k_\nu$, nichtverschwindender

---

[1]) J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Journ. de Math. pures et appl. (4), **8** (1892), p. 101—186, insbes. p. 116.

[2]) „$\vartheta$-Umgebung" von $a_N$ heißt die Gesamtheit der Koeffizienten $a_n$, deren Indizes den Ungleichungen $N - \vartheta N \leqq n \leqq N + \vartheta N$ genügen.

[3]) J. Hadamard, loc. cit. [1]), p. 117.

[4]) E. Fabry, Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers, Acta Math. 22 (1899), p. 65—87, insbes. p. 86. Der Satz ist in einem allgemeineren Fabryschen Satz enthalten, der sich schon in E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux, Ann. Éc. Norm. (3), **13** (1896), p. 367—399 findet, vgl. hierzu E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. (1929), § 19, insbes. S. 81, Satz 1.

Koeffizienten $a_n$ auftreten darf, es muß nur $\lim_{\nu\to\infty}\frac{k_\nu}{n_{\varrho_\nu}}=0$ sein. (Als Spezialfall ist hierin der „Fabrysche Lückensatz“ enthalten.)

D. Endlich hat neuerdings Pólya[5]) gezeigt, daß die „zweiseitige“ Forderung C noch zu einer „einseitigen“ herabgedrückt werden kann. Bezeichnet nämlich $l_\nu$ bzw. $r_\nu$ die Anzahl der nichtverschwindenden Koeffizienten $a_n$ aus der $\vartheta$-Umgebung von $a_{n_{\varrho_\nu}}$ links bzw. rechts von $a_{n_{\varrho_\nu}}$, so braucht nur $\lim_{\nu\to\infty}\frac{l_\nu}{n_{\varrho_\nu}}=0$ *oder* $\lim_{\nu\to\infty}\frac{r_\nu}{n_{\varrho_\nu}}=0$ zu sein.

Alle diese Verallgemeinerungen haben gemeinsam, daß sie eine Aussage über die *Anzahl* der nichtverschwindenden Koeffizienten in einer unendlichen Folge von *$\vartheta$-Umgebungen* nichtverschwindender Koeffizienten machen. Die *$\vartheta$-Umgebungen* sind dabei wesentlich, d. h. man kann zu keiner Lückenbedingung für die Nichtfortsetzbarkeit kommen, die *nur* eine Forderung für die Anzahl der nichtverschwindenden Koeffizienten in irgendeiner unendlichen Folge von Umgebungen *niedrigerer Ordnung* enthält, denn man kann leicht Beispiele fortsetzbarer Potenzreihen angeben, die eine Teilfolge nichtverschwindender Koeffizienten $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$ mit $\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|}=1$ besitzen, derart, daß alle Koeffizienten $a_n$ verschwinden, deren Indizes einer der Ungleichungen $n_\nu-\frac{n_\nu}{\varphi(n_\nu)}\leqq n\leqq n_\nu+\frac{n_\nu}{\varphi(n_\nu)}$ $(n\neq n_\nu)$, $(\nu=1,2,\ldots)$ genügen, wobei $\varphi(n)$ eine beliebige, nur mit $n$ monoton gegen unendlich gehende Funktion bedeutet[6]).

---

[5]) G. Pólya, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen **99** (1928), S. 687–706; insbes. Fußnote [18]) auf S. 703.

[6]) Zum Beweis dieser Behauptung vgl. F. Lösch, Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 725–753, insbes. S. 746 ff., wo sich ein Beispiel für den Fall $\varphi(n)=n^\alpha$ $(\alpha>0)$ findet. Will man ein Beispiel für ein beliebiges $\varphi(n)$ konstruieren, so führe man die zu $\varphi(n)$ inverse Funktion $\Phi(n)$ ein und betrachte die Zahlengruppen

$$\Phi(2^\nu)-\frac{\Phi(2^\nu)}{2^\nu},\ \Phi(2^\nu)-\frac{\Phi(2^\nu)}{2^\nu}+1,\ \ldots,\ \Phi(2^\nu)-1,\ \Phi(2^\nu)+1,\ \ldots,\ \Phi(2^\nu)+\frac{\Phi(2^\nu)}{2^\nu}-1,\ \Phi(2^\nu)+$$
$$(\nu=1,2,\ldots).$$

Diese Gruppen ordnen wir für $\nu=1,2,\ldots$ hintereinander an und bezeichnen die ihnen angehörenden Zahlen in dieser Reihenfolge mit

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots.$$

Dann beweist man genau wie in dem zitierten Beispiel, daß

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{p_n^2}\right)$$

(Fortsetzung der Fußnote [6]) auf nächster Seite.)

Es zeigt sich jedoch, daß man unter Umständen die für die Lücken notwendige Größenordnung erheblich reduzieren kann, wenn für die Größenordnung der nichtverschwindenden Koeffizienten gewisse Voraussetzungen erfüllt sind [7]). Im folgenden soll eine Lückenbedingung für die Nichtfortsetzbarkeit einer Potenzreihe bewiesen werden, bei der die Lückengröße direkt als Funktion der Größenordnung der nichtverschwindenden Koeffizienten erscheint.

Satz. *Die Potenzreihe*

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

*ist nicht über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar, wenn eine positive, nicht abnehmende Funktion $\varphi(n)$, die zudem den Bedingungen*

$$(\alpha) \quad \frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)} = O(1), \qquad (\beta) \quad \frac{\log n \cdot \varphi(n)}{n} = o(1)$$

*genügt, existiert, so daß*

a) $|a_n| < n^{K\varphi(n)}$ ($K$ *beliebige Konstante*, $n = 1, 2, \ldots$),

b) *für eine unendliche Teilfolge* $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$ *der* $a_n$

$$|a_{n_\nu}| > n^{-K\varphi(n_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

c) *alle Koeffizienten* $a_n$, *deren Indizes den Ungleichungen*

$$n_\nu - \left[\sqrt{n_\nu \log n_\nu \varphi(n_\nu)}\right] \leqq n \leqq n_\nu + \left[\sqrt{n_\nu \log n_\nu \varphi(n_\nu)}\right]$$

*genügen, außer* $a_{n_\nu}$ *selbst, verschwinden* ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Wir schicken dem Beweis einige Bemerkungen voraus:

1. Bemerkung. Die Funktion $\varphi(n)$ darf insbesondere eine positive Konstante sein. Der Satz besagt dann, daß man sich auf Lücken von der Größenordnung $\sqrt{n \log n}$ beschränken kann, wenn $|a_n| < n^K$, $|a_{n_\nu}| > \frac{1}{n_\nu^K}$ für eine passende Konstante $K > 0$ ist.

---

eine ganze Funktion ist, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört; daher hat nach dem Satz von Wigert und dem Hadamardschen Multiplikationssatz

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

auf $|z| = 1$ nur den singulären Punkt $z = 1$, während es andrerseits die Teilfolge $b_{\Phi(2^\nu)}$ nichtverschwindender Koeffizienten mit $\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\Phi(2^\nu)]{|b_{\Phi(2^\nu)}|} = 1$ besitzt, in deren Umgebung von der Größe $\frac{\Phi(2^\nu)}{2^\nu}$ alle übrigen $b_n$ verschwinden.

[7]) Bedingungen, bei denen Forderungen für das Verschwinden gewisser Koeffizienten mit solchen für die Größenordnung anderer kombiniert sind, finden sich schon bei Fabry, loc. cit. [4]). Vgl. auch Pólya, loc. cit. [5]), und „Über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 549–640, insbes. Fußnote [52]) auf S. 626.

2. Bemerkung. Die Voraussetzung ($\beta$) ist für den Beweis geschickt und ist zudem unwesentlich. Ist sie nämlich nicht erfüllt, so bekommt man in c) Lücken von der Größenordnung $n$, der Satz geht also dann in Satz B über, der somit hier als Grenzfall erscheint.

3. Bemerkung. Wie man aus dem nachfolgenden Beweis leicht erkennen kann, läßt sich der Satz noch insofern verschärfen, als die Voraussetzung a) nur von denjenigen $a_n$ erfüllt zu sein braucht, die für ein $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$ den $\vartheta$-Umgebungen der $a_{n_\nu}$ angehören. So aufgefaßt ersetzt der Satz die Forderung für die Anzahl der nichtverschwindenden Koeffizienten in den $\vartheta$-Umgebungen der $a_{n_\nu}$ durch eine solche für die Größenordnung jener Koeffizienten. (Die $a_{n_\nu}$ selbst brauchen übrigens a) nicht zu erfüllen.)

Beweis. Zum Beweis beachten wir, daß die Funktion

$$z = y\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1}\,y\right) \qquad (k \text{ ganz, positiv}) \tag{2}$$

in der ganzen $y$-Ebene regulär ist und für $|y| \leqq 1 + \varepsilon$ nur Werte annimmt, die im Innern der Vereinigungsmenge aus $|z| < 1$ und einer beliebig kleinen Umgebung von $z = 1$ liegen, wenn nur $\varepsilon$ hinreichend klein gewählt wird. Ist daher $f(z)$ im Punkte $z = 1$ regulär, so ist die Funktion

$$F(y) = f\left[y\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1}\,y\right)\right] \tag{3}$$

in einem gewissen Kreis $|y| \leqq 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ regulär, ihre Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt hat also einen Konvergenzradius $> 1$. Diese Potenzreihenentwicklung erhält man aber einfach, indem man in (1) für $z$ den Wert (2) einsetzt und nach Potenzen von $y$ umordnet, denn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \left[\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1}\,y\right]^n$$

konvergiert etwa für $|y| \leqq \frac{1}{2}$ gleichmäßig, darf daher nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz nach $y$ geordnet werden und ergibt so die Potenzreihenentwicklung von $F(y)$. Eine leichte Rechnung liefert so für $F(y)$ die Potenzreihe

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n, \tag{4}$$

wobei

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-\nu}{\nu} \frac{k^{n-2\nu}}{(k+1)^{n-\nu}}\, a_{n-\nu} \tag{5}$$

ist. Der Satz wird daher bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß unter seinen Voraussetzungen

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \geqq 1 \tag{6}$$

ist, denn dann muß $z=1$ ein singulärer Punkt sein und damit auch $z=e^{i\varphi}$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$, denn mit $f(z)$ genügt auch $f(e^{i\varphi}z)$ den Voraussetzungen des Satzes.

Um (6) nachzuweisen, greifen wir aus der Summe (5) das Glied mit dem Index

$$\nu_0^{(n)}=\left[\frac{n}{k+2}\right]=\frac{n}{k+2}-\lambda \qquad (0\leqq\lambda<1)$$

heraus und vergleichen es mit den Gliedern mit den Indizes

$$\begin{aligned}\nu_1^{(n)}&=\nu_0^{(n)}+\left[\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}\right]\\&=\nu_0^{(n)}+\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}-\tau \qquad (0\leqq\tau<1),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nu_2^{(n)}&=\nu_0^{(n)}-\left[\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}\right]\\&=\nu_0^{(n)}-\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}+\tau \qquad (0\leqq\tau<1).\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Glieder mit den Indizes $\nu_1^{(n)}$ und $\nu_0^{(n)}$ ist

$$Q_1=\frac{\binom{n-\nu_1^{(n)}}{\nu_1^{(n)}}}{\binom{n-\nu_0^{(n)}}{\nu_0^{(n)}}}\cdot\frac{(k+1)^{\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)}}}{k^{2(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}}\cdot\frac{a_{n-\nu_1^{(n)}}}{a_{n-\nu_0^{(n)}}}.$$

Dabei läßt sich nach der Stirlingschen Formel der erste Faktor zerlegen in der Form

$$\frac{\binom{n-\nu_1^{(n)}}{\nu_1^{(n)}}}{\binom{n-\nu_0^{(n)}}{\nu_0^{(n)}}}=A\cdot B\cdot C\cdot e^{o(1)},$$

wobei

1. $$A=\frac{(n-\nu_1^{(n)})^{n-\nu_0^{(n)}}\cdot\nu_0^{(n)\,\nu_0^{(n)}}\cdot(n-2\nu_0^{(n)})^{n-2\nu_0^{(n)}}}{\nu_1^{(n)\,\nu_0^{(n)}}\cdot(n-2\nu_1^{(n)})^{n-2\nu_0^{(n)}}\cdot(n-\nu_0^{(n)})^{n-\nu_0^{(n)}}}$$

$$\frac{\left(1-\frac{\sqrt{\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}}{\sqrt{n-\nu_0^{(n)}}}+\frac{\tau}{n-\nu_0^{(n)}}\right)^{n-\nu_0^{(n)}}}{\left(\frac{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}{\nu_0^{(n)}}-\frac{\tau}{\nu_0^{(n)}}\right)^{\nu_0^{(n)}}\left(1-2\frac{\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})}}{n-2\nu_0^{(n)}}+\frac{2\tau}{n-2\nu_0^{(n)}}\right)^{n-2\nu_0^{(n)}}}$$

und damit, vermöge Voraussetzung $(\beta)$ für $k\geqq3$ (durch Reihenentwicklung der Logarithmen):

$$\log A=\frac{1}{2}\log(n-\nu_0^{(n)})\,\varphi(n-\nu_0^{(n)})\left(\frac{(k+2)^2}{k}+o(1)\right).$$

2. $$B=\frac{(n-2\nu_1^{(n)})^{2(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}}{\nu_1^{(n)\,\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)}}(n-\nu_1^{(n)})^{\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)}}}=\frac{k^{2(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}}{(k+1)^{\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)}}}\cdot B_1,$$

wobei

$$B_1 = \left(1 - \frac{2(k+2)\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})}}{kn} + \frac{2(k+2)(\lambda+\tau)}{kn}\right)^{2(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}$$
$$: \left\{\left(1 + \frac{(k+2)\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})}}{n} - \frac{(k+2)(\lambda+\tau)}{n}\right)^{(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}\right.$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{(k+2)\sqrt{(n-\nu_0^{(n)})\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})}}{(k+1)n} + \frac{(k+2)(\lambda+\tau)}{(k+1)n}\right)^{(\nu_1^{(n)}-\nu_0^{(n)})}\right\}$$

und wieder vermöge Voraussetzung $(\beta)$

$$\log B_1 = -\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})\left(\frac{(k+2)^2}{k} + o(1)\right).$$

3. $$C = \sqrt{\frac{(n-\nu_1^{(n)})\nu_0^{(n)}(n-2\nu_0^{(n)})}{\nu_1^{(n)}(n-2\nu_1^{(n)})(n-\nu_0^{(n)})}} = e^{o(1)}.$$

Nach diesen Abschätzungen wird somit

(7a) $$Q_1 = e^{-\frac{1}{2}\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})\left(\frac{(k+2)^2}{k}+o(1)\right)} \cdot \frac{a_{n-\nu_1^{(n)}}}{a_{n-\nu_0^{(n)}}}.$$

Ebenso erhält man für das Verhältnis des Glieds mit dem Index $\nu_2^{(n)}$ zu dem mit dem Index $\nu_0^{(n)}$

(7b) $$Q_2 = e^{-\frac{1}{2}\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})\left(\frac{(k+2)^2}{k}+o(1)\right)} \cdot \frac{a_{n-\nu_2^{(n)}}}{a_{n-\nu_0^{(n)}}}.$$

Da, wie man leicht nachrechnet, die Funktion

$$\binom{n-\nu}{\nu}\frac{k^{n-2\nu}}{(k+1)^{n-\nu}}$$

von $\nu$ für $\nu > \nu_1^{(n)}$ mit wachsendem $\nu$ und für $\nu < \nu_2^{(n)}$ mit fallendem $\nu$ monoton abnimmt (für großes $n$), so folgt aus den Abschätzungen (7), daß, falls $n - \nu_0^{(n)}$ gleich einem $n_\nu$ ist, unter den Voraussetzungen unseres Satzes in der Summe (5) das Verhältnis der Summe der Glieder mit Indizes $\nu \neq \nu_0^{(n)}$ zu dem mit Index $\nu_0^{(n)}$

(8) $$Q < \frac{n}{2} e^{-\frac{1}{2}\log(n-\nu_0^{(n)})\varphi(n-\nu_0^{(n)})\left(\frac{(k+2)^2}{k}+o(1)\right)+2K\varphi(n)\log n}$$

und damit (unter Verwendung von $(\alpha)$)

(9) $$Q = o(1)$$

ist, wenn man nur $k$ (entsprechend der Konstanten $K$) hinreichend groß wählt, da ja $\frac{(k+2)^2}{k}$ mit $k$ über alle Grenzen wächst. Im folgenden setzen wir $k$ $(\geqq 3)$ so groß voraus, daß (9) erfüllt ist. Für hinreichend großes $n$ ist dann jedenfalls

(10) $$|A_n| > \frac{1}{2}\binom{n-\nu_0^{(n)}}{\nu_0^{(n)}}\frac{k^{n-2\nu_0^{(n)}}}{(k+1)^{n-\nu_0^{(n)}}} a_{n-\nu_0^{(n)}},$$

und somit wieder nach der Stirlingschen Formel

$$\sqrt[n]{|A_n|} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{k^{\frac{k}{k+2}+2\frac{\lambda}{n}}}{(k+1)^{\frac{k+1}{k+2}+\frac{\lambda}{n}}} \cdot \frac{\left(\frac{k+1}{k+2}+\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{k+1}{k+2}+\frac{\lambda}{n}}}{\left(\frac{1}{k+2}-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{1}{k+2}-\frac{\lambda}{n}}\left(\frac{k}{k+2}+\frac{2\lambda}{n}\right)^{\frac{k}{k+2}+\frac{2\lambda}{n}}}$$

$$\asymp \left(\frac{\frac{k+1}{k+2}+\frac{\lambda}{n}}{2\pi n\left(\frac{1}{k+2}-\frac{\lambda}{n}\right)\left(\frac{k}{k+2}+\frac{\lambda}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{o(1)} \cdot e^{-\frac{K\log n\varphi(n)}{n}}$$

Daraus folgt aber vermöge $(\beta)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \geqq 1,$$

womit der Beweis fertig ist.

Stuttgart, 22. Januar 1930.

(Eingegangen am 24. Januar 1930.)

# Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Müntz.

Von

Einar Hille in Princeton, N. J.

In einer neulich erschienenen Arbeit in der Math. Zeitschrift[1]) beweist Herr Ch. H. Müntz einen Satz über Abelsummierbarkeit von Hermiteschen Reihen. Nachdem er den Begriff Potenzsummation (= das Abel-Poissonsche Verfahren) definiert hat, bemerkt er:

„Im Falle der Entwicklung einer vorgeschriebenen Funktion $U(x)$, $-\infty < x < +\infty$, nach Hermiteschen Polynomen liegen insbesondere diesbezügliche Untersuchungen verschiedener Autoren in der Literatur vor (wir erwähnen hier Weyl, Myller-Lebedeff, Kameda, Szegö, Hille). Die im folgenden gegebenen Resultate gehen über das Bisherige insofern hinaus, als nicht einmal Endlichkeit und Differenzierbarkeit von $U(x)$ vorausgesetzt werden."

Hier liegt eine Unklarheit vor. Von den erwähnten Verfassern bin ich der einzige, der einen Satz über die Abelsummierbarkeit der Hermiteschen Reihen bewiesen hat[2]). Ich setze zwar Endlichkeit von $U(x)$ voraus, sogar lokale Beschränktheit, aber gar nicht Differenzierbarkeit. Anderseits beschränke ich mich nicht auf Unstetigkeitsstellen erster Art wie Herr Müntz und betrachte außerdem eine weitgehende Verallgemeinerung des Abelschen Verfahrens. Mein Satz läßt sich folgenderweise formulieren:

A. *Es möge*

$$J_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} |U(t)| \, dt \tag{1}$$

[1]) **31** (1929), S. 350—355.

[2]) Annals of Math. (2) 27 (1926), pp. 427—464. — Die Integraldarstellung der Hermiteschen Polynomen, die Müntz Kameda zuschreibt, kommt schon bei Mehler, Journal f. Math. **66** (1866), S. 174 und Kiehl, Dissertation, Greifswald (1866), S. 19 vor und wurde später mehrmals wiederentdeckt.

*für $\gamma = 1$ endlich sein. Ferner sei*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} U(t)\, dt = U < \infty, \tag{2}$$

$$U(x, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\varrho^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\, e^{-\frac{(t-\varrho x)^2}{1-\varrho^2}}\, dt, \quad -1 < \varrho < +1. \tag{3}$$

*Dann ist*

$$\lim_{\varrho \to 1} U(x, \varrho) = U. \tag{4}$$ [3])

Wenn nur $J_1$ existiert, braucht $U(x)$ gar keine Hermitesche Entwicklung zu haben. Ist aber $J_\gamma$ endlich für ein festes $\gamma$, $\frac{1}{2} \leqq \gamma < 1$, so existiert die Entwicklung

$$U(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \quad (H_n x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{5}$$

Es ist ferner

$$U(x, \varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)\, \varrho^n, \tag{6}$$

wobei die Potenzreihe für $|\varrho| < \sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ konvergiert, die Funktion $U(x, \varrho)$ aber im Innern der Ellipse $\sigma^2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \tau^2 = 1$, $\varrho = \sigma + i\tau$, regulär ist. Wenn $J_\gamma$ für jedes $\gamma > \frac{1}{2}$ endlich ist, bleibt $U(x, \varrho)$ für $|\varrho| < 1$ regulär; erst in diesem Falle besagt (4) die Abelsummierbarkeit der Reihe (5) im gewöhnlichen Sinne. Herr Müntz nimmt die Existenz von $J_0$ an, wobei $U(x, \varrho)$ sogar im Hyperbelgebiet $\Re(\varrho^2) < 1$ regulär wird.

Wenn $U(t)$ für $t = x$ stetig ist, wird offenbar $U = U(x)$. Für diesen Fall hat schon M. Mathias die Gleichung (4) bewiesen unter der Annahme $J_0 < \infty$. [4]) An einer Unstetigkeitsstelle erster Art ist $U = \frac{1}{2}[U(x-0) + U(x+0)]$.

---

[3]) A. a. O., S. 453. Für die weiteren Eigenschaften von $U(x, \varrho)$ siehe S. 448—452. Ich habe die in dieser Arbeit der Gleichung (2) entsprechenden Bedingung vereinfacht und die unnötige Einschränkung, daß $U(t)$ in der Nähe von $t = x$ beschränkt sein soll, weggelassen. Der hier gegebene Beweis für $A$ ist von dem alten ziemlich verschieden. — Verzichtet man auf die Existenz von $U(x, \varrho)$ für kleine $\varrho$, genügt es, die Endlichkeit von $J_\gamma$ für irgendein genügend großes $\gamma$ zu verlangen.

[4]) Math. Zeitschr. 16 (1923), S. 103—125, Hilfssatz 12, S. 120. Diese Arbeit war mir zur Zeit der Abfassung meiner Annals-Arbeit nicht bekannt.

Die Resultate von Herrn Müntz gehen darüber insofern hinaus, daß er (4) auch für den Fall beweist, wo etwa $U(x-0) = -\infty$ bzw. $+\infty$, $U(x+0)$ aber endlich ist oder umgekehrt; ebenso, wenn $U(x-\delta)$ und $U(x+\delta)$ beide gegen $-\infty$ bzw. beide gegen $+\infty$ streben.

Der Beweis von A. folgt bekannten Vorbildern und braucht hier nur skizziert werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U=0$, $x \geqq 0$. Wir setzen

$$U(x,\varrho) = \Big\{ \int_{-\infty}^{t_-} + \int_{t_-}^{t_+} + \int_{t_+}^{+\infty} \Big\} \ldots dt = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Hier soll $t_- = x-\delta$, $t_+ = x+\delta$ sein, wo $\delta$ etwa $= h \log \frac{1}{h}$, $h = \sqrt{1-\varrho^2}$ sei. Man sieht leicht, daß $I_1$ und $I_3$ mit $h$ gegen Null streben. Es seien

$$e^{-u^2 h^{-2}} = E(u), \quad \int_x^{x+\xi} U(t)\,dt = v(\xi), \quad v(\xi) - v(-\xi) = V(\xi),$$
$$-\xi + (1-\varrho)x = \xi_1, \quad \xi + (1-\varrho)x = \xi_2 .$$

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ gegeben, so können wir nach (2) $h$ so klein nehmen, daß für $|\xi| \leqq \delta$, $|v(\xi)| < \varepsilon$, $|V(\xi)| \leqq \varepsilon |\xi|$. Ferner ist

$$\sqrt{\pi}\, h I_2 = \int_{t_-}^{t_+} U(t) E(t-\varrho x)\,dt = v(\delta) E(\delta_2) - v(-\delta) E(\delta_1)$$
$$+ 2h^{-2} \int_0^{\delta} [v(\xi)\xi_2 E(\xi_2) + v(-\xi)\xi_1 E(\xi_1)]\,d\xi$$
$$= V(\delta) E(\delta_2) + v(-\delta)[E(\delta_2) - E(\delta_1)] + 2h^{-2} \int_0^{\delta} V(\xi)\xi_2 E(\xi_2)\,d\xi$$
$$+ 2h^{-2} \int_0^{\delta} v(-\xi)[\xi_2 E(\xi_2) + \xi_1 E(\xi_1)]\,d\xi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 ,$$

wo $\delta_\nu$ den Wert von $\xi_\nu$ für $\xi = \delta$ bezeichnet. Man bestätigt leicht, daß

$$|S_1| < \delta \varepsilon h, \quad |S_2| < M_1 \varepsilon h$$

sind, wo $M_1$ (wie unten auch $M_2$ usw.) höchstens nur von $x$ abhängt. Weiter ist

$$|S_3| < M_2 \varepsilon h^{-2} \int_0^{\delta} \xi^2 e^{-\xi^2 h^{-2}}\,d\xi < M_2 \varepsilon h \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt < M_3 \varepsilon h .$$

Schließlich ist

$$|\xi_2 E(\xi_2) + \xi_1 E(\xi_1)| \leqq (\xi_1 + \xi_2) E(\xi_1) + \xi_2 |E(\xi_2) - E(\xi_1)|$$
$$\leqq [2(1-\varrho)x + \xi_2 h^{-2}(\xi_2^2 - \xi_1^2)] E(\xi_1)$$
$$< M_4 (h^2 + \xi^2) E(\xi_1) < M_5 (h^2 + \xi^2) e^{-\xi^2 h^{-2}},$$

und daher

$$|S_4| < M_5 \varepsilon h^{-2} \int_0^{\delta} (h^2 + \xi^2) e^{-\xi^2 h^{-2}} d\xi$$

$$< M_6 \varepsilon h \int_0^{\infty} (1 + t^2) e^{-t^2} dt < M_7 \varepsilon h.$$

Folglich ist $|I_2| < M_8 \varepsilon$, womit Satz A. bewiesen ist[5]).

Princeton, N. J., den 24. Januar 1930.

---

[5]) Zusatz bei der Korrektur, Mai 1930. Im Anschluß an die Arbeit von U. Kowallik, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 498–518, möchte ich mir erlauben, auf die Arbeit von J. V. Uspensky, Annals of Math. (2) **28** (1927), pp. 593–619, hinzuweisen, wo mit ähnlichen Methoden ein viel allgemeinerer Konvergenzsatz für Hermitesche Reihen hergeleitet wird.

(Eingegangen am 8. Februar 1930.)

# Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

## Einleitung.

**1.** Sind im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ die $n$ voneinander verschiedenen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *beliebig* gegeben, so kann man unter den ganzen rationalen Funktionen $g(x)$ von höchstens $(n-1)$-tem Grade mit reellen Koeffizienten immer eine solche Funktion $g^*(x)$ finden, für welche einerseits an den gegebenen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$|g^*(x_1)| \leqq 1, \quad |g^*(x_2)| \leqq 1, \quad \ldots, \quad |g^*(x_n)| \leqq 1 \tag{1}$$

gilt, andererseits aber für eine passend gewählte, ebenfalls im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ liegende Stelle $X$

$$|g^*(X)| > \tfrac{1}{12} \log n \tag{2}$$

stattfindet. Anders ausgedrückt: es lassen sich in keiner Weise aus dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ $n$ voneinander verschiedene Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so auswählen, daß für eine beliebige ganze rationale Funktion $g(x)$ von höchstens $(n-1)$-tem Grade und mit reellen Koeffizienten die $n$ Ungleichungen

$$|g(x_1)| \leqq 1, \quad |g(x_2)| \leqq 1, \quad \ldots, \quad |g(x_n)| \leqq 1 \tag{3}$$

die Ungleichung

$$|g(x)| \leqq \tfrac{1}{12} \log n \tag{4}$$

für das ganze Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ nach sich ziehen würden.

Dieser Satz rührt von Faber her (Faber 1); ich gebe für ihn im I. Anhang einen sehr kurzen Beweis.

2. Ich habe nun gefunden, daß ein ganz anderer Sachverhalt vorliegt, wenn man statt den ganzen rationalen Funktionen $(n-1)$-ten Grades diejenigen von $(2n-1)$-tem Grade $g(x)$ betrachtet, dafür aber außer den Werten $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ noch die Werte der ersten Ableitung $g'(x_1)$, $g'(x_2), \ldots, g'(x_n)$ in Betracht zieht. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Es lassen sich $n$ voneinander verschiedene, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ liegende Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so bestimmen, daß, für eine beliebige ganze rationale Funktion $g(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade aus den $2n$ Ungleichungen

$$(5) \qquad |g(x_1)| \leqq A, \quad |g(x_2)| \leqq A, \quad \ldots, \quad |g(x_n)| \leqq A,$$

$$(6) \qquad |g'(x_1)| \leqq B, \quad |g'(x_2)| \leqq B, \quad \ldots, \quad |g'(x_n)| \leqq B$$

die Ungleichung

$$(7) \qquad |g(x)| \leqq A + B$$

für das ganze Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ folgt.

Dieser Satz gilt, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die sog. Tschebyscheffschen oder „trigonometrischen" Abszissen (§ 2, Satz 1) sind, die man so erhält, daß man über die Strecke von $-1$ bis $+1$ als Durchmesser einen Halbkreis konstruiert, diesen in $n$ gleiche Bögen zerlegt, und die Mittelpunkte dieser Teilbögen auf die Strecke von $-1$ bis $+1$ projiziert; d. h.

$$(8) \qquad x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Mit

$$(9) \qquad |g(x)| \leqq A + 2B \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq +1,$$

statt (7), ist der Satz auch für die Legendre-Gaußschen Abszissen (§ 3) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gültig, d. h. wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$ bezeichnen, wo $P_n(x)$ das Legendresche Polynom mit dem Index $n$ bezeichnet[1]).

Er ist *nicht* gültig für die Newtonschen Abszissen (II. Anhang), d. h. wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ etwa so entstehen, daß man das Intervall von $-1$ bis $+1$ in $n$ gleiche Teile zerlegt, und den Mittelpunkt jeder Teilstrecke nimmt.

3. In dieser Arbeit möchte ich mich aber besonders ausführlich mit dem Falle der Tschebyscheffschen Abszissen beschäftigen. In diesem Falle ist für $|g(x)|$ im abgeschlossenen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ eine besonders scharfe, von $n$ abhängige Abschätzung gültig, die in dem folgenden Satze enthalten ist (§ 2, Satz 3):

---

[1]) Zum Beweise der Ungl. (9) sind ganz wenige Kenntnisse über die Legendreschen Polynome und ihrer Wurzeln erforderlich.

Sind für die ganze rationale Funktion $g(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in den Tschebyscheffschen Abszissen unter (8) die $2n$ Ungleichungen

$$|g(x_k)| \leqq A, \quad |g'(x_k)| \leqq B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

gültig, so ist

$$|g(x)| \leqq A + \lambda_n B \tag{11}$$

im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, für $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, wo

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{2}{\pi} \frac{\log n}{n}. \tag{12}$$

In der zweiten Bedingung (10) läßt sich $|g'(x_k)| \leqq B$ sogar durch die schwächere Bedingung $|g'(x_k)| \sqrt{1-x_k^2} \leqq B$ ersetzen (§ 2, Satz 2).

Bemerkenswert ist nun in der Abschätzung (11), daß in ihr der Faktor $\lambda_n$ von $B$ mit $\lim n = \infty$ gegen 0 konvergiert, und zwar wie $\frac{2}{\pi} \frac{\log n}{n}$. Daraus folgt u. a., daß zwei ganze rationale Funktionen von höchstens $(2n-1)$-tem Grade $g(x)$ und $\gamma(x)$, die an den Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der Reihe nach, denselben Wert annehmen und deren Ableitung an diesen Stellen dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $B$ (wo $B$ eine noch so große absolute Konstante bezeichnet), sich im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ kaum voneinander unterscheiden, wenn nur $n$ gehörig groß ist. Es ist nämlich dann, auf Grund von (11), im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$

$$|g(x) - \gamma(x)| \leqq 2\lambda_n B. \tag{13}$$

**4.** Die vorhergehenden einleitenden Worte bezogen sich auf den I. Teil dieser Arbeit, der über ganze rationale Funktionen handelt. Im II. Teil gebe ich eine Anwendung der Resultate des I. Teiles (namentlich der Abschätzung (11)) auf die Frage der Konvergenz der Interpolationsreihe einer beliebigen stetigen Funktion $f(x)$, wenn die Abszissen die in so vieler Beziehung ausgezeichneten Tschebyscheffschen Abszissen sind. Zur Orientierung über den Inhalt des II. Teiles dienen die dort vorangehenden einleitenden Bemerkungen. Es sei jedoch gestattet auch hier einige Worte vorauszuschicken. Es sei

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, \quad x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)}, \quad x_2^{(3)}, \quad x_3^{(3)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}, \quad x_2^{(n)}, \quad x_3^{(n)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

eine „Punktgruppenfolge“ (oder „Abszissengruppenfolge“), deren Punkte alle dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ angehören, und $f(x)$ eine beliebige Funktion, die in diesem Intervalle definiert ist; $L_n(x)$ bezeichne das Lagrangesche Interpolationspolynom, d. h. diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade, die an den voneinander verschiedenen Stellen $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, der Reihe nach, denselben Wert annimmt, als die Funktion $f(x)$.

Faber hat nun bewiesen (Faber 1), und zwar mit Hilfe seines an der Spitze dieser Einleitung formulierten Satzes und mit Hilfe einer Methode, die zuerst Lebesgue in der Theorie der Fourierschen Reihe angewendet hatte, daß man in keiner Weise eine feste Punktgruppenfolge (P) so wählen kann, daß im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ für die unendliche Folge der zu $f(x)$ gehörenden Lagrangeschen Interpolationspolynome gleichmäßig $\lim_{n=\infty} L_n(x) = f(x)$ gültig wäre, wenn $f(x)$ eine *beliebige*, in diesem Intervalle stetige Funktion bezeichnet.

Über die Divergenz (und Konvergenz) von Lagrangeschen Interpolationsreihen sind den Faberschen Untersuchungen wichtige Arbeiten von Runge, Borel und de la Vallée Poussin vorangegangen, und später sind die von Dunham Jackson, Tietze und Hahn hinzugetreten.

Da nach Faber $\lim_{n=\infty} L_n(x) = f(x)$ bei keiner Wahl der Punktgruppenfolge (P) für *jede* stetige Funktion $f(x)$ gleichmäßig stattfindet, habe ich schon vor Jahren versucht, die Lagrangeschen Interpolationspolynome $L_n(x)$, die höchstens vom $(n-1)$-tem Grade sind, durch Interpolationspolynome von höchstens $(2n-1)$-tem Grade $\mathsf{X}_n(x)$ zu ersetzen, die begrifflich den Lagrangeschen möglichst nahe stehen, und die gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren, wenn $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion bezeichnet. Ich verstehe unter $\mathsf{X}_n(x)$ („Hermitesches Interpolationspolynom“, oder kürzer: „Hermitepolynom“) ein beliebiges Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in $x$, das nur der Bedingung unterworfen ist (welcher auch das Lagrangesche Interpolationspolynom $L_n(x)$ unterworfen ist), daß es an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ denselben Wert annimmt wie die gegebene Funktion $f(x)$. Die Werte der ersten Ableitung von $\mathsf{X}_n(x)$ an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ sind aber ganz frei; ich kann über sie verfügen.

Ich habe schon im Jahre 1916 (Fejér 2, Nr. 15) das Resultat veröffentlicht, daß

$$\lim_{n=\infty} \mathsf{X}_n(x) = f(x)$$

für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ gleichmäßig in $-1 \leqq x \leqq +1$ gilt, wenn die Punktgruppenfolge (P) die Tschebyscheffsche ist, und wenn ich über die Ableitungswerte von $\mathsf{X}_n(x)$ in $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ so verfüge, daß sie alle gleich *Null* sind.

Erst neuerdings (Fejér **3**, Nr. 19) habe ich bemerkt, daß dieses Resultat allgemeiner dann bestehen bleibt, wenn die *Steilheit* von $X_n(x)$ in den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ (von $n$ unabhängig) *beschränkt* bleibt, d. h. wenn

$$|X_n'(x_1^{(n)})|, |X_n'(x_2^{(n)})|, \ldots, |X_n'(x_n^{(n)})| < \text{numerische Konst.},$$

für jeden Wert von $n$.

Im II. Teile vorliegender Arbeit will ich nun auch dieses Resultat weiter verallgemeinern, indem ich beweise (II. Teil, § 1), daß $\lim_{n=\infty} X_n(x) = f(x)$, im Falle Tschebyscheffscher Abszissen und für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$, auch dann im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig stattfindet, wenn die absoluten Beträge der $n$ Ableitungswerte von $X_n(x)$ in den Tschebyscheffschen Abszissen mit $n$ zwar *unendlich groß* werden, aber, durch $\frac{n}{\log n}$ gemessen, so klein ausfallen, daß sie für $\lim n = \infty$ zu 0 konvergieren; d. h. wenn

$$\frac{|X_n'(x_k^{(n)})|}{\frac{n}{\log n}} \leqq \varepsilon_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist.

Ich zeige aber auch, daß ich damit in gewisser Beziehung das Äußerste erreicht habe, weil z. B.

$$\frac{|X_n'(x_k^{(n)})|}{\frac{n}{\log n}} \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

*nicht* genügt.

Eine kürzere, aber nach den vorangehenden ausführlicheren Angaben sicher verständliche Formulierung des Hauptresultates des II. Teiles wäre:

Die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörenden Hermiteschen Interpolationspolynome einer beliebigen stetigen Funktion $f(x)$

$$X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$$

konvergieren im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zu $f(x)$, wenn nur die Steilheitsschranke von $X_n(x)$ in den Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Ordnung $o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ ist.

Für den Fall Legendre-Gaußscher Abszissen gelten ähnliche, aber doch etwas anders lautende Konvergenzsätze. Für den Spezialfall $X_n'(x_1) = X_n'(x_2) = \ldots = X_n'(x_n) = 0$ habe ich den Gegenstand schon in meinen älteren Arbeiten (Fejér **1**, **2**) vollständig ausgearbeitet; auf den allgemeinen Fall (bei von dem Index $n$ abhängiger Steilheitsschranke der $X_n(x)$ in den Legendre-Gaußschen Abszissen) gedenke ich noch zurückzukommen, bei welcher Gelegenheit ich auch die allgemeinere, sog. ultrasphärische Punktgruppenfolge berücksichtigen möchte, zu welcher Kategorie von Punktgruppenfolgen sowohl die Tschebyscheffsche als auch die Legendre-Gaußsche gehört.

# I. Teil.

## Abschätzung des maximalen absoluten Betrages einer ganzen rationalen Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in einem Intervall, wenn für den absoluten Betrag ihrer Werte in gewissen Punkten des Intervalles eine obere Schranke $A$ und für den absoluten Betrag ihrer Ableitungswerte in denselben Punkten eine obere Schranke $B$ vorliegt.

### § 1.

### Die Interpolationsformeln von Lagrange und Hermite. Die Treppenparabel und die Wellenparabel[2]).

**1.** Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voneinander verschiedene Abszissen und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Ordinatenwerte; dann lautet die Lagrangesche Formel

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x), \tag{1}$$

wo

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \tag{2}$$

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \tag{3}$$

und $C \neq 0$ eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Sie stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Reihe nach die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt. (Es gibt immer eine, aber auch nur eine solche ganze rationale Funktion.)

Die Polynome $l_k(x)$ nenne ich die *Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolation*. Setzt man in die Lagrangesche Formel $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, so erhält man auf Grund des Vorhergehenden für jeden Wert von $x$

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) = 1. \tag{4}$$

**2.** Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wieder $n$ voneinander verschiedene Abszissenwerte und

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$
$$y_1', y_2', \ldots, y_n'$$

weitere $2n$ gegebene Werte; dann lautet die Hermitesche Interpolationsformel

$$X(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x), \tag{5}$$

---

[2]) Übernommen aus Fejér 3, Nr. 6—9.

wo

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)(l_k(x))^2 = v_k(x)(l_k(x))^2, \tag{6}$$

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2 \tag{7}$$

bezeichnet. Es ist hier wieder

$$\omega(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \qquad (C \neq 0), \tag{8}$$

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \tag{9}$$

und $v_k(x)$ ist augenscheinlich die abgekürzte Bezeichnung des „charakteristischen Linearfaktors" in $h_k(x)$, d. h.

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k). \tag{10}$$

Die Hermitesche Interpolationsformel (5) stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach die Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ und deren Ableitung an denselben Stellen, der Reihe nach, die Werte $y_1', y_2', \dots, y_n'$ annimmt. Es gibt immer ein solches Polynom, aber auch nur ein einziges.

Die $n$ Polynome

$$h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x) \tag{11}$$

nenne ich die *Grundpolynome erster Art* und die Polynome

$$\mathfrak{h}_1(x), \mathfrak{h}_2(x), \dots, \mathfrak{h}_n(x) \tag{12}$$

nenne ich die *Grundpolynome zweiter Art* der Hermiteschen Interpolation (5).

Setzt man in die Hermitesche Formel (5)

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1, \qquad y_1' = y_2' = \dots = y_n' = 0,$$

so erhält man für die Grundpolynome erster Art die identische Relation

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1. \tag{13}$$

**3.** Es sei $X(x)$ eine beliebige rationale ganze Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade der unabhängigen Veränderlichen $x$. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ voneinander verschiedene Abszissenwerte und $y_1, y_2, \dots, y_n$ die Werte von $X(x)$ an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, während $y_1', y_2', \dots, y_n'$ die Werte der Ableitung $X'(x)$ an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen mögen.

Die Hermitesche Formel (5) zerlegt nun das Polynom $X(x)$ eindeutig in zwei Summanden

$$X(x) = H(x) + \mathfrak{H}(x), \tag{14}$$

wo

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x), \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x). \tag{16}$$

$H(x)$ nenne ich das zu $X(x)$ gehörige *Treppenpolynom*, $\mathfrak{H}(x)$ das *Wellenpolynom* (die Kurve $y = H(x)$ die Treppenparabel, die Kurve $y = \mathfrak{H}(x)$ die Wellenparabel).

Es ist klar, daß $H(x)$ dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade darstellt, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denselben Wert hat als $X(x)$, während seine Ableitung an diesen Stellen verschwindet; $\mathfrak{H}(x)$ ist aber dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet, während seine Ableitung an diesen Stellen mit derjenigen von $X(x)$ übereinstimmt.

## § 2.

**Abschätzung des maximalen absoluten Betrages einer ganzen rationalen Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, wenn für die absoluten Beträge ihrer Ordinaten- und Ableitungswerte in den Tschebyscheffschen Abszissen je eine obere Schranke $A$ bzw. $B$ vorliegt.**

4. Es mögen nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Tschebyscheffschen Abszissen bezeichnen, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$T_n(x) = \cos[n(\arccos x)] = 0, \tag{17}$$

wo also $T_n(x)$ diejenige ganze rationale Funktion $n$-ten Grades bezeichnet, die $\cos n\theta$ durch $\cos\theta = x$ ausdrückt. Es ist

$$x_k = \cos\theta_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Da in diesem Falle

$$\omega(x) = T_n(x) = \cos n\theta, \qquad \omega'(x_k) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{n}{\sin\theta_k}, \tag{19}$$

$$\omega''(x_k) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{n}{\sin^3\theta_k} \cos\theta_k,$$

so ist

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) = \frac{1 - \cos\theta_k \cos\theta}{\sin^2\theta_k} = \frac{1 - x_k x}{1 - x_k^2}, \tag{20}$$

und die Formeln der Grundpolynome beider Art der Hermiteschen Interpolation lauten — in einer zunächst beschränkteren Ausführlichkeit, die aber für den nächsten Zweck genügt —

$$h_k(x) = \frac{1 - x_k x}{1 - x_k^2}(l_k(x))^2 \tag{21}$$

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2 \tag{22}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n).$

Aus (21) entnehmen wir, daß $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ alle *nichtnegativ* sind, und aus

$$\mathfrak{h}_k(x) = \frac{x - x_k}{1 - x_k x}(1 - x_k^2)\, h_k(x) \tag{23}$$

folgt, mit Rücksicht auf $|1 - x_k^2| = 1 - x_k^2 < 1$ und $\left|\frac{x - x_k}{1 - x_k x}\right| \leqq 1$ für $-1 \leqq x \leqq 1$,

$$|\mathfrak{h}_k(x)| \leqq h_k(x), \tag{24}$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$ und $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ist also für eine ganze rationale Funktion $X(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade

$$|X(x_1)| \leqq A, \quad |X(x_2)| \leqq A, \quad \ldots, \quad |X(x_n)| \leqq A, \tag{25}$$

$$|X'(x_1)| \leqq B, \quad |X'(x_2)| \leqq B, \quad \ldots, \quad |X'(x_n)| \leqq B, \tag{26}$$

so ist, auf Grund der Hermiteschen Interpolationsformel (5) und mit Rücksicht auf $h_k(x) \geqq 0$, (13) und (24),

$$\begin{aligned} |X(x)| &\leqq A \sum_{k=1}^{n} |h_k(x)| + B \sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \\ &\leqq A \sum_{k=1}^{n} h_k(x) + B \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = A + B \end{aligned} \tag{27}$$

im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Ich habe also den folgenden Satz erhalten[3]):

Satz 1. *Ist für eine ganze rationale Funktion $X(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade*

$$|X(x_k)| \leqq A, \quad |X'(x_k)| \leqq B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

*so ist*

$$|X(x)| \leqq A + B \tag{29}$$

*für $-1 \leqq x \leqq +1$. Hier bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Tschebyscheffschen Abszissen, d. h.*

$$x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Für $n = 1$ haben wir die einzige Tschebyscheffsche Abszisse $x_1 = 0$. Die Bedingung (28) lautet also $|X(0)| \leqq A$, $|X'(0)| \leqq B$. Nun ist aber diese Bedingung für die Linearfunktion $A + Bx$ erfüllt, und diese erreicht im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ genau die Schranke $A + B$, nämlich an der Stelle $x = 1$. Also läßt sich der Satz 1 im gewissen Sinne nicht weiter verbessern.

---

[3]) Vgl. Fejér 3, Nr. 17, Formel IV.

Bemerkung. Zwei spezielle Fälle verdienen eine besondere Beachtung:

1) $B = 0$. Dann besagt[4]) Satz 1:

I. *Wenn für eine ganze rationale Funktion von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade in den Tschebyscheffschen Abszissen* $|X(x_k)| \leqq A$ *und* $X'(x_k) = 0$ *ist für* $k = 1, 2, \ldots, n$, *dann ist auch* $|X(x)| \leqq A$ *für* $-1 \leqq x \leqq +1$.

Da in diesem Falle $B = 0$ die ganze rationale Funktion $X(x)$ ein Treppenpolynom $H(x)$ ist, so besagt I, daß $\underset{-1 \leqq x \leqq 1}{\text{Max}} |H(x)|$ gleich ist dem größten unter den Werten $|H(x_k)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, d. h.

$$\underset{-1 \leqq x \leqq 1}{\text{Max}} |H(x)| = \text{Max}(|H(x_1)|, |H(x_2)|, \ldots, |H(x_n)|).$$

Dieser Spezialfall I ist natürlich nicht nur im Falle Tschebyscheffscher Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gültig. Er ist immer gültig, wenn die Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ in der Weise verteilt sind, daß alle Grundpolynome $h_k(x)$ in diesem Intervalle nicht-negativ ausfallen. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die einzige Zeichenwechselstelle von $h_k(x)$, die diese für $-\infty < x < +\infty$ hat (und die ich neuerdings „die konjugierte Stelle" von $x_k$ nannte) nicht in das Intervall $-1 < x < +1$ fällt, $k = 1, 2, \ldots, n$. (Wenn für einen Wert von $k$ $\omega''(x_k) = 0$ ist, so ist $h_k(x) = (l_k(x))^2$, also hat $h_k(x)$ überhaupt keine Zeichenwechselstelle; ich sage dann, daß der konjugierte Punkt von $x_k$ im Unendlichen liegt. Dies ist übrigens der einzige Fall, in welchem $h_k(x)$ nicht vom $(2n-1)$-ten, sondern vom $(2n-2)$-ten Grade ist.)

I ist also immer dann (und nur dann) gültig, wenn keiner der $n$ konjugierten Punkte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in das Intervall $-1 < x < +1$ fällt[5]).

2) $A = 0$. Dann besagt[6]) Satz 1:

II. *Wenn die ganze rationale Funktion* $X(x)$ *von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade an den Tschebyscheffschen Stellen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *verschwindet, und wenn* $|X'(x_k)| \leqq B$ *ist für* $k = 1, 2, \ldots, n$, *so ist* $|X(x)| \leqq B$ *für* $-1 \leqq x \leqq +1$.

Da in diesem Falle $A = 0$ die ganze rationale Funktion $X(x)$ ein Wellenpolynom $\mathfrak{H}(x)$ ist, so besagt also II, daß für ein Wellenpolynom im Falle Tschebyscheffscher Abszissen die Abschätzung

$$|\mathfrak{H}(x)| \leqq \text{Max}(|\mathfrak{H}'(x_1)|, |\mathfrak{H}'(x_2)|, \ldots, |\mathfrak{H}'(x_n)|)$$

im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ gültig ist.

---

[4]) Fejér 2, Nr. 7, Theorem III.

[5]) Fejér 3.

[6]) Fejér 3, Nr. 17, Formel IV.

Über die Abszissenverteilungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für welche ein Satz wie II gültig ist, möchte ich mich an einer anderen Stelle beschäftigen.

I und II sind Spezialfälle von Satz 1. Umgekehrt folgt Satz 1 aus I und II.

5. Um für den absoluten Betrag einer beliebigen rationalen ganzen Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ durch $A$ und $B$ (d. h. durch eine obere Schranke des absoluten Betrages ihrer Werte und Ableitungswerte in den Tschebyscheffschen Abszissen) eine von $n$ abhängige und im asymptotischen Sinne schärfere obere Schranke zu bekommen, verfahre ich folgendermaßen:

Es handelt sich natürlich um die Abschätzung des Wellenpolynoms $\mathfrak{H}(x)$. Ich schicke in bezug auf das Wellenpolynom eine allgemeine Bemerkung voraus, die sich also auf eine beliebige Abszissengruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezieht. Da das Wellenpolynom an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet, so ist

$$\mathfrak{H}(x) = \omega(x)\,\mathfrak{R}(x), \tag{30}$$

wo $\mathfrak{R}(x)$ eine ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade bezeichnet. Da aber aus (30)

$$\mathfrak{R}(x_k) = \frac{\mathfrak{H}'(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{y_k'}{\omega'(x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

folgt, so sehen wir, daß das Wellenpolynom $\mathfrak{H}(x)$ entsteht, wenn man $\omega(x)$ mit derjenigen ganzen rationalen Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade $\mathfrak{R}(x)$ multipliziert, die an den Stellen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{32}$$

der Reihe nach, die Werte

$$\frac{y_1'}{\omega'(x_1)}, \frac{y_2'}{\omega'(x_2)}, \ldots, \frac{y_n'}{\omega'(x_n)} \tag{33}$$

annimmt. (Dieses Resultat ergibt sich natürlich auch unmittelbar aus der Formel $\mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x)$.)

Da im Tschebyscheffschen Falle (aber auch im Legendre-Gaußschen) die Abschätzung von $\omega(x)$ keine Schwierigkeit bereitet, sind wir also auf die Abschätzung von $\mathfrak{R}(x)$ verwiesen.

Im Tschebyscheffschen Falle ist aber, laut (19), $\omega'(x_k) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{n}{\sin\theta_k}$; also sind die Ordinatenwerte (33) von $\mathfrak{R}(x)$ in diesem Falle $(-1)^{k+1} \cdot \frac{y_k' \sin\theta_k}{n}$. Wenn ich also $B = 1$ nehme und statt $|y_k'| \leqq 1$ lieber die schwächere Voraussetzung mache

$$|y_k'| \sin\theta_k = |y_k'| \sqrt{1 - x_k^2} \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{34}$$

dann ist

$$\mathfrak{H}(x) = \omega(x)\,\mathfrak{R}(x) = \omega(x)\frac{\mathfrak{L}(x)}{n}, \tag{35}$$

wo $\mathfrak{L}(x)$ eine ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade bezeichnet, deren Werte an den Tschebyscheffschen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dem absoluten Betrage nach 1 nicht übersteigen.

Ich habe also nur eine ganze rationale Funktion mit reellen Koeffizienten und von höchstens $(n-1)$-tem Grade $\mathfrak{L}(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ abzuschätzen, von welcher ich weiß, daß für sie an den Stellen

$$x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{36}$$

$$|\mathfrak{L}(x_k)| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

gültig ist.

Setze ich nun

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{38}$$

so erhalte ich

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{\mathfrak{M}(z)}{z^{n-1}}. \tag{39}$$

Hier ist $\mathfrak{M}(z)$ eine ganze rationale Funktion der komplexen Veränderlichen $z$, die höchstens von $(2n-2)$-tem Grade ist, reelle Koeffizienten hat, und die an den $2n$ Stellen des Einheitskreises

$$z_k = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{40}$$

d. h. an den Wurzeln der Gleichung

$$z^{2n} + 1 = 0 \tag{41}$$

dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ ist; d. h.

$$|\mathfrak{M}(z_k)| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2n). \tag{42}$$

Nach Grandjot[7]) ist dann aber auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$

---

[7]) Grandjot 1 (vgl. auch Landau 1). Der hier zur Anwendung kommende Teil des Grandjotschen Satzes lautet:

Ist für die ganze rationale Funktion $f(z)$ vom höchstens $(p-1)$-ten Grade $(p>1)$

$$|f(z_r)| \leqq 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, p),$$

wo $z_1, z_2, \ldots, z_p$ die Wurzeln der Gleichung $z^p + 1 = 0$ bezeichnen, dann ist am ganzen Einheitskreise $|z| = 1$

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}{}' \frac{1}{\sin\theta_r} = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}{}' \frac{1}{\sin(2r-1)\frac{\pi}{2p}} \sim \frac{2}{\pi}\log p. \tag{U}$$

(Fortsetzung der Fußnote [7]) auf nächster Seite.)

$$(43)\qquad |\mathfrak{M}(z)| = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin\frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}},$$

woraus endlich, mit Rücksicht auf (39), (35) und $|\omega(x)| = |\omega(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leqq 1$ folgt, daß im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(44)\qquad |\mathfrak{H}(x)| \leqq \lambda_n$$

stattfindet, wenn nur die Bedingungen (34) erfüllt sind; hier bezeichnet

$$(45)\qquad \lambda_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n}.$$

Ich habe also den folgenden Satz erhalten:

Satz 2. *Ist für ein Polynom* $X(x)$ *von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade an den Tschebyscheffschen Abszissen* $x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$

$$(46)\qquad |X(x_k)| \leqq A, \qquad |X'(x_k)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

*gültig, so ist für das ganze Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$

$$(47)\qquad |X(x)| \leqq A + \lambda_n B$$

*gültig, wo*

$$(48)\qquad \lambda_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n}.$$

**6.** Da $\sqrt{1-x_k^2} < 1$ ist, so erhalte ich als Spezialfall von Satz 2 den

Satz 3. *Ist für ein Polynom* $X(x)$ *von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade in den Tschebyscheffschen Abszissen*

$$(49)\qquad |X(x_k)| \leqq A, \qquad |X'(x_k)| \leqq B,$$

---

Übrigens ist, da $\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{cotg}\theta$,

$$\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{\sin\theta_r} = \sum_{r=1}^{p}\operatorname{tg}\frac{\theta_r}{2},$$

und also auch

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}\operatorname{tg}\frac{\theta_r}{2}$$

gültig. Im Texte wird diese Ungleichung für $p = 2n$, und auf die ganze rationale Funktion $\mathfrak{M}(z)$ angewendet, die höchstens von $(2n-2)$-tem, d. h. von $(p-2)$-tem Grade ist. — Anmerkung zur Korrektur. Inzwischen wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß die Ungleichung (U) schon vorher durch Gronwall in seiner Note „A sequence of polynomials connected with the $n$-th roots of unity" (Bulletin of the American Math. Society 27 (1920–21), S. 275–279) veröffentlicht wurde.

*so ist im ganzen Intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$

$$|X(x)| \leqq A + \lambda_n B, \tag{50}$$

*wo* $\lambda_n$ *wieder die Zahl unter* (48) *bezeichnet*[8]).

7. Es ist mir nicht gelungen, in der Abschätzung (47) den kleinsten zulässigen Wert $\lambda_n^*$ für den Faktor von $B$ zu bestimmen. Dieser ist aber, wie leicht ersichtlich (I. Teil, Nr. 9, Formel $(\gamma)$ für $\theta = 0$), sicher $\geqq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin \theta_k}$. Auch in der Abschätzung (50) wäre noch der kleinste zulässige Wert $\lambda_n^{**}$ des $B$-Faktors zu bestimmen. Die Bestimmung dieser „richtigen" Werte $\lambda_n^*$, $\lambda_n^{**}$ ist aber für meine Zwecke weniger wichtig; wesentlich ist, daß der Faktor von $B$ mit unendlich wachsendem $n$ zu 0 konvergiert, und zwar wie Konst. $\frac{\log n}{n}$. Dieses Hauptresultat habe ich (ohne die Grandjotsche Ungleichung) durch ganz rohe Abschätzungen gewonnen, die ich aber in diese Arbeit nicht aufgenommen habe. Ich habe lieber gleich die Grandjotsche Ungleichung zugezogen, weil ich mit ihrer Hilfe zum Werte $\lambda_n$ unter (48) gelangen konnte, der, in beiden Ungleichungen (47) und (50), wenigstens im asymptotischen Sinne richtig ist. Um dies auch für die Abschätzung (50) einzusehen, bemerke ich nur, daß für gerades $n = 2\nu$, wenn ich

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \\ y_1' = y_2' = \ldots = y_\nu' = -1 \\ y_{\nu+1}' = y_{\nu+2}' = \ldots = y_{2\nu}' = +1 \end{cases} \tag{51}$$

festsetze,

$$X(x) = \mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x) = -\sum_{k=1}^{\nu} \mathfrak{h}_k(x) + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} \mathfrak{h}_k(x) \tag{52}$$

ist, also, für $x = 0$,

$$X(0) = -\sum_{k=1}^{\nu} \mathfrak{h}_k(0) + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} \mathfrak{h}_k(0). \tag{53}$$

---

[8]) Daß im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \to 0, \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

findet man schon in Fejér 3 (Nr. 18, Formel IX) bewiesen; daß

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq C \frac{\log n}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

findet man in Fejér 3 (Nr. 19, Fußnote [6]) angekündigt.

Da aber $\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)\,(l_k(x))^2$, so ist, mit Rücksicht auf $\omega(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \cos \nu\pi = (-1)^\nu$,

$$(54)\qquad \mathfrak{h}_k(0) = (-x_k)\left(\frac{\omega(0)}{\omega'(x_k)(-x_k)}\right)^2 = \frac{1}{\frac{n^2}{\sin^2\theta_k}\cdot(-x_k)} = -\frac{1}{n^2}\frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k}$$

und

$$(55)\qquad \mathsf{X}(0) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu}\frac{\sin^2\theta_k}{-\cos\theta_k}\right\} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_k}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{\cos\theta_k} - \sum_{k=1}^{\nu}\cos\theta_k\right).$$

Da aber

$$(56)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{\cos\theta_k} = \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{\sin\theta_k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\theta_k}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}\cos\theta_k = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2\sin\theta_1}, \end{cases}$$

so ist

$$(57)\qquad \mathsf{X}(0) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\theta_k} - \frac{1}{\sin\theta_1}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\theta_k}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n},$$

wenn $n$ die geraden Zahlen durchläuft.

8. Für die Endpunkte $x = \pm 1$ läßt sich aber der Satz 3 wesentlich verschärfen. Da $\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)\,(l_k(x))^2$, so ist klar, daß alle $\mathfrak{h}_k(x)$ im Punkte $x = 1$ (ja sogar im Intervalle $x_1 < x \leqq 1$) *positiv* sind. Also ist in diesem Intervalle

$$(58)\qquad \sum_{k=1}^{n}|\mathfrak{h}_k(x)| = \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(x).$$

Nun ist aber überhaupt[9]) für jedes $x = \cos\theta$

$$(59)\qquad \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(\cos\theta) = \frac{\cos n\theta\cos(n-1)\theta}{n} = \frac{\cos\theta + \cos(2n-1)\theta}{2n}.$$

---

[9]) Fejér 3, Nr. 17, Formel II; übrigens mit Hilfe der Formel ($\delta$) in Nr. 9, Teil I, leicht zu gewinnen.

In der Tat verschwindet diese ganze rationale Funktion von $(2n-1)$-tem Grade in $x$ an den Tschebyscheffschen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und ihre Ableitung nach $x$ ist (wie leicht ersichtlich) an allen diesen Stellen gleich 1. Also ist für[10]) $x = 1$ (ja sogar für $x_1 < x \leqq 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq \frac{1}{n}. \tag{60}$$

Entsprechendes gilt für $x = -1$.

Ich habe also den folgenden Satz erhalten:

Satz 4. *Genügt eine ganze rationale Funktion $X(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade an den Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Ungleichungen*

$$|X(x_k)| \leqq A, \quad |X'(x_k)| \leqq B \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{61}$$

*dann ist*

$$|X(\pm 1)| \leqq A + \frac{B}{n}. \tag{62}$$

*Hier ist das Zeichen der Gleichheit (bei gegebenem $n, A, B$) dann und nur dann gültig, wenn*

$$X(x) = X(\cos\theta) = A + B\frac{\cos n\theta \cos(n-1)\theta}{n} = A + B\frac{\cos\theta + \cos(2n-1)\theta}{2n}$$

*ist, oder dasselbe Polynom mit entgegengesetztem Vorzeichen.*

9. In der letzten Nummer dieses Paragraphen möchte ich die drei Interpolationsformeln im Falle Tschebyscheffscher Abszissen einmal ausführlich

---

[10]) Zweiter Beweis. Da

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2 = \frac{1}{n^2}(1 - x_k^2)\frac{(T_n(x))^2}{x - x_k},$$

so ist, wegen $(T_n(\pm 1))^2 = 1$,

$$\mathfrak{h}_k(1) = \frac{1}{n^2}(1 - x_k^2)\cdot\frac{1}{1 - x_k} = \frac{1 + x_k}{n^2} > 0,$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}.$$

Weiter ist

$$\mathfrak{h}_k(-1) = \frac{1}{n^2}(1 - x_k^2)\cdot\frac{1}{-1 - x_k} = -\frac{1 - x_k}{n^2} < 0,$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(-1)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - x_k}{n^2} = \frac{1}{n},$$

womit Satz 4 wieder bewiesen ist.

anschreiben:

$$(\alpha) \qquad \Lambda(x) = \Lambda(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin\theta_k}{n} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k},$$

$$(\beta) \qquad \mathsf{X}(x) = \mathsf{X}(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{1-\cos\theta_k\cos\theta}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k' \frac{\sin^2\theta_k}{n^2} \frac{\cos^2 n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k},$$

$$(\gamma) \qquad \mathsf{X}(x) = \mathsf{X}(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{1-\cos\theta_k\cos\theta}{n^2} \left(\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \eta_k' \frac{\sin\theta_k}{n^2} \frac{\cos^2 n\theta}{\cos\theta_k - \cos\theta}.$$

$(\alpha)$ gibt die Darstellung derjenigen ganzen rationalen Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade in $x$ in trigonometrischer Form, die an den Tschebyscheffschen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der Reihe nach, die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt. $(\beta)$ gibt die Darstellung derjenigen ganzen rationalen Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in $x$ in trigonometrischer Form, die an denselben Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der Reihe nach, die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und die Ableitungswerte (nach $x$) $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ besitzt. Endlich gibt $(\gamma)$ die Darstellung desjenigen reinen Kosinuspolynoms in $\theta$ von höchstens $(2n-1)$-ter Ordnung, welches an den Stellen

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad \theta_2 = 3\frac{\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \theta_n = (2n-1)\frac{\pi}{2n},$$

der Reihe nach, die Werte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ und die Ableitungswerte (nach $\theta$) $\eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n'$ besitzt.

Weiter ist noch nützlich die folgende Formel, die das Lagrangesche Interpolationspolynom $\Lambda(x)$ in der Form eines Kosinuspolynoms gibt:

$$(\delta) \qquad \Lambda(\cos\theta) = \alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \cos r\theta,$$

wo

$$\alpha_0 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu, \qquad \alpha_r = \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \cos r\theta_\nu \qquad (r = 1, 2, \ldots, (n-1)),$$

$$\theta_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus dieser Formel $(\delta)$ folgt z. B. unmittelbar

$$(\varepsilon) \qquad l_k(x) = l_k(\cos\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} \cos r\theta_k \cos r\theta.$$

Schließlich bemerke ich hier, daß der Satz 2 noch die folgende Formulierung gestattet:

Ist für ein reines Kosinuspolynom $K(\theta)$ von höchstens $(2n-1)$-ter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} |K(\theta_k)| \leqq A, \quad |K'(\theta_k)| \leqq B, \\ \theta_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist für jeden reellen Wert von $\theta$

$$|K(\theta)| \leqq A + \lambda_n B,$$

wo $\lambda_n$ wieder die Zahl unter (48) bezeichnet.

## § 3.

## Abschätzung im Falle der Legendre-Gaußschen Abszissen.

**10.** Für den Fall der Legendre-Gaußschen Abszissen möchte ich hier nur denjenigen Satz ableiten, der dem Satz 1 entspricht. Da für $\omega(x) = P(x)$, wo $P(x) = P_n(x)$ das $n$-te Legendresche Polynom bezeichnet, die Differentialgleichung

$$(63) \qquad (1-x^2)P'' - 2xP' + n(n+1)P = 0$$

besteht, so ist für eine Nullstelle $x_k$ von $P(x)$

$$(64) \qquad \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = \frac{2x_k}{1-x_k^2},$$

und also

$$(65) \qquad v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) = \frac{1 - 2xx_k + x_k^2}{1 - x_k^2},$$

$$(66) \qquad h_k(x) = \frac{1 - 2xx_k + x_k^2}{1 - x_k^2}(l_k(x))^2,$$

$$(67) \qquad \mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2.$$

Da nach (65) $v_k(-1) = \frac{1+x_k}{1-x_k} > 0$, $v_k(1) = \frac{1-x_k}{1+x_k} > 0$, also ist die Linearfunktion $v_k(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ positiv, und ebenda $h_k(x) \geqq 0$. Weiter ist

$$(68) \qquad \mathfrak{h}_k(x) = \frac{x - x_k}{1 - 2xx_k + x_k^2}(1 - x_k^2)h_k(x) = q_k(x)h_k(x).$$

Da aber der Nenner der in $x$ linearen gebrochenen Funktion von $x$

$$(69) \qquad q_k(x) = \frac{x - x_k}{v_k(x)} = \frac{x - x_k}{1 - 2xx_k + x_k^2}(1 - x_k^2)$$

im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ nirgend verschwindet, so ist $|q_k(x)|$ ebenda nicht größer als der größere der beiden Werte $|q_k(-1)|$, $|q_k(+1)|$. Da

aber nach (69)

$$|q_k(-1)| = \frac{|-1-x_k|}{|v_k(-1)|} = \frac{1+x_k}{\frac{1+x_k}{1-x_k}} = 1-x_k < 2 \tag{70}$$

und

$$|q_k(+1)| = \frac{1-x_k}{\frac{1-x_k}{1+x_k}} = 1+x_k < 2, \tag{71}$$

so ist also

$$|q_k(x)| < 2 \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 1 \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{72}$$

(68), (69) und (72) ergeben

$$|\mathfrak{h}_k(x)| \leqq 2h_k(x). \tag{73}$$

Formel (5) liefert nun auf Grund der abgeleiteten Eigenschaften von $h_k(x)$ und $\mathfrak{h}_k(x)$ den folgenden Satz:

Satz 5. *Wenn eine ganze rationale Funktion* $\mathsf{X}(x)$ *von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade an den Nullstellen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *des* $n$*-ten Legendreschen Polynoms die Ungleichungen*

$$|\mathsf{X}(x_k)| \leqq A, \quad |\mathsf{X}'(x_k)| \leqq B \tag{74}$$

*befriedigt, so ist*

$$|\mathsf{X}(x)| \leqq A + 2B \tag{75}$$

*im ganzen Intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$.

Man beachte den Spezialfall[11] $B=0$ und den mit $A=0$.

Es ist sehr bemerkenswert, daß ich bei dem Beweise dieses Satzes 5 nur benützt habe, daß die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voneinander verschiedene Werte des Intervalles $-1 \leqq x \leqq 1$ sind, und daß $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ der Differentialgleichung $(1-x^2)\omega'' - 2x\omega' + n(n+1)\omega = 0$ genügt.

## II. Teil.

## Anwendung der Resultate des I. Teiles auf den Beweis des Satzes, daß die Hermiteschen Interpolationspolynome einer beliebigen stetigen Funktion im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zur Funktion $f(x)$ konvergieren, wenn die Interpolationsabszissen die Tschebyscheffschen sind, und wenn die Steilheit der Interpolationskurven in diesen Abszissen einer Bedingung unterworfen sind.

### Einleitende Bemerkungen.

1. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wieder die Tschebyscheffschen Abszissen. Unter einem Hermiteschen Polynom $n$-ter Ordnung $\mathsf{X}_n(x)$ einer *Funktion* $f(x)$

[11]) Fejér 2, Nr. 7, Theorem III.

verstehe ich nun eine ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in $x$, welche an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der Reihe nach, denselben Wert annimmt wie die Funktion $f(x)$; d. h.

$$(1) \qquad X_n(x_1) = f(x_1), \quad X_n(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad X_n(x_n) = f(x_n),$$

während die Ableitungen $X_n'(x_1), X_n'(x_2), \ldots, X_n'(x_n)$ ganz beliebige Werte haben können (die mit den eventuell vorhandenen Werten $f'(x_1)$, $f'(x_2), \ldots, f'(x_n)$ gar nichts zu tun zu haben brauchen).

**2.** Es gibt also eine $n$-fach unendliche Schar von Hermiteschen Polynomen $n$-ter Ordnung $X_n(x)$. Alle Kurven der Schar haben für die Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dieselben Ordinaten, die, der Reihe nach, mit den Ordinaten der Funktion, d. h. mit $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ identisch sind.

**3.** Übrigens hat bekanntlich auch

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

für jede Hermitesche Parabel der Schar $n$-ter Ordnung denselben Wert $J_n$. Da nämlich die Differenz zweier Polynome $X_n(\cos\theta)$ und $\overline{X}_n(\cos\theta)$ der Schar für $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ verschwindet, so ist

$$(3) \qquad X_n(\cos\theta) - \overline{X}_n(\cos\theta) = \cos n\theta \cdot p(\theta),$$

wo $p(\theta)$ ein Kosinuspolynom von höchstens $(n-1)$-ter Ordnung bezeichnet, woraus

$$(4) \qquad \int_0^{\pi} (X_n(\cos\theta) - \overline{X}_n(\cos\theta))\, d\theta = 0,$$

also die Behauptung folgt. Da übrigens

$$(5) \qquad J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} X_n(\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{\pi}{n}\left[f(\cos\theta_1) + f(\cos\theta_2) + \ldots + f(\cos\theta_n)\right]$$

ist, so ist

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

(Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Legendre-Gaußschen Abszissen, so hat bekanntlich (nach Gauß und Jacobi)

$$(7) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n(x)\, dx$$

denselben Wert für jedes Hermitepolynom der Schar $n$-ter Ordnung, und es ist, nach Stieltjes,

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} X_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx, \tag{8}$$

wenn $f(x)$ (ebenso wie im Tschebyscheffschen Falle) eine beliebige, im Intervalle $(-1, +1)$ beschränkte, und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion bezeichnet.)

Ganz kurz ausgedrückt besagt (6): das *Integral* $\int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konvergiert für $\lim n = \infty$ gegen $\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, wenn $X_n(x)$ ein *beliebiges* Hermitepolynom der $n$-ten Schar bezeichnet.

4. Wie steht es aber mit den *Ordinaten* von $X_n(x)$ für $\lim n = \infty$, wenn $x$ eine beliebige Stelle im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ bezeichnet, d. h. mit

$$\lim_{n=\infty} X_n(x)\,? \tag{9}$$

Das ist die Frage, die ich mir im Jahre 1915 gestellt habe, und die für mich aus vierfachem Grunde Interesse hatte.

*Erstens* tritt die Schar $n$-ter Ordnung $X_n(x)$ im klassischen Probleme der mechanischen Quadratur (Gauß, Mehler) auf.

*Zweitens* steht das Polynom (von höchstens $(2n-1)$-tem Grade) $X_n(x)$ dem hier bei *beliebiger* stetigen Funktion $f(x)$ versagendem Lagrangeschen Polynom (von höchstens $(n-1)$-tem Grade) $L_n(x)$ begrifflich ziemlich nahe.

*Drittens* war es wünschenswert, für die Herstellung Weierstraßscher Approximationspolynome einer beliebigen stetigen Funktion eine solche Interpolationsregel aufzustellen, die sich der im allgemeinen nicht zum Ziele führenden Lagrangeschen Regel möglichst eng anschließt.

*Viertens* haben die zur Darstellung von $X_n(x)$ dienenden Hermiteschen Grundfunktionen (bei beliebigen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und für beliebiges $n$) höchstens *ein* Zeichenwechsel für $-\infty < x < +\infty$, so daß also die $X_n(x)$ der Interpolationstheorie an die arithmetischen Mittel der Fourierschen Reihe erinnern.

Die *Antwort* auf die Frage in bezug auf $\lim_{n=\infty} X_n(x)$ lautet nun, ganz kurz gefaßt (und im Falle Tschebyscheffscher Abszissen, auf welche ich mich hier beschränken möchte), daß für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$

$$\lim_{n=\infty} X_n(x) = f(x) \tag{10}$$

ist, und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, wenn nur die *Steilheit* von $X_n(x)$ in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (d. h. $|X_n'(x_1)|, |X_n'(x_2)|, \ldots, |X_n'(x_n)|$) *nicht zu groß ist.*

Im Jahre 1915 konnte ich diesen Satz nur für dasjenige $X_n(x)$ der Schar $n$-ter Ordnung beweisen, für welches die Steilheit in allen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleich 0 ist, d. h. $X_n'(x_1) = X_n'(x_2) = \ldots = X_n'(x_n) = 0$, d. h. für die Treppenparabel $H_n(x)$ der Schar, d. h. ich konnte beweisen, daß gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq +1) \tag{11}$$

stattfindet, wenn $f(x)$ eine beliebige, in diesem Intervalle stetige Funktion bezeichnet. Erst neuerdings ist es mir gelungen, den Satz für beliebige, aber sachgemäß beschränkte Steilheit zu beweisen.

In § 1 dieses II. Teiles findet man den genauen Wortlaut und den Beweis dieses Satzes. Dabei beschränke ich mich auf den Fall Tschebyscheffscher Abszissen und gedenke auf den Fall Legendre-Gaußscher Abszissen (den ich in meinen Arbeiten (Fejér **1**, **2**) im Spezialfalle, wo die Steilheit in allen diesen Abszissen $= 0$ ist, d. h. für die Treppenparabel bei Legendre-Gaußschen Abszissen, ebenfalls vollständig erledigt hatte) erst später zurückzukommen, bei welcher Gelegenheit ich allgemeiner auch die sogenannten ultrasphärischen Abszissen berücksichtigen möchte, da die Tschebyscheffschen und Legendre-Gaußschen auch solche Abszissengruppen sind.

## § 1.

### Formulierung des Satzes und Konvergenzbeweis. Verschärfung eines Spezialfalles für die Endpunkte $x = \pm 1$.

**1.** Satz 6. *Es bezeichne $f(x)$ eine beliebig gegebene Funktion von $x$, die im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ überall stetig ist, und $X_n(x)$ eine ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, für welche in den Tschebyscheffschen Abszissen*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad \left(x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n},\ k = 1, 2, \ldots, n\right),$$

$$X_n(x_k) = f(x_k), \qquad |X_n'(x_k)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq \varepsilon_n \frac{n}{\log n}, \tag{1}$$

$$n = 2, 3, \ldots, \infty; \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*gültig ist, mit $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Dann ist für $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig*[12])

$$\lim_{n=\infty} X_n(x) = f(x). \tag{2}$$

---

[12]) Angekündigt in Fejér **3**, Nr. 19, Fußnote [6]).

**2. Beweis.** Es ist

$$X_n(x) = H_n(x) + \mathfrak{H}_n(x). \tag{3}$$

Da $X_n'(x_k) = \mathfrak{H}_n'(x_k)$, also ist, für $n > 1$, auf Grund der Voraussetzung (1)

$$|\mathfrak{H}_n'(x_k)|\sqrt{1-x_k^2} \leqq \varepsilon_n \frac{n}{\log n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Da aber

$$\mathfrak{H}_n(x_k) = 0, \tag{5}$$

so liefert Satz 2 $\left(\text{für } A = 0,\ B = \varepsilon_n \frac{n}{\log n}\right)$

$$|\mathfrak{H}_n(x)| \leqq \lambda_n \cdot \varepsilon_n \frac{n}{\log n} \qquad (-1 \leqq x \leqq +1). \tag{6}$$

Also ist, wegen (48) des I. Teiles und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$,

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{H}_n(x) = 0, \tag{7}$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

**3.** Nun ist aber[13]) weiter gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$

$$\lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x). \tag{8}$$

Dies folgt unmittelbar in üblicher Weise aus

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) h_k(x),$$

wenn man

1) $h_k(x) \geqq 0$, für $k = 1, 2, \ldots, n$; $-1 \leqq x \leqq 1$,

2) $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$, für jedes $x$,

3) $\sum'' h_k(x) \leqq \frac{2}{\varrho^2} \frac{1}{n}$

berücksichtigt. 1) ist schon in Nr. 4 des I. Teiles, 2) in der Formel (13) von Nr. 2 des I. Teiles angegeben worden, während 3) einer Erläuterung bedarf. Zunächst verstehe ich unter $\sum'' h_k(x)$ (bei beliebigem, aber fest gewähltem $x$ aus dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$) die Summe aller Grundpolynome erster Art $h_k(x)$, die den außerhalb des Intervalles $x - \varrho \leqq u \leqq x + \varrho$ fallenden Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsprechen, wo $\varrho$ eine beliebig gewählte, aber feste positive Größe bezeichnet. (Die Summe $\sum''$ kann eventuell leer ausfallen.) Da für jedes $h_k(x)$

$$h_k(x) = \frac{1 - x_k x}{n^2} \left(\frac{T_n(x)}{x - x_k}\right)^2 \leqq \frac{2}{n^2 (x - x_k)^2}, \tag{9}$$

---

[13]) Fejér 2, Nr. 15, Theorem XI.

so ist, für die in der Summe $\sum'' h_k(x)$ auftretenden $h_k(x)$, für die doch $|x_k - x| > \varrho$ ist,

$$h_k(x) \leqq \frac{2}{n^2 \varrho^2}, \tag{10}$$

also

$$\sum'' h_k(x) \leqq \frac{2}{\varrho^2 n^2} \sum'' 1 \leqq \frac{2}{\varrho^2 n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{2}{\varrho^2} \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Hiermit ist 3) erläutert und bewiesen. Mit (7) und (8) ist aber (mit Rücksicht auf (3)) der Satz 6 schon bewiesen.

4. Im Satz 6 läßt sich die Bedingung

$$|X_n'(x_k)| \sqrt{1 - x_k^2} \leqq \varepsilon_n \frac{n}{\log n}, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{12}$$

im asymptotischen Sinne nicht verbessern. Denn es sei $f(x) \equiv 0$, also

$$X_n(x_1) = X_n(x_2) = \ldots = X_n(x_n) = 0 \tag{13}$$

(d. h. $X_n(x)$ ist eine Wellenparabel $\mathfrak{W}_n(x)$), und es sei

$$\begin{cases} X_n'(x_1) = X_n'(x_2) = \ldots = X_n'(x_\nu) = -\dfrac{n}{\log n} \\ X_n'(x_{\nu+1}) = X_n'(x_{\nu+2}) = \ldots = X_n'(x_{2\nu}) = \dfrac{n}{\log n} \end{cases} \tag{14}$$

für gerades $n = 2\nu$, und $X_n(x) \equiv 0$ für ungerades $n = 2\nu - 1$. Dann ist, nach Teil I, Nr. 7, an der Stelle $x = 0$

$$\lim_{\nu=\infty} X_{2\nu}(0) = \frac{2}{\pi} + f(0), \tag{15}$$

da doch $f(0) = 0$ ist (während $\lim_{\nu=\infty} X_{2\nu-1}(0) = 0 = f(0)$ ist). Also divergiert die Folge $X_n(0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

5. Ein Spezialfall von Satz 6 lautet:

Ist in den Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$X_n(x_k) = f(x_k), \qquad |X_n'(x_k)| \leqq \varepsilon_n \frac{n}{\log n} \tag{16}$$

mit $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, dann ist in $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig $\lim_{n=\infty} X_n(x) = f(x)$, wenn $f(x)$ in diesem Intervalle überall stetig ist. *Dieser* Satz gestattet in den Endpunkten $\pm 1$ die folgende Verschärfung:

*Ist in den Tschebyscheffschen Abszissen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$X_n(x_k) = f(x_k), \qquad |X_n'(x_k)| \leqq \varepsilon_n n \tag{17}$$

*mit* $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, *dann ist*

$$\lim_{n=\infty} X_n(\pm 1) = f(\pm 1). \tag{18}$$

Beispiel. Es sei wieder $f(x) \equiv 0$ und $X_n(x)$ die in der Nr. 4 des II. Teiles definierte Folge. Dann ist einerseits die Bedingung (17) erfüllt $\left(\text{und zwar mit } \varepsilon_n = \frac{1}{\log n}\right)$. Andererseits ist für $x = \pm 1$ $X_n(\pm 1) = 0$, wenn $n$ eine ungerade Zahl ist. Aber auch für gerades $n = 2\nu$ ist $\lim_{n=\infty} X_n(\pm 1) = 0$, denn

$$(19)\quad X_n(+1) = \mathfrak{Y}_n(+1) = -\frac{n}{\log n}\sum_{k=1}^{\nu}\mathfrak{h}_k(1) + \frac{n}{\log n}\sum_{k=\nu+1}^{2\nu}\mathfrak{h}_k(1)$$

$$= -\frac{1}{n\log n}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\sin^2\theta_k}{1-\cos\theta_k} - \sum_{k=\nu+1}^{2\nu}\frac{\sin^2\theta_k}{1-\cos\theta_k}\right)$$

$$= -\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{\nu}\sin^2\theta_k\left(\frac{1}{1-\cos\theta_k} - \frac{1}{1+\cos\theta_k}\right)$$

$$= -\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{2\sin^2\theta_k\cos\theta_k}{1-\cos^2\theta_k} = -\frac{2}{n\log n}\sum_{k=1}^{\nu}\cos\theta_k$$

$$= -\frac{1}{n\log n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} \to 0.$$

Es ist also tatsächlich $\lim_{n=\infty} X_n(+1) = 0$, und wegen $X_n(-1) = X_n(+1)$ ist auch $\lim_{n=\infty} X_n(-1) = 0$. Hingegen ist nach Formel (15) (ich erinnere nur daran) $\lim_{\nu=\infty} X_{2\nu}(0) = \frac{2}{\pi}$.

## I. Anhang.

### Beweis eines Faberschen Satzes[14]).

**1.** Es seien

$$(1)\qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

beliebig gegebene Werte, die voneinander verschieden sind und dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ angehören. Ich behaupte, daß es eine ganze rationale Funktion von höchstens $n$-tem Grade gibt, so daß einerseits

$$(2)\qquad |g(x_0)| \leqq 1, \quad |g(x_1)| \leqq 1, \ \ldots, \ |g(x_n)| \leqq 1,$$

während es andererseits doch ein ebenfalls dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$

[14]) Vgl. Faber 1, insbesondere von S. 203—208. Vorliegender Beweis ist genau dem Faberschen nachgebildet; er verdankt seine Kürze hauptsächlich der Bemerkung, daß das reine Kosinuspolynom in $\alpha$ unter (17) offenbar das absolute Glied 0 hat. Übrigens beabsichtige ich auf diesen Gegenstand in einer anderen Publikation noch zurückzukommen.

angehörendes $X$ gibt, so daß

$$|g(X)| > \frac{1}{12}\log n. \tag{3}$$

Da durch die Substitution

$$x = \cos t \tag{4}$$

eine jede ganze rationale Funktion von höchstens $n$-tem Grade in $x$ in ein Kosinuspolynom von höchstens $n$-ter Ordnung in $t$ übergeht (und umgekehrt), so ist, wenn

$$x_0 = \cos t_0, \quad x_1 = \cos t_1, \ \ldots, \ x_n = \cos t_n, \qquad 0 \leqq t_k \leqq \pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

unsere Behauptung mit der folgenden äquivalent:

Es seien

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \tag{6}$$

beliebig gegebene Werte, die voneinander verschieden sind und dem Intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$ angehören; dann existiert ein reines Kosinuspolynom $T(t)$ von höchstens $n$-ter Ordnung, so daß einerseits

$$|T(t_0)| \leqq 1, \quad |T(t_1)| \leqq 1, \ \ldots, \ |T(t_n)| \leqq 1, \tag{7}$$

während andererseits ein ebenfalls dem Intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$ angehörendes $\tau$ existiert, so daß

$$|T(\tau)| > \frac{1}{12}\log n. \tag{8}$$

**2.** Beweis. Es seien $l_0(t), l_1(t), \ldots, l_n(t)$ die Grundpolynome der zu den Abszissen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gehörenden Lagrangeschen trigonometrischen Interpolation für reine Kosinuspolynome; genauer: $l_k(t)$ sei dasjenige reine Kosinuspolynom $n$-ter Ordnung in $t$, das an der Stelle $t = t_k$ den Wert 1 hat, an allen übrigen Interpolationsstellen $t_r$ $(r = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ aber verschwindet[15]). Dann stellt die Formel

$$\eta_0 l_0(t) + \eta_1 l_1(t) + \ldots + \eta_n l_n(t) \tag{9}$$

dasjenige Kosinuspolynom von höchstens $n$-ter Ordnung dar, welches an den Stellen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ der Reihe nach die Werte $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ annimmt.

**3.** Es bezeichne nun $\varphi(\theta)$ das folgende reine Kosinuspolynom $(2n$-ter Ordnung) in $\theta$

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) + \chi(\theta), \tag{10}$$

---

[15]) Es ist

$$l_k(t) = \frac{(\cos t - \cos t_0)(\cos t - \cos t_1)\ldots(\cos t - \cos t_{k-1})(\cos t - \cos t_{k+1})\ldots(\cos t - \cos t_n)}{(\cos t_k - \cos t_0)(\cos t_k - \cos t_1)\ldots(\cos t_k - \cos t_{k-1})(\cos t_k - \cos t_{k+1})\ldots(\cos t_k - \cos t_n)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

wo

$$(11) \qquad \psi(\theta) = \frac{1}{6}\left(\frac{\cos\theta}{n} + \frac{\cos 2\theta}{n-1} + \ldots + \frac{\cos n\theta}{1}\right),$$

$$(12) \qquad \chi(\theta) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{1} + \frac{\cos(n+2)\theta}{2} + \ldots + \frac{\cos 2n\theta}{n}\right).$$

**4.** Es sei weiter $\alpha$ eine beliebige, aber festgewählte reelle Zahl.

Ich betrachte nun dasjenige Kosinuspolynom $\mathcal{J}(\alpha, t)$ von höchstens $n$-ter Ordnung in $t$, welches an unseren Stellen $t_0, t_1, \ldots, t_n$, der Reihe nach, denselben Wert annimmt, als das reine Kosinuspolynom in $t$

$$(13) \qquad \Phi(\alpha, t) = \frac{\varphi(\alpha - t) + \varphi(\alpha + t)}{2}.$$

Nach Formel (9) lautet dieses Kosinuspolynom $\mathcal{J}(\alpha, t)$

$$(14) \quad \mathcal{J}(\alpha, t) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(\alpha, t_k)\, l_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(\alpha - t_k) + \varphi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi(\alpha - t_k) + \psi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t).$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi(\alpha - t_k) + \psi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t) = \frac{\psi(\alpha - t) + \psi(\alpha + t)}{2},$$

weil doch die Summe linker Hand nach Formel (9) dasjenige Kosinuspolynom von höchstens $n$-ter Ordnung darstellt, welches an den Stellen $t_k$ die Werte $\frac{\psi(\alpha - t_k) + \psi(\alpha + t_k)}{2}$ annimmt, und $\frac{\psi(\alpha - t) + \psi(\alpha + t)}{2}$ ist eben dieses Kosinuspolynom in $t$. Also ist

$$(15) \qquad \mathcal{J}(\alpha, t) = \frac{\psi(\alpha - t) + \psi(\alpha + t)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(t).$$

**5.** An der Stelle $t = \alpha$ nimmt $\mathcal{J}(\alpha, t)$ nach Formel (15) den Wert

$$(16) \quad \mathcal{J}(\alpha, \alpha) = \frac{\psi(0)}{2} + \frac{\psi(2\alpha)}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(\alpha) = \frac{\psi(0)}{2} + U(\alpha)$$

an. Nun ist aber $U(\alpha)$ in $\alpha$ ein Kosinuspolynom *mit dem absoluten Gliede* 0. Für $\frac{\psi(2\alpha)}{2}$ folgt dies aus (11). Für

$$(17) \qquad \frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}\, l_k(\alpha)$$

aber aus dem Umstande, daß $\frac{\chi(\alpha - t_k) + \chi(\alpha + t_k)}{2}$ nach (12) ein Kosinus-

polynom in $\alpha$ ist, welches, ebenfalls auf Grund von (12), mit Konst. $\cos(n+1)\alpha$ *anfängt*, während $l_k(\alpha)$ mit Konst. $\cos n\alpha$ *endigt*.

Da aber ein reines Kosinuspolynom ohne absolutem Gliede für mindestens eine Stelle $\alpha = \alpha^*$ des Intervalles $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ verschwindet, so existiert also in diesem Intervalle mindestens ein Wert $\alpha^*$, für welchen

$$U(\alpha^*) = 0 \tag{18}$$

ist, so daß also, nach (16), für diesen Wert $\alpha^*$ von $\alpha$

$$\mathcal{J}(\alpha^*, \alpha^*) = \frac{\psi(0)}{2} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{12}\log n \tag{19}$$

ist.

6. Jetzt haben wir schon das gesuchte Kosinuspolynom $T(t)$; es ist

$$T(t) = \mathcal{J}(\alpha^*, t) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(\alpha^*, t_k) l_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(\alpha^* - t_k) + \varphi(\alpha^* + t_k)}{2} l_k(t). \tag{20}$$

Tatsächlich ist einerseits

$$|T(t_k)| = |\mathcal{J}(\alpha^*, t_k)| = \left|\frac{\varphi(\alpha^* - t_k) + \varphi(\alpha^* + t_k)}{2}\right| \leqq 1, \tag{21}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n,$$

weil doch bekanntlich das unter (10), (11) und (12) definierte $\varphi(\theta)$ für jeden reellen Wert von $\theta$ dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ ist[16]), andererseits ist nach (19)

$$T(\alpha^*) = \mathcal{J}(\alpha^*, \alpha^*) > \frac{1}{12}\log n. \tag{22}$$

## II. Anhang.

**Beispiel einer ganzen rationalen Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, die im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ einen beliebig großen Wert annimmt, wenn nur $n$ gehörig groß ist, obwohl der Funktionswert und der Ableitungswert in $n$ äquidistanten Punkten des Intervalles dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ ist.**

1. Satz 1 besagt, daß, wenn für ein Polynom $X(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in den Tschebyscheff-Abszissen $x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$

$$|X(x_k)| \leqq 1, \quad |X'(x_k)| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

gültig ist, so ist im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$

$$|X(x)| \leqq 2. \tag{2}$$

---

[16]) Siehe z. B. Fejér 4, S. 64.

In diesem Anhang will ich zeigen, daß, wenn die Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nach Newton gewählt, d. h. äquidistant verteilt sind, $|X(x)|$ im Intervalle jeden Wert übersteigen kann, wenn nur $n$ gehörig groß ist, obwohl die Ungleichungen $|X(x_k)| \leqq 1$, $|X'(x_k)| \leqq 1$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ befriedigt sind.

**2.** Unter den zunächst beliebigen, aber voneinander verschiedenen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ möge auch die 0 vorkommen. Es sei etwa $x_\nu = 0$. Weiter sei $\omega''(x_\nu) = 0$, wo

$$\omega(x) = \prod_{l=1}^{n}(x - x_l). \tag{3}$$

Dann ist das zu $x_\nu$ gehörige Grundpolynom erster Art

$$h_\nu(x) = h(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x - x_\nu)\right)(l_\nu(x))^2 = (l_\nu(x))^2 = (l(x))^2, \tag{4}$$

wenn ich für $h_\nu(x)$ kürzer $h(x)$, für $l_\nu(x)$ kürzer $l(x)$ schreibe. Also ist

$$h(1) = (l(1))^2. \tag{5}$$

(Übrigens ist wegen $\mathfrak{h}_\nu(x) = (x - x_\nu)(l_\nu(x))^2 = x(l(x))^2$ für $x = 1$ auch $\mathfrak{h}(1) = (l(1))^2$.)

**3.** Es seien jetzt

$$-x_\nu, -x_{\nu-1}, \ldots, -x_1, 0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu \tag{6}$$

die $n = 2\nu + 1$ Interpolationsabszissen, wo $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ voneinander verschiedene (wachsende) positive, sonst aber zunächst beliebige Zahlen bezeichnen. Dann ist für die Interpolationsstelle 0, weil

$$\omega(x) = x\prod_{l=1}^{\nu}(x^2 - x_l^2) = x\,\Omega(x) \tag{7}$$

in $x$ ungerade ist, $\omega''(0) = 0$ befriedigt. Nun ist aber das zur Interpolationsstelle 0 gehörige Lagrangesche Grundpolynom

$$l(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(0)\,x} = \frac{\Omega(x)}{\Omega(0)}, \tag{8}$$

also ist

$$l(1) = \frac{\Omega(1)}{\Omega(0)}. \tag{9}$$

(5) und (9) liefern endlich

$$h(1) = \left(\frac{\Omega(1)}{\Omega(0)}\right)^2. \tag{10}$$

Das Resultat dieser Rechnung läßt sich so aussprechen:

Bezeichnet $h(x)$ diejenige ganze rationale Funktion $(2n-2)$-ten Grades, die 1. an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 hat, 2. an allen übrigen Stellen (6) verschwindet, 3. deren Ableitung an allen $n = 2\nu + 1$ Stellen

(6) verschwindet, so nimmt dieses Polynom (übrigens ein Treppenpolynom, und zwar das zu den Stellen (6) und zur Interpolationsstelle 0 gehörige Treppengrundpolynom) für $x = 1$ den Wert

$$h(1) = \left(\frac{\Omega(1)}{\Omega(0)}\right)^2 \tag{11}$$

an, wo

$$\Omega(x) = \prod_{k=1}^{\nu}(x^2 - x_k^2). \tag{12}$$

**4.** Es sei jetzt

$$x_k = \frac{2k}{n} = \frac{2k}{2\nu+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{13}$$

Die $n = 2\nu + 1$ Interpolationsstellen (6) entstehen dann so, daß ich das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ in $n = 2\nu + 1$ gleiche Teile zerlege und den Mittelpunkt jedes Teilintervalles nehme. Jetzt ist die Formel (11) anwendbar, und da jetzt

$$\Omega(x) = \prod_{k=1}^{\nu}\left(x^2 - \frac{4k^2}{n^2}\right) \qquad (n = 2\nu + 1), \tag{14}$$

so ist[17]), mit Rücksicht auf (11), (12) und (14),

$$\sqrt{h(1)} = \frac{\Omega(1)}{|\Omega(0)|} = \frac{\prod_{k=1}^{\nu}\left(1 - \frac{4k^2}{n^2}\right)}{\prod_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2}{n^2}} = \frac{\prod_{k=1}^{\nu}(n^2 - 4k^2)}{\prod_{k=1}^{\nu}4k^2} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{4^\nu(\nu!)^2}\prod_{k=1}^{\nu}(n^2 - 4k^2) = \frac{1}{4^\nu(\nu!)^2}\prod_{k=1}^{\nu}(2(\nu-k)+1)(2(\nu+k)+1)$$

$$= \frac{1}{4^\nu(\nu!)^2}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)(2\nu+3)(2\nu+5)\ldots(4\nu+1)$$

$$= \frac{(4\nu+1)!!}{4^\nu(\nu!)^2(2\nu+1)},$$

wo $(2l+1)!!$ das Produkt aller ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots (2l+1)$ bezeichnet. Da aber $(2l+1)!! = \frac{(2l+1)!}{2^l l!}$, so ist

---

[17]) Die nun folgende Rechnung ist (mit ganz unwesentlichem Unterschiede) genau dieselbe, die de la Vallée Poussin in seiner Arbeit vom Jahre 1908 (de la Vallée Poussin 1) auf den Seiten 321, 322 veröffentlicht hat. Er errechnet da den Wert des „polynôme du milieu" der Lagrangeschen Interpolationsformel im Mittelpunkte des äußersten Interpolationsintervalles, d. h. an der Stelle $\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$, wenn $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ die $2n+1$ äquidistanten Interpolationsstellen bezeichnen.

$$(16) \qquad \sqrt{h(1)} = \frac{(4\nu+1)!}{4^{2\nu}(\nu!)^2(2\nu)!(2\nu+1)} = \frac{2^{2\nu+\frac{1}{2}}}{\pi\nu}(1+\varepsilon_\nu),$$

wo $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$. Also ist

$$(17) \qquad h(1) \sim \frac{2^{4\nu+1}}{\pi^2\nu^2}.$$

Ich habe also erhalten, daß $h(1)$ mit wachsendem $n = 2\nu+1$ jeden Wert übersteigt, trotzdem daß sowohl die ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade $h(x)$ (sie ist genau von $(2n-2)$-tem Grade), als ihre Ableitung $h'(x)$ an den Newtonschen Abszissen dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ ist.

**5.** Gleichzeitig erkennen wir, daß im Falle Newtonscher Abszissen nicht nur die Summe

$$(18) \qquad |h_1(x)| + |h_2(x)| + \ldots + |h_n(x)|,$$

sondern sogar ein einzelnes $h_k(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ einen beliebig großen Wert übersteigen kann, wenn nur $n$ gehörig groß ist. Da, wie eben erwähnt, $\mathfrak{h}(1) = (l(1))^2$, so können wir sagen, daß im Newtonschen Falle sogar ein einzelnes $\mathfrak{h}_k(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ beliebig große Werte annehmen kann, wenn nur $n$ gehörig groß ist. Hingegen ist im Falle Tschebyscheffscher oder auch Legendre-Gaußscher Abszissen (ich erinnere nur daran, um den Gegensatz zu betonen) $h_k(x) \geqq 0$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, und also, wegen der ganz allgemein gültigen Identität

$$(19) \qquad h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) = 1 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(20) \qquad |h_1(x)| + |h_2(x)| + \ldots + |h_n(x)| = 1 \quad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

Weiter ist im Falle Tschebyscheffscher Abszissen

$$(21) \qquad |\mathfrak{h}_1(x)| + |\mathfrak{h}_2(x)| + \ldots + |\mathfrak{h}_n(x)| \leqq 1 \quad (-1 \leqq x \leqq +1)$$

und im Falle Legendre-Gaußscher Abszissen

$$(22) \qquad |\mathfrak{h}_1(x)| + |\mathfrak{h}_2(x)| + \ldots + |\mathfrak{h}_n(x)| \leqq 2 \quad (-1 \leqq x \leqq +1).$$

Was die Grundpolynome $l_k(x)$ der Lagrangeschen Interpolation anbelangt, so sind, bei der günstigen Wahl der Abszissen nach Tschebyscheff, z. B. wegen (Formel $(\varepsilon)$, Nr. 9, Teil I)

$$l_k(x) = l_k(\cos\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} \cos r\theta_k \cos r\theta,$$

$$|l_k(x)| = |l_k(\cos\theta)| \leqq \frac{1}{n} + \frac{2}{n}(n-1) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

die einzelnen $l_k(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, für jedes $k$ und jedes $n$, beschränkt; nicht aber die Summe $\sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$.

## Literaturverzeichnis.

G. Faber. **1.** Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **23** (1914), S. 192—210.

L. Fejér. **1.** Interpolátióról (ungarisch). Mathematikai és Term. Értesitö (Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften) **34** (1916), S. 209—229. (Sitzung vom 15. November 1915.)

**2.** Über Interpolation. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1916).

**3.** Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation. Mathematische Annalen **102** (1930), S. 707—725.

**4.** Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieur, 3$^{e}$ série, **28** (1911), p. 63—103.

K. Grandjot. **1.** Über Polynome, die in Einheitswurzeln beschränkt sind. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1925), S. 80—86.

E. Landau. **1.** Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion". Math. Zeitschrift **5** (1919), S. 147—153.

Ch.-J. de la Vallée Poussin. **1.** Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes. Bulletins de l'Académie royale de Belgique (Classe des sciences) (1908), p. 319—410.

(Eingegangen am 18. Februar 1930.)

# Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche $\zeta$-Reihe.

Von

Helmut Hasse in Marburg.

Bekanntlich stehen die Bernoullischen Zahlen

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad \ldots,$$

die allgemein durch die erzeugende Funktion

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \tag{1}$$

definiert sind, mit den Werten der Riemannschen $\zeta$-Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für positive ganze $s = k$ in dem Zusammenhang

$$B_k = -\frac{k!}{(2\pi)^k} 2 \cos\frac{\pi k}{2} \zeta(k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).^{1})$$

Zufolge der Funktionalgleichung der $\zeta$-Funktion

$$\zeta(1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} 2 \cos\frac{\pi s}{2} \zeta(s) \tag{2}$$

ergibt sich daraus für die Werte von $\zeta(s)$ für negative ganze $s = 1 - k$ der einfachere Zusammenhang

$$B_k = -k\zeta(1-k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)^{2}) \tag{3}$$

mit den Bernoullischen Zahlen.

---

[1]) Für $k = 1$ ist auf der rechten Seite der Grenzwert für $k \to 1$ gemeint.

[2]) Für $k = 0$ ist auf der rechten Seite der Grenzwert für $k \to 0$ gemeint.

Nun besitzen die Bernoullischen Zahlen die independente Darstellung

$$(4) \qquad B_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (\nu+1)^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1} \Delta_n(\nu^k).$$

Dabei ist

$$\Delta_n(\nu^k) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (\nu+1)^k$$

das Anfangsglied der $n$-ten Differenzenreihe der Reihe $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$, die Differenzen — anders als in der Differenzenrechnung üblich — in der Richtung $1^k - 2^k, 2^k - 3^k, \ldots$ genommen. Man bestätigt (4) etwa durch Einsetzen in (1).[3])

[3]) Die Darstellung (4) wurde angegeben von J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, Crelle **94** (1883), Formel (36). — Siehe auch L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen (Berlin 1893), § 11, Formel LXIII.

Eine elegantere Herleitung, als die im Text angedeutete, ist die folgende. (1) lautet symbolisch ($B_k$ wird als symbolische Potenz $B^k$ geschrieben):

$$e^{Bx} = \frac{x}{1-e^{-x}}.$$

Daraus folgt

$$e^{(B+m)x} = \frac{x\, e^{mx}}{1-e^{-x}},$$

also

$$e^{(B+m)x} - e^{Bx} = x \frac{e^{mx}-1}{1-e^{-x}} = x\, e^x \frac{e^{mx}-1}{e^x-1} = x\,(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{mx}),$$

und daraus durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{(B+m)^{k+1} - B^{k+1}}{k+1} = 1^k + 2^k + \cdots + m^k,$$

oder also die bekannte Summenformel

$$1^k + 2^k + \cdots + m^k = \frac{1}{k+1}\left\{m^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 m^k + \binom{k+1}{2} B_2 m^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} B_k m\right\}.$$

Hiernach ist $B_k$ der Koeffizient von $m^1$ in dem $m$-Polynom, das durch die Summe der arithmetischen Reihe $k$-ter Ordnung links definiert wird. Für die ersten $m$ Glieder einer arithmetischen Reihe $k$-ter Ordnung, deren Differenzenreihen-Anfangsglieder $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$ lauten, gilt nun die Summenformel

$$\binom{m}{1}\Delta_0 - \binom{m}{2}\Delta_1 + \cdots + (-1)^k \binom{m}{k+1}\Delta_k.$$

Der Koeffizient von $m^1$ in diesem $m$-Polynom ist

$$\frac{\Delta_0}{1} + \frac{\Delta_1}{2} + \cdots + \frac{\Delta_k}{k+1}$$

Daher gilt in der Tat

$$B_k = \frac{\Delta_0(\nu^k)}{1} + \frac{\Delta_1(\nu^k)}{2} + \cdots + \frac{\Delta_k(\nu^k)}{k+1},$$

wo die $\Delta_n(\nu^k)$ die im Text erklärte Bedeutung haben.

Die Summe $\sum_{n=0}^{k}$ in (4) kann als formal unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty}$ geschrieben werden, weil bei einer arithmetischen Reihe $k$-ter Ordnung die Anfangsglieder der Differenzenreihen (wie überhaupt die ganzen Differenzenreihen) von höherer Ordnung als $k$ verschwinden. So bekommt der Ausdruck rechts in (4) auch für andere Werte als nur $k = 0, 1, 2, \ldots$ einen formalen Sinn, vorbehaltlich der Konvergenzfrage. In Hinblick auf die in (3) ausgedrückte Beziehung zur $\zeta$-Funktion liegt dann die Vermutung nahe, daß die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n(\nu^s)$ für alle komplexen $s$ konvergiert und die ganze Funktion $-s\zeta(1-s)$ darstellt.

Diese Vermutung bestätigt sich in der Tat. *Es gilt also, etwas anders geschrieben, für alle komplexen $s$ die Formel*

$$s\zeta(s+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right), \tag{5}$$

*wo*

$$\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{1}{(\nu+1)^s}$$

*das Anfangsglied der $n$-ten Differenzenreihe der Reihe $\frac{1}{1^s}, \frac{1}{2^s}, \frac{1}{3^s}, \ldots$ bedeutet.*

Man kann die in (5) rechts ausgedrückte Behandlungsvorschrift dieser Reihe (Summation der Anfangsglieder der Differenzenreihen mit den Gewichten $\frac{1}{n+1}$) als ein Summierungsverfahren ansehen. Der Unterschied gegenüber der bekannten Methode zur Fortsetzung von $\zeta(s)$ durch das Césaro-Höldersche Summierungsverfahren liegt dann darin, daß das hier geschilderte Verfahren nicht erst in unendlich vielen Schritten der Breite 1, sondern mit einem Schlage die Fortsetzung von $\zeta(s)$ in die ganze Ebene leistet*).

Den Beweis der Formel (5) werde ich nachstehend auf elementarem Wege führen, ohne irgendwelche Kenntnisse über die $\zeta$-Funktion und die Bernoullischen Zahlen, wie sie oben zur Anknüpfung dienten, vorauszusetzen. Auch aus der komplexen Funktionentheorie werde ich keinerlei Hilfsmittel heranziehen, nur natürlich zum Schluß die Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung, um die durch mein Summierungsverfahren gelieferte Fortsetzung der $\zeta$-Reihe mit der auf klassische Weise fortgesetzten $\zeta$-Funktion identifizieren zu können.

Speziell für reelle $s$ gehört mein Beweis der reellen Analysis an. Das ist von einem gewissen Interesse im Hinblick auf die Funktionalgleichung (2)

*) Siehe Anmerkung bei der Korrektur, S. 464.

der $\zeta$-Funktion, die zufolge meines Ergebnisses (5) mit der Reihen-Identität

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n(\nu^s) = -\frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi)^s} 2\cos\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\Re(s) > 1)$$

gleichwertig ist und so eine elementare, vom Prinzip der analytischen Fortsetzung freie, auch für reelle $s$ das Reelle nicht übersteigende Bedeutung bekommt. Analoges gilt natürlich auch schon bei der Fortsetzungsmethode durch das Summierungsverfahren von Césaro-Hölder. Für die dabei analog zu (6) entspringende, mit der Funktionalgleichung gleichwertige Reihenidentität hat Herr Cramér einen direkten, allein mit den Hilfsmitteln der reellen Analysis auskommenden Beweis gegeben[4]). Es ist mir leider bisher nicht gelungen, dem Cramérschen Beweis einen direkten, allein mit den Hilfsmitteln der reellen Analysis auskommenden Beweis der Reihen-Identität (6) zur Seite zu stellen.

Ich bemerke schließlich, daß man auf genau dieselbe Weise gleich die allgemeinere $\zeta$-Reihe

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}$$

mit beliebigem reellen $w > -1$ behandeln kann, und damit dann auch in bekannter Weise die Dirichletschen $L$-Reihen beherrscht. *Man findet analog zu* (5), *daß für alle komplexen $s$ gilt*

$$s\zeta(s+1, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n\left(\frac{1}{(w+\nu)^s}\right),$$

*wo*

$$\Delta_n\left(\frac{1}{(w+\nu)^s}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{1}{(w+\nu+1)^s}$$

*das Anfangsglied der $n$-ten Differenzenreihe der Reihe* $\frac{1}{(w+1)^s}, \frac{1}{(w+2)^s}, \frac{1}{(w+3)^s}, \ldots$ *bedeutet.*

Für den Beweis beschränke ich mich der Einfachheit und Durchsichtigkeit halber auf den Spezialfall (3) der Riemannschen $\zeta$-Reihe ($w = 0$).

---

[4]) H. Cramér, Sur une classe de séries de Dirichlet, Dissertation Stockholm (Upsala 1917). — Siehe auch die kürzlich erschienene Arbeit: W. Schnee, Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten, Math. Zeitschr. **31** (1930). — Einer freundlichen Mitteilung von Herrn Landau verdanke ich den Hinweis auf die von Herrn Schnee nicht zitierte Cramérsche Dissertation und darauf, daß in ihr (§ 1) der fragliche Beweis einfacher, im übrigen aber auf dem gleichen Wege geführt ist wie in der Schneeschen Arbeit (§ 1).

Ich beweise zunächst:

I. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right)$ *konvergiert für* $\Re(s) > 0$ *und ist dort* $= s\zeta(s+1)$.

Das ergibt sich aus der folgenden formalen Rechnung:

$$\frac{1}{\nu^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{s-1} dt,$$

$$\begin{aligned}
\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right) &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{1}{(\nu+1)^s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{-(\nu+1)t} t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^n e^{-t} t^{s-1} dt,
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^n}{n+1} e^{-t} t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^n}{n+1} e^{-t} t^{s-1} dt
\end{aligned}\right\} *$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t}{1-e^{-t}} e^{-t} t^{s-1} dt \\
&\left.\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t^s dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^s dt
\end{aligned}\right\} **
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^s dt \\
&= s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \\
&= s\zeta(s+1),
\end{aligned}$$

zu deren Rechtfertigung nur noch die Vertauschbarkeit von Summation und Integration bei * und ** zu zeigen ist. Diese folgt aber ohne weiteres

aus der gleichmäßigen Konvergenz der beiden fraglichen Betragreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^n}{n+1} e^{-t} t^{\sigma-1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t^{\sigma} \qquad (\sigma = \Re(s) > 0)$$

im ganzen Integrationsintervall $0 \leqq t \leqq \infty$, von der man sich mühelos überzeugt.

Man stellt leicht auch noch fest, daß die Konvergenz der Reihe in I eine absolute und in jedem ganz im Endlichen gelegenen, abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene $\Re(s) > 0$ gleichmäßige ist.

Nunmehr beweise ich:

II. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right)$ *konvergiert auch für* $\Re(s) \leqq 0$, *und zwar gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Teilbereich dieser Halbebene.*

*Sie stellt also die analytische Fortsetzung von* $s\zeta(1+s)$ *in die linke Halbebene dar.*

Zum Beweis gehe ich aus von der leicht zu bestätigenden Integraldarstellung der Differenzenreihen-Anfangsglieder:

$$\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right) = s(s+1)\cdots(s+n-1) \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^{n+s}} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

$$\cdot \int_0^1 \cdots \int_0^1 (1+x_1+\cdots+x_n)^{-s+p} \frac{1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^{n+p}} dx_1 \cdots dx_n,$$

wo $p$ irgendeine feste reelle positive nicht ganze Zahl bedeuten möge. Für $\sigma = \Re(s) \leqq 0$ ergibt sich so die Abschätzung

$$\left|\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right)\right| \leqq |s(s+1)\cdots(s+n+1)|\,(n+1)^{-\sigma+p}$$

$$\cdot \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^{n+p}} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \left|\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}\right| (n+1)^{-\sigma+p} \Delta_n\left(\frac{1}{\nu^p}\right).$$

Nun gilt bekanntlich

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \sim \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!\, n^{s-1}},$$

also

$$s(s+1)\cdots(s+n-1) \sim n!\, n^{s-1} \frac{1}{\Gamma(s)},$$

gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der $s$-Ebene
Damit ergibt sich

$$\left|\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right)\right| \lesssim \frac{n!\, n^{\sigma-1}\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right|}{n!\, n^{p-1}\frac{1}{\Gamma(p)}}\, n^{-\sigma+p}\,\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^p}\right) = \frac{\Gamma(p)}{|\Gamma(s)|}\,\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^p}\right),$$

gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der $s$-Ebene
Hieraus folgt die Behauptung II nach I.

Halle, 15. Februar 1930.

(Eingegangen am 28. Februar 1930.)

Anmerkung bei der Korrektur. Herr Knopp hat mich freundlicherweise auf die große Ähnlichkeit meiner Summierungsmethode der $\zeta$-Reihe mit demjenigen Summierungsverfahren hingewiesen, das er Eulersches Verfahren nennt: Dieses Verfahren auf die alternierende Reihe $1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\ldots$ angewendet, führt zu der Formel

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,\Delta_n\left(\frac{1}{\nu^s}\right),$$

welche vom selben Typus ist wie meine Formel (5), und meine Abschätzung II lehrt sofort, daß die rechtsstehende Reihe für alle $s$ konvergiert, gleichmäßig in jedem beschränkten Bereiche; damit ist also ebenfalls die Fortsetzung der $\zeta$-Funktion über die ganze Ebene mit einem Schlage geleistet.

Im Gegensatz zu dem Eulerschen Verfahren scheint aber meine Methode sich nicht unter ein allgemeines Summierungsverfahren unterordnen zu lassen, sondern ganz speziell auf die $\zeta$-Funktion zugeschnitten zu sein.

18. Juni 1930.

# Über eine Matrixtransformation.

Von

Oskar Perron in München.

## § 1.

### Bezeichnungen und Hauptergebnis.

In dieser Arbeit handelt es sich um $n$-reihige quadratische Matrizes

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \cdots\cdots \\ f_{n1} \cdots f_{nn} \end{pmatrix},$$

deren Elemente stetige Funktionen einer Variablen $t$ in dem unendlichen Intervall $t \geqq 0$ sind:

$$f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}(t).$$

Die Funktionen $f_{\lambda\mu}(t)$ dürfen dabei beliebige komplexe Werte annehmen.

Ebenso wie hier bezeichnen wir eine Matrix stets mit einem großen lateinischen Buchstaben und ihre Elemente mit dem betreffenden kleinen Buchstaben nebst griechischem Zeilen- und Spaltenindex. $E$ bedeute die Einheitsmatrix, so daß

$$e_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \mu \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

ist. Die Transponierte einer Matrix $F$ bezeichnen wir mit $F_1$, also

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \cdots f_{n1} \\ \cdots\cdots \\ f_{1n} \cdots f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die zu einer komplexen Zahl $a$ konjugiert-komplexe Zahl bezeichnen wir mit $\bar{a}$ und entsprechend die Matrix, deren Elemente zu denen von $F$ konjugiert-komplex sind, mit $\bar{F}$. Hiernach ist auch klar, was unter $\bar{F}_1$ zu verstehen ist.

Haben die Elemente $f_{\lambda\mu}(t)$ der Matrix $F$ stetige Ableitungen $f'_{\lambda\mu}(t)$, so wird die Matrix, deren Elemente die $f'_{\lambda\mu}(t)$ sind, die Ableitung von $F$ genannt und mit $F'$ bezeichnet.

Eine Matrix $F$ heißt *beschränkt*, wenn ihre Elemente beschränkte Funktionen von $t$ sind. Endlich soll eine Matrix $F$ *reduziert* genannt werden, wenn die Elemente oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen sind, wenn also für $\lambda < \mu$ stets $f_{\lambda\mu}(t) = 0$ ist. Das Produkt von zwei reduzierten Matrizes ist augenscheinlich wieder reduziert, und ebenso ist die Reziproke einer reduzierten Matrix (falls sie existiert, d. h. falls die Determinante der Matrix nicht verschwindet) ebenfalls reduziert.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun der Beweis des folgenden Satzes nebst einigen Ergänzungen:

Satz 1. *Zu jeder beschränkten Matrix $F$ läßt sich (auf unendlich viele Arten) eine beschränkte Matrix $P$ mit beschränkter Reziproken $P^{-1}$ und beschränkter Ableitung $P'$ angeben derart, daß die offenbar wieder beschränkte Matrix*

$$(PF + P')P^{-1} = G$$

*reduziert ist.*

In einer nachfolgenden Arbeit sollen Anwendungen dieses Satzes auf Stabilitätsfragen behandelt werden.

Da man leicht erkennt, daß die durch obige Formel ausgedrückte Beziehung zwischen den Matrizes $F$ und $G$ (ohne Berücksichtigung der Reduziertheit von $G$) reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, bezeichnet Herr Loewy solche Matrizes als „von derselben Art". Jedoch verfolgt Herr Loewy in den verschiedenen Arbeiten, die er diesem Gegenstand gewidmet hat[1]), ein anderes Ziel; er hat niemals die für uns entscheidende Forderung der Beschränktheit in einem unendlichen Intervall gestellt, und deshalb lassen sich seine Resultate hier nicht verwerten.

## § 2.

## Beweis von Satz 1.

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad y'_\nu = -\sum_{\mu=1}^{n} f_{\mu\nu}(t)\, y_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Bekanntlich existiert im ganzen unendlichen Intervall $t \geqq 0$ ein Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1 = y_{\lambda 1}, \quad y_2 = y_{\lambda 2}, \quad \ldots, \quad y_n = y_{\lambda n} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n).$$

[1]) Hauptsächlich: Über Matrizen- und Differentialkomplexe. Math. Annalen 78 (1918), S. 1—51; Über einen Fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften; Math.-naturwiss. Klasse, Abteilung A, Jahrgang 1918, 5. Abhandlung.

Dann ist also

$$y'_{\lambda\nu} = -\sum_{\mu=1}^{n} f_{\mu\nu} y_{\lambda\mu} = -\sum_{\mu=1}^{n} y_{\lambda\mu} f_{\mu\nu}, \tag{2}$$

wofür wir kürzer schreiben können:

$$Y' = -YF. \tag{3}$$

Da die $y_{\lambda\nu}$ ein Fundamentalsystem bilden, ist die Determinante der Matrix $Y$ dauernd von Null verschieden. Nunmehr setzen wir

$$Y\overline{Y}_1 = Z, \tag{4}$$

oder in ausführlicherer Schreibweise

$$z_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} y_{\lambda\nu} \overline{y}_{\mu\nu}, \tag{5}$$

und bilden die $n$ Determinanten

$$\Phi_\lambda = \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1\lambda} \\ \cdots\cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Da die Determinante der Matrix $Y$ nirgends verschwindet, können auch die $\binom{n}{\lambda}$ in dem rechteckigen System

$$\left\| \begin{matrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots \\ y_{\lambda 1} \cdots y_{\lambda n} \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

enthaltenen $\lambda$-reihigen Determinanten, die wir mit $\Delta_{\lambda 1}, \Delta_{\lambda 2}, \ldots$ bezeichnen wollen, nie zugleich verschwinden. Aus (6) und (5) folgt dann

$$\Phi_\lambda = \sum_k \Delta_{\lambda k} \overline{\Delta}_{\lambda k} = \sum_k |\Delta_{\lambda k}|^2 > 0, \tag{8}$$

und speziell für $\lambda = 1$

$$\Phi_1 = \sum_{\nu=1}^{n} y_{1\nu} \overline{y}_{1\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} |y_{1\nu}|^2 > 0. \tag{9}$$

Wir setzen jetzt

$$p_{1\nu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_1}} y_{1\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$p_{\lambda\nu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1}}} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1}\, y_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1}\, y_{\lambda\nu} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 2, \ldots, n \\ \nu = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{11}$$

und wollen zeigen, daß die mit diesen Elementen gebildete Matrix $P$ alle im Satz 1 behaupteten Eigenschaften hat. Zu dem Zweck bezeichnen wir mit $X$ die zu $Y$ reziproke Matrix, so daß

$$XY = E, \quad YX = E \tag{12}$$

ist, oder, wenn man die zweite Gleichung ausführlicher schreibt,

$$\sum_{\mu=1}^{n} y_{\lambda\mu} x_{\mu\nu} = e_{\lambda\nu}. \tag{13}$$

Nunmehr setzen wir

$$PX = Q, \tag{14}$$

so daß die Elemente der Matrix $Q$ die folgenden sind:

$$q_{1\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{1\nu} x_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_1}} e_{1\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$q_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} x_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1}}} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} e_{1\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} e_{\lambda\mu} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 2, \ldots, n \\ \mu = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Insbesondere ist also

$$q_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu > \lambda, \tag{17}$$

$$q_{11} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_1}} > 0, \quad q_{\lambda\lambda} = \sqrt{\frac{\Phi_{\lambda-1}}{\Phi_\lambda}} > 0 \qquad (\lambda = 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Das besagt zunächst, daß die Matrix $Q$ reduziert ist und daß ihre Determinante, die sich auf das Produkt der Diagonalelemente $q_{\lambda\lambda}$ reduziert, nicht verschwindet. Daher sind auch ihre Reziproke $Q^{-1}$ und ihre Ableitung $Q'$ reduziert, und folglich ist auch das Produkt $Q' Q^{-1}$ reduziert. Es ist aber

$$Q' Q^{-1} = (PX' + P' X) X^{-1} P^{-1} = PX' Y P^{-1} + P' P^{-1},$$

oder, da sich aus (12) durch Differentiation ergibt, daß $X' Y = -XY'$ ist,

$$Q' Q^{-1} = -PXY' P^{-1} + P' P^{-1} = PXYFP^{-1} + P' P^{-1} \quad \text{(nach (3))},$$

und also schließlich

$$Q' Q^{-1} = (PF + P') P^{-1}. \tag{19}$$

Daher ist in der Tat die Matrix $(PF + P') P^{-1}$ reduziert, wie in Satz 1 behauptet. Wir müssen aber noch zeigen, daß $P, P^{-1}, P'$ beschränkt sind.

Nun ist nach (10) und (11)

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1} \Phi_\mu \Phi_{\mu-1}}} \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} y_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} y_{\lambda\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} \cdots \bar{z}_{1,\mu-1} \bar{y}_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{z}_{\mu 1} \cdots \bar{z}_{\mu,\mu-1} \bar{y}_{\mu\nu} \end{vmatrix} \tag{20}$$

mit geringer Modifikation, falls einer der Indizes $\lambda, \mu$ gleich 1 ist. Entwickelt man die in (20) vorkommende Determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{11} \cdots \bar{z}_{1,\mu-1} \bar{y}_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{z}_{\mu 1} \cdots \bar{z}_{\mu,\mu-1} \bar{y}_{\mu\nu} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der letzten Spalte, so nimmt sie die Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{\mu} \bar{y}_{\varkappa\nu} \Omega_{\mu\varkappa} \tag{21}$$

an, wobei speziell

$$\Omega_{\mu\mu} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \cdots & \bar{z}_{1,\mu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{z}_{\mu-1,1} & \cdots & \bar{z}_{\mu-1,\mu-1} \end{vmatrix} = \bar{\Phi}_{\mu-1} = \Phi_{\mu-1} \tag{22}$$

(vgl. (6) und (8))

ist. Setzt man das in (20) ein, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1} \Phi_\mu \Phi_{\mu-1}}} \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} \sum_{\varkappa=1}^{\mu} y_{1\nu} \bar{y}_{\varkappa\nu} \Omega_{\mu\varkappa} \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} \sum_{\varkappa=1}^{\mu} y_{\lambda\nu} \bar{y}_{\varkappa\nu} \Omega_{\mu\varkappa} \end{vmatrix},$$

und hieraus durch Vertauschung der Summenzeichen und mit Benutzung von (5)

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1} \Phi_\mu \Phi_{\mu-1}}} \sum_{\varkappa=1}^{\mu} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} z_{1\varkappa} \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} z_{\lambda\varkappa} \end{vmatrix} \Omega_{\mu\varkappa}. \tag{23}$$

Für $\mu < \lambda$ verschwindet hier jede Determinante, weil auch $\varkappa \leqq \mu < \lambda$ ist. Somit ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu < \lambda, \tag{24}$$

und das gilt mit geringer Modifikation des Beweises auch für $\mu = 1$. Für $\mu = \lambda$ folgt, wenn zunächst $\lambda > 1$ ist, aus (23)

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\lambda\nu} = \frac{1}{\Phi_\lambda \Phi_{\lambda-1}} \begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} z_{1\lambda} \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} z_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \Omega_{\lambda\lambda},$$

also mit Rücksicht auf (6) und (22)

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\lambda\nu} = 1. \tag{25}$$

Diese Formel gilt aber, wie man sofort aus (10) und (9) ersieht, auch noch für $\lambda = 1$. Aus (24) ergibt sich durch Übergang zu den konjugiert-komplexen Größen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{p}_{\lambda\nu} p_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu < \lambda$$

oder, indem man die Bezeichnung der Indizes $\lambda$, $\mu$ vertauscht,

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda\nu} \bar{p}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < \mu. \tag{26}$$

Die Gleichungen (24), (25), (26) zusammen besagen soviel wie

$$P\bar{P}_1 = E. \tag{27}$$

$P$ ist also eine sogenannte *unitäre* Matrix.

Nach (25) ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} |p_{\lambda\nu}|^2 = 1. \tag{28}$$

Daher ist $|p_{\lambda\nu}| \leqq 1$ und die Matrix $P$ ist also beschränkt. Nach (27) ist $P^{-1} = \bar{P}_1$ und folglich ist auch $P^{-1}$ beschränkt. Nun ist noch die Beschränktheit der Ableitung $P'$ zu zeigen. Nach (10) und (9) ist zunächst

$$p'_{1\nu} = \frac{y'_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}} - \frac{1}{2}\frac{y_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}^3}\Phi'_1 = \frac{y'_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}} - \frac{1}{2}\frac{y_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}^3}\sum_{\lambda=1}^{n}(y_{1\lambda}\bar{y}_{1\lambda})'$$

$$= \frac{y'_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}} - \frac{1}{2}\frac{y_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}}\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\frac{\bar{y}_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}}\frac{y'_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{y_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}}\frac{\bar{y}'_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}}\right).$$

Nach (2) ist aber $y'_{1\nu} = -\sum_{\mu=1}^{n} y_{1\mu} f_{\mu\nu}$, so daß sich ergibt:

$$p'_{1\nu} = -\sum_{\mu=1}^{n}\frac{y_{1\mu}}{\sqrt{\Phi_1}}f_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{y_{1\nu}}{\sqrt{\Phi_1}}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\bar{y}_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}}\frac{y_{1\mu}}{\sqrt{\Phi_1}}f_{\mu\lambda} + \frac{y_{1\lambda}}{\sqrt{\Phi_1}}\frac{\bar{y}_{1\mu}}{\sqrt{\Phi_1}}\bar{f}_{\mu\lambda}\right).$$

Hier sind nun die Brüche wegen (9) absolut höchstens gleich 1, und folglich ist $p'_{1\nu}$ beschränkt. Für $\lambda > 1$ ist mit Rücksicht auf (5)

$$\begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1,\lambda-1} y_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{\lambda 1} \cdots z_{\lambda,\lambda-1} y_{\lambda\nu} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{11} & \cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{\lambda-1,1} \cdots y_{\lambda-1,n} \\ y_{\lambda 1} & \cdots y_{\lambda n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{y}_{11} & \cdots \bar{y}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_{\lambda-1,1} \cdots \bar{y}_{\lambda-1,n} \\ e_{\nu 1} & \cdots e_{\nu n} \end{Vmatrix}.$$

Daher läßt sich die links stehende Determinante als Summe von lauter Gliedern der Form $\pm \Delta_{\lambda l}\Delta_{\lambda-1,m}$ darstellen, wo mit $\Delta_{\lambda l}$ wieder die $\lambda$-reihigen Determinanten des rechteckigen Systems (7) bezeichnet sind. Nach (11) ist also $p_{\lambda\nu}$ eine Summe von Gliedern der Form

$$\pm \frac{\Delta_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}}\frac{\Delta_{\lambda-1,m}}{\sqrt{\Phi_{\lambda-1}}}.$$

Diese Brüche sind nach (8) absolut $\leqq 1$. Für die Beschränktheit von $p'_{\lambda\nu}$ ist also nur noch zu zeigen, daß für $\lambda = 1, \ldots, n$ die Funktionen

$$\left(\frac{\Delta_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}}\right)' = \frac{\Delta'_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\Delta_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}^3}\Phi'_\lambda = \frac{\Delta'_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\Delta_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}^3}\sum_k(\Delta_{\lambda k}\bar{\Delta}'_{\lambda k} + \Delta'_{\lambda k}\bar{\Delta}_{\lambda k}) \text{ (vgl. (8))}$$

beschränkt sind, und dazu genügt, da die Brüche $\frac{\Delta_{\lambda k}}{\sqrt{\Phi_\lambda}}$ bereits als beschränkt

erkannt sind, die Beschränktheit von allen Funktionen der Form

$$\frac{\Delta'_{\lambda k}}{\sqrt{\Phi_\lambda}}. \tag{29}$$

Nun ist aber $\Delta_{\lambda k}$ eine $\lambda$-reihige Determinante des Systems

$$\begin{Vmatrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots \\ y_{\lambda 1} \cdots y_{\lambda n} \end{Vmatrix}.$$

Ihre Ableitung erweist sich, indem man die Spalten differenziert und dann die Formel (2) benutzt, als eine Summe von lauter Gliedern der Form $\pm f_{\mu\nu} \Delta_{\lambda l}$ bei festgehaltenem $\lambda$. Daher ist die Funktion (29) eine Summe von Gliedern der Form

$$\pm f_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\lambda l}}{\sqrt{\Phi_\lambda}},$$

also mit Rücksicht auf (8) beschränkt. Hiernach sind in der Tat alle $p'_{\lambda\nu}$ beschränkt. Das heißt, die Matrix $P'$ ist beschränkt. W. z. b. w.

## § 3.

## Einige Ergänzungen zu Satz 1.

Im vorigen Paragraphen wurde eine Matrix $P$ konstruiert, die die in Satz 1 behaupteten Eigenschaften hat. In Wahrheit gibt es aber unendlich viele solche Matrizes und damit auch unendlich viele zugehörige reduzierte Matrizes $G$. Denn erstens kann man unter $y_{\lambda\nu}$ ein *beliebiges* Fundamentalsystem von Integralen des Differentialgleichungssystems (1) verstehen, wodurch sich schon unendlich viele Möglichkeiten für die $p_{\lambda\nu}$ ergeben. Zweitens hat, wenn $M$ eine beliebige beschränkte reduzierte Matrix mit beschränkter Reziproken $M^{-1}$ und beschränkter Ableitung $M'$ ist, die Matrix $R = MP$ ebenfalls die von $P$ verlangten Eigenschaften; denn die Matrix $(RF + R')R^{-1}$ ist dann gleich

$$(MPF + MP' + M'P)P^{-1}M^{-1} = MGM^{-1} + M'M^{-1},$$

also beschränkt und reduziert. Auch auf andere Weise wird es wohl noch möglich sein, eine Matrix $P$ der verlangten Art zu finden. Daher wird man dieser Matrix oder auch der Matrix $G$ noch weitere Bedingungen auferlegen können. So genügt ja beispielsweise die von uns konstruierte Matrix $P$, wie wir sahen, noch der weiteren Bedingung, daß sie unitär ist. Nützlicher in dieser Richtung dürfte aber der folgende Satz sein:

Satz 2. *Die Matrix $P$ in Satz 1 läßt sich stets so wählen, daß die Diagonalelemente $g_{\lambda\lambda}$ der reduzierten Matrix $G$ reell sind. — Sind die Elemente der gegebenen Matrix $F$ sämtlich reell, so kann man es sogar*

*so einrichten, daß die Elemente von $P$ und folglich auch die von $G$ sämtlich reell sind.*

In der Tat hat die in § 2 konstruierte Matrix $P$ bereits diese Eigenschaften. Denn die Matrix $G$ in Satz 1 ist ja gleich $(PF + P')P^{-1}$, und folglich ist nach (19)

$$G = Q'Q^{-1}. \tag{30}$$

Nun ist aber, wie wir sahen, $Q$ eine reduzierte Matrix, und ihre Diagonalelemente $q_{\lambda\lambda}$ sind nach (18) reell. Nach (30) ist dann aber

$$g_{\lambda\lambda} = \frac{q'_{\lambda\lambda}}{q_{\lambda\lambda}}, \tag{31}$$

also ebenfalls reell.

Wenn weiter die $f_{\mu\nu}$ sämtlich reell sind, so kann das Fundamentalsystem $y_{\lambda\nu}$ des § 2 ebenfalls reell gewählt werden; dann werden aber nach (5) auch die $z_{\lambda\mu}$ und nach (10) und (11) die $p_{\lambda\nu}$ reell.

Von besonderer Wichtigkeit sind natürlich *invariante* Eigenschaften der Matrix $P$ bzw. $G$, d. h. solche Eigenschaften, die bei allen unendlich vielen Möglichkeiten für $P$ und $G$ erhalten bleiben. Der folgende Satz gibt eine solche Eigenschaft an:

Satz 3. *Für jede der Forderung von Satz* 1 *genügende Matrix $G$ ist der reelle Teil des Integrals*

$$\int_0^t \Big( \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu\nu}(\tau) - \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu}(\tau) \Big)\, d\tau$$

*beschränkt.*

Beweis. Hat $y_{\lambda\nu}$ wieder die gleiche Bedeutung wie in § 2 und setzt man

$$\begin{vmatrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots \\ y_{n1} \cdots y_{nn} \end{vmatrix} = \Psi, \tag{32}$$

so ist bekanntlich[2])

$$\Psi' = -\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu}(t)\, \Psi,$$

also

$$\Psi = a\, e^{-\int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau}, \tag{33}$$

wo $a$ eine Konstante, und zwar $a \neq 0$, weil die $y_{\lambda\nu}$ ein Fundamentalsystem sind. Setzt man jetzt

$$YP^{-1} = V, \tag{34}$$

---

[2]) Vgl. z. B.: J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905, S. 63. Oder: L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908, S. 21.

so ist $Y = VP$ und also mit Rücksicht auf (3)

$$V'P + VP' = Y' = -YF = -VPF,$$

also schließlich

$$V' = -V(PF + P')P^{-1} = -VG.$$

Setzt man daher

$$\begin{vmatrix} v_{11} \cdots v_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{n1} \cdots v_{nn} \end{vmatrix} = \Omega, \tag{35}$$

so ist analog zu (33) auch

$$\Omega = b\, e^{-\int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau}, \tag{36}$$

wo $b$ eine Konstante. Aus (34) folgt aber, indem man beiderseits die Determinante der Matrix bildet,

$$\Psi \begin{vmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{vmatrix}^{-1} = \Omega,$$

also, indem man für $\Psi$ und $\Omega$ die obigen Werte einsetzt,

$$a\, e^{-\int_0^t \left( \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu}(\tau) - \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu\nu}(\tau) \right) d\tau} = b \begin{vmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Hieraus folgt zunächst, daß auch die Konstante $b$ von Null verschieden ist. Ferner bleibt, da die Matrix $P$ beschränkt ist und auch eine beschränkte Reziproke hat, der absolute Wert der in (37) auftretenden Determinante zwischen konstanten positiven Schranken. Daher muß der Exponent von $e$ in (37) einen beschränkten reellen Teil haben. W. z. b. w.

(Eingegangen am 28. März 1930.)

# Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion.

Von

B. L. van der Waerden in Groningen[1]).

Es sei $f_n(x)$ der Betrag der Differenz der reellen Zahl $x$ mit dem nächstbenachbarten $n$-stelligen Dezimalbruch:

$$f_n(x) = \min_{(m \text{ ganz})} |x - m \cdot 10^{-n}|.$$

Behauptung. Die Funktion

$$f(x) = \sum_1^\infty f_n(x) \quad (1)$$

[2])

ist überall stetig und besitzt nirgends eine endliche Ableitung.

Beweis (von Dr. A. Heyting). $f_n(x)$ ist eine stetige Funktion von $x$ (es ist nämlich $|f_n(y) - f_n(x)| \leqq |y - x|$). Wegen $f_n(x) < 10^{-n}$ konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig; daher stellt sie eine stetige Funktion von $x$ dar.

Nun sei $x$ eine beliebige, als Dezimalbruch dargestellte, reelle Zahl. Ist die $q$-te Stelle von $x$ gleich 4 oder 9, so setzen wir $y = x - 10^{-q}$,

---

[1]) Das Beispiel wurde vom Verfasser zuerst in den „Wiskundige Opgaven" des „Wiskundig genootschap" **15**, H. 1 (1930) publiziert. Die von Herrn Dr. A. Heyting eingesandte Lösung war viel einfacher als mein ursprünglicher Beweis. Einen im wesentlichen übereinstimmenden Beweis sandte auch Herr Dr. H. H. Buzeman ein.

[2]) Diese Funktion ist ein Spezialfall einer von K. Knopp (Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 18) betrachteten Funktion

$$\sum_1^\infty \alpha^n \psi(b^n x).$$

Der Knoppsche Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit stimmt aber nur für $\alpha b > 4$, während oben $\alpha b = 1$ ist (die „Zacken" der Summanden $f_n(x)$ werden nicht steiler während sie bei Knopp immer steiler werden). Dafür hat auch die Knoppsche Funktion nirgends eine unendliche Ableitung, während die obige Funktion $f(x)$ z. B. für $x = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ die Ableitung $+\infty$ hat.

sonst $y = x + 10^{-q}$. Dann sind für $n < q$ die zu $x$ und $y$ nächstliegenden $n$-stelligen Dezimalbrüche dieselben, und $x$ und $y$ liegen auf derselben Seite dieses Bruches (er wird nämlich gefunden durch Abbruch der Dezimalbruchentwicklung nach der $n$-ten Stelle und Addition einer Einheit zur $n$-ten Stelle, falls die $(n+1)$-ste Stelle $\geqq 5$ war). Mithin gilt für $n < q$:

$$f_n(y) - f_n(x) = \pm(y - x).$$

Für $n \geqq q$ gilt aber:

$$f_n(y) - f_n(x) = 0,$$

mithin ist

$$f(y) - f(x) = s(y - x),$$

wo $s$ eine ganze Zahl darstellt, die für gerades $q$ ungerade und für ungerades $q$ gerade ist. Der Differenzenquotient $s$ nimmt also in jeder Umgebung der Stelle $x$ sowohl gerade als ungerade ganzzahlige Werte an; daraus folgt die Nichtexistenz einer endlichen Ableitung.

Bemerkung. Die Funktion $f(x)$ besitzt auch keine rechtsseitige endliche Ableitung (und ebenso keine linksseitige). Das ergibt sich aus folgendem Hilfssatz: Besitzt eine Funktion $f(x)$ eine endliche Rechtsableitung $f_r'(x)$, so ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = f_r'(x).$$

Beweis.

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 2\frac{f(x+2h) - 2f(x)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to 2f_r'(x) - f_r'(x).$$

Setzt man, um den Hilfssatz auf unsere Funktion $f(x)$ anzuwenden, $h = 10^{-q}$, so ergibt der obige Beweis, wenn die $q$-te Stelle von $x$ keine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \pm s,$$

dagegen im Ausnahmsfall, wenn die $q$-te Stelle eine 4 oder 9 ist:

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = \pm s.$$

Man erhält also in jedem Fall für $q = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von abwechselnd geraden und ungeraden Zahlen, die gegen $f_r'(x)$ konvergieren müßte, was nicht geht.

(Eingegangen am 20. Mai 1930.)

# Über den Cauchyschen Integralsatz.

Herrn Geheimrat Professor Dr. Alfred Pringsheim
zum 80. Geburtstag am 2. September 1930
gewidmet von

Lothar Heffter in Freiburg i. B.

---

Die „Kritisch-historischen Bemerkungen zur Funktionentheorie III“ von Herrn A. Pringsheim (Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 9. Nov. 1929) veranlassen mich, auf drei Arbeiten zurückzugreifen, die ich in den Gött. Nachr. 1902, 1903, 1904 veröffentlicht habe und nachstehend einfach unter diesen Jahreszahlen zitiere. Ich möchte diese Arbeiten für die in den „Kritisch-historischen Bemerkungen“ behandelten Fragen nutzbar machen.

1. Die jetzt auch von Herrn Pringsheim benutzte *Rechtecks*methode beim Beweis des Cauchyschen Integralsatzes hat in der Tat, wie ich schon 1904 ausführte, vor jeder andern den Vorzug, daß mit ihr (was schon von den *Dreiecks*beweisen *nicht* gilt) der Cauchysche Satz *vor* jeder Definition des Kurvenintegrals bewiesen und die Definition des einfachen Integrals im zweidimensionalen Gebiet dann umgekehrt auf den Satz von Cauchy gestützt werden kann („Treppenintegrale“). Ist das Gebiet $G$ einfach zusammenhängend, so ist das Integral durch die Integrandenfunktion und die Grenzen schon eindeutig bestimmt. Ist es mehrfach zusammenhängend, so ist noch eine „Führungskurve der Integration“ (1904), besser nur eine derartige *Folge von Wertepaaren* zwischen unterer und oberer Grenze nötig, daß die durch je zwei aufeinanderfolgende Wertepaare bestimmten achsenparallelen Rechtecke ganz im Gebiet $G$ liegen.

Für Integrale in der *komplexen* $z$-Ebene braucht man überhaupt keine andere Definition, weil es sich bei den allein interessierenden Funktionen $F(z)$ dann in der $x, y$-Ebene immer nur um Integrale von — kurz gesagt — „totalen Differentialien“ handelt. In der reellen $x, y$-Ebene für sich braucht man auch andere Kurvenintegrale, und für diese glaube ich 1902, I, § 1 die weiteste und darum brauchbarste Definition gegeben zu

haben, wenn die Integrationskurve stetig und rektifizierbar ist. Die Definition bewährte sich z. B. bei der Zurückführung des Cauchyschen Integralsatzes für eine beliebige stetige rektifizierbare geschlossene Kurve auf den für ein Rechteck, das den Koordinatenachsen parallel ist (1902, II, § 1)[1]).

2. Durch den Beweis von Herrn L. Lichtenstein (Sitzungsber. d. Berl. Math. Gesellsch. 1910, S. 84 ff.) kommt, wie Herr Pringsheim mit Recht hervorhebt, die Cauchysche Doppelintegralmethode wieder zu neuen Ehren. Auch ich habe 1902 auf den Grundgedanken jener Methode zurückgegriffen, aber auch *nur* auf ihren *Grundgedanken*, weil es mir widerstrebte, zum Beweis eines Satzes über *einfache* Integrale den *Begriff* des *Doppelintegrals* zu benutzen (1902, Einleitung S. 117). Ich beschränkte mich infolgedessen auf die Heranziehung gewisser Doppel*summen*.

Mit dieser „Doppelsummen-Methode" habe ich 1902, II, § 3 B. den Cauchyschen Integralsatz in der Form bewiesen[2]): *Sind* $f(x, y)$ *und* $g(x, y)$ *im Bereich* $G$ *überall eindeutig und stetig in beiden Variablen*[3]), *so ist die Existenz eines Punktes* $\xi, \eta$ *in jedem ganz zu* $G$ *gehörigen Rechteck* $[(a\alpha)(b\beta)]$, *für den*

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{f(\xi,\beta)-f(\xi,\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{g(b,\eta)-g(a,\eta)}{b-a},$$

*notwendig und hinreichend für den Cauchyschen Integralsatz.* Dabei wird also die *Existenz der Ableitungen keineswegs vorausgesetzt.*

Mit derselben Methode habe ich 1902, II, § 4 den Cauchyschen Integralsatz bei vorausgesetzter Existenz und Stetigkeit von $f, g, f_2, g_1$ und Geltung der Gleichung $(\mathfrak{C})$ $f_2 = g_1$ [4]) besonders einfach beweisen können.

3. Die Doppelsummen-Methode erweist nun ihre Tragweite auch dadurch, daß sie für den *speziellen* und den *allgemeinen* Satz von Herrn Lichtenstein (a. a. O. Nr. 1 und 3), den auch Herr Pringsheim a. a. O. behandelt, einen Beweis liefert, der den Doppelintegralbegriff vermeidet und

---

[1]) S. 130 Z. 10 ist „Gleichung (2)" statt „Gleichung (1)" zu setzen.

[2]) S. 136, Gleichung (4) ist zweimal + statt − zu setzen; S. 137, Gleichung (7) $\xi$ statt $\zeta$.

[3]) Beim Beweis *benutzt* ist sogar nur die Stetigkeit von $f$ in $x$ bei jedem Wert von $y$ und die von $g$ in $y$ bei jedem Wert von $x$.

[4]) Zur Herleitung der *Notwendigkeit* der Bedingung $(\mathfrak{C})$ aus $(\mathfrak{B})$ bei vorausgesetzter Stetigkeit von $f_2$ und $g_1$ (S. 132 f.) ist zu bemerken: Die vermittelnden Gleichungen (5) können aus den *dabei* nur benutzten Voraussetzungen nicht abgeleitet werden und sind deshalb zu streichen, ebenso infolgedessen S. 139 § 6 I, worauf mich schon 1907 Herr Landau aufmerksam machte. — Gleichung $(\mathfrak{C})$ selbst folgt aber natürlich aus $(\mathfrak{B})$ bei Benutzung der S. 132 unter $C_a$ vorausgesetzten Stetigkeit von $f_2$ und $g_1$ in beiden Variablen nach Anwendung des Mittelwertsatzes auf beide Seiten von $(\mathfrak{B})$ *ohne* Benutzung der Gleichungen (5).

dadurch dasjenige freilegt, was von diesem allein gebraucht wird. Die Voraussetzungen für den speziellen Satz sind dabei — teilweise infolge des Rechteckverfahrens — sogar noch etwas allgemeiner als bei Herrn Lichtenstein und Pringsheim.

In einem Gebiet $G$ mit Einschluß seines Randes sei $f(x, y)$ in bezug auf $x$ bei jedem Wert von $y$, $g(x, y)$ in bezug auf $y$ bei jedem Wert von $x$ im Riemannschen Sinne *integrabel*, und für *alle* $x, y$ in $G$ sei die Bedingung

$$(1)\qquad \lim_{\delta \to 0} \left[ \frac{g(x+\delta, y) - g(x, y)}{\delta} - \frac{f(x, y+\delta) - f(x, y)}{\delta} \right] \equiv \lim_{\delta \to 0} U(x, y, \delta) = 0^{5})$$

*gleichmäßig* erfüllt.

Ist dann $R = [(a\alpha)(b\beta)]$ ein achsenparalleles Rechteck, das mit Einschluß seines Randes ganz dem Gebiet $G$ angehört, so teilen wir es in $m\,n$ kongruente Quadrate[6]) $[(x_\mu y_\nu)(x_{\mu+1} y_{\nu+1})]$, deren Eckpunkte „*Gitterpunkte*“ heißen sollen:

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \qquad x_0 \equiv a, \qquad x_m \equiv b,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \qquad y_0 \equiv \alpha, \qquad y_n \equiv \beta.$$

Dabei sind also die $m$ $x$-Differenzen und die $n$ $y$-Differenzen sämtlich einander gleich, d. h. es ist

$$(2)\qquad x_{\mu+1} - x_\mu = \Delta x = \frac{b-a}{m} = y_{\nu+1} - y_\nu = \Delta y = \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Nun bilden wir die *Doppelsumme*

$$(3)\qquad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu}$$

$$= \sum_{\mu,\nu} [(f(x_\mu, y_\nu) - f(x_\mu, y_{\nu+1}))(x_{\mu+1} - x_\mu) + (g(x_{\mu+1}, y_\nu) - g(x_\mu, y_\nu))(y_{\nu+1} - y_\nu)]$$

$$= \sum_{\mu} (f(x_\mu, \alpha) - f(x_\mu, \beta))(x_{\mu+1} - x_\mu) + \sum_{\nu} (g(b, y_\nu) - g(a, y_\nu))(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Dann ist *einerseits* nach dem Begriff des einfachen Integrals mit einer reellen Integrationsvariablen, wenn man $m$ und $n$ etwa durch fortgesetzte

---

[5]) Zum Vergleich sei bemerkt, daß die Bedingung (B) der vorigen Nummer bei entsprechender Bezeichnung und, wenn $\lambda$ und $\varrho$ zwei Zahlen zwischen 0 und 1 sind, lauten würde

$$\frac{g(x+\delta, y+\lambda\delta) - g(x, y+\lambda\delta)}{\delta} - \frac{f(x+\varrho\delta, y+\delta) - f(x+\varrho\delta, y)}{\delta} = 0.$$

[6]) Ist das nicht unmittelbar möglich, so wird von $R$ zunächst ein geeignetes, beliebig schmal zu wählendes Rechteck abgeschnitten, für das der Cauchysche Satz als mit beliebiger Genauigkeit gültig nachzuweisen ist. — In diesem Sinne sind auch in 1902, II, § 5 die Anfangsworte des Beweises zu verstehen, der übrigens in 1903, II für ein *beliebiges* Rechteck geführt ist.

Verdoppelung ins Unendliche wachsen läßt:

$$(4)\quad \lim \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\beta)\,dx + \int_\alpha^\beta g(b,y)\,dy - \int_\alpha^\beta g(a,y)\,dy$$
$$= \int_{(R)} [f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy],$$

d. h. gleich dem über den Rand von $R$ in positivem Sinne erstreckten Cauchyschen Integral.

*Andererseits* ist unter Benutzung von (2)

$$(5)\quad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \frac{b-a}{m}\frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{\mu,\nu} \left[ \frac{g(x_\mu+\Delta x, y_\nu) - g(x_\mu, y_\nu)}{\Delta x} - \frac{f(x_\mu, y_\nu+\Delta y) - f(x_\mu, y_\nu)}{\Delta y} \right].$$

Bei hinlänglich großen $m, n$ ist nach Voraussetzung (1) für jeden Gitterpunkt $x_\mu, y_\nu$ der absolute Betrag aller Summanden [ ] in (5) $< \varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl ist. Also ist

$$(6)\quad \left| \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} \right| < (b-a)(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

d. h. der Cauchysche Satz ist für den *Spezialfall* der Voraussetzungen von Herrn Lichtenstein (a. a. O. Nr. 1) durch (4) und (6) bewiesen.

4. Wird zwar die Konvergenz von $U(x, y, \delta)$ gegen Null mit $\delta \to 0$ für jedes $x, y$ in $G$ (Bedingung (1)), aber *nicht* die im ganzen Gebiet $G$ *gleichmäßige* Konvergenz von $U(x, y, \delta)$ gegen Null vorausgesetzt, so nehmen wir statt dessen mit Herrn Lichtenstein und Pringsheim jetzt die Voraussetzungen hinzu, daß $f(x, y)$ und $g(x, y)$ im ganzen Gebiet $G$ *stetig* als Funktionen der beiden reellen Variablen $x$ und $y$ sind und daß $U(x, y, \delta)$ für alle $x, y$ in $G$ und alle positiven $\delta \leqq \Delta$, wo dies irgendeine feste positive Zahl ist, wenigstens *beschränkt* (oder „*gleichmäßig endlich*“) ist, d. h. daß

$$(7)\quad \left| \frac{g(x+\delta, y) - g(x, y)}{\delta} - \frac{f(x, y+\delta) - f(x, y)}{\delta} \right| \equiv |U(x, y, \delta)| < M,$$

$M$ eine von $x, y, \delta$ unabhängige, endliche, positive Zahl. (Bei *gleichmäßiger* Nullkonvergenz von $U$ ist (7) als Folge von (1) erfüllt.)

Ist nun $\varepsilon$ wieder eine beliebig kleine positive Zahl, so bezeichnen wir mit $\lambda_\varepsilon(m, n)$ die bei jedem Wertsystem $m, n$ *endliche* Anzahl derjenigen „Ausnahmegitterpunkte“ $x_\mu, y_\nu$, für die $|U(x_\mu, y_\nu, \delta)| \geqq \varepsilon$ ist, wenn $\delta$ den Wert (2) hat. Dann folgt aus (5) und (7)

$$(8)\quad \left| \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} \right| < (b-a)(\beta-\alpha)\left[\left(1 - \frac{\lambda_\varepsilon(m,n)}{mn}\right)\varepsilon + \frac{\lambda_\varepsilon(m,n)}{mn} M\right],$$

und wir werden zeigen, daß für $m \to \infty$, $n \to \infty$

$$(9)\quad \lim \frac{\lambda_\varepsilon(m,n)}{mn} = 0.$$

Zu dem Ende halten wir in den Differenzenquotienten auf der rechten Seite von (5) $\Delta x = \Delta y$ zunächst mit beliebigem Werte $\delta_1$ fest, während wir $m, n$ durch fortgesetzte Verdopplung wachsen lassen, wobei sich also die Anzahl der Gitterpunkte jedesmal vervierfacht, die zugehörigen Quadrate sich auf ein Viertel der vorherigen Größe reduzieren. Für jeden zu $m, n, \delta_1$ gehörigen Ausnahmegitterpunkt $x_\mu, y_\nu$ ist $|U(x_\mu, y_\nu, \delta_1| \geqq \varepsilon$. Da aber bei festem $\delta_1$ unter den jetzigen Voraussetzungen $U$ *stetig* in $x, y$ ist, so können $m, n$ als $m_1, n_1$ so groß, die Quadrate also so klein gemacht werden, daß für *alle* $x, y$ in den verkleinerten Ausnahmequadraten $|U(x, y, \delta_1)| > \varepsilon'$, wo $\varepsilon'$ beliebig wenig kleiner als $\varepsilon$ ist, also auch $|U(\xi, \eta, \delta_1)| > \varepsilon'$, wenn dies der *kleinste* Wert von $|U(x, y, \delta_1)|$ in dem Quadrat ist [7]).

Verkleinert man nun auch $\delta$, indem man wieder etwa durch fortgesetzte Halbierung von $\delta_1$ zu $\delta_2, \delta_3, \ldots$ übergeht, so findet man jedesmal zugehörige Wertsysteme $m_1, n_1$; $m_2, n_2$; $m_3, n_3$; ... mit der entsprechenden Eigenschaft für die zu $\delta_2, \delta_3, \ldots$ gehörigen verkleinerten Ausnahmequadrate. Wäre jetzt $\lim \frac{\lambda_\varepsilon(m, n)}{m n} \equiv j_\varepsilon > 0$, so konvergierte die Gesamtgröße der verkleinerten Ausnahmequadrate, die bei jedem einzelnen Wert von $\delta_i$ und zugehörigem Wertsystem $m_i, n_i$ in endlicher Anzahl vorhanden sind und sich nicht überdecken, gegen den von Null verschiedenen Wert $(b-a)(\beta-\alpha) j_\varepsilon$. Nach dem Satz von Arzelà-Hartogs (Math. Abhandl. H. A. Schwarz zu seinem 50jähr. Dr.-Jubiläum gewidmet, Berlin 1914, S. 57) gäbe es dann aber einen Punkt $\xi_0, \eta_0$, der unendlich vielen Ausnahmequadraten für unendlich viele verschiedene Werte von $\delta_1, \delta_2, \ldots$ angehörte. Für diesen festen Punkt in $G$ wäre also für unendlich viele verschiedene Werte von $\delta_i$

$$|U(\xi_0, \eta_0, \delta_i)| > \varepsilon'$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung (1).

Also gilt Gleichung (9), und dann ist mit (8) der Cauchy-Lichtensteinsche Satz auch für den *allgemeinen* Fall bewiesen.

Freiburg i. B., 22. Juni 1930.

---

[7]) Dieser Schluß ist dem von Herrn E. Landau (Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 352) nachgebildet. Bei den Doppelintegralbeweisen wird er aus dem *Begriff* des Doppelintegrals entnommen, um einen Satz für solche zu beweisen, der dann als Hilfssatz dient. Man sieht aber hier, daß der Schluß selbst schon unmittelbar zum Beweis des Cauchyschen Satzes genügt und in Verbindung mit dem Satz von Herrn Hartogs das einzig *Wesentliche* dieses Beweises darstellt.

(Eingegangen am 25. Juni 1930.)

# La résolution du problème de Cauchy pour un système d'équations du second ordre par la méthode de Riemann.

Par

N. Ciorănescu à Bucarest.

**1.** Étant donnée l'équation linéaire suivante:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f \tag{1}$$

qui est du type hyperbolique, on peut se poser divers problèmes, correspondants aux données, qui peuvent être portées par des arcs de courbes caractéristiques ou non-caractéristiques.

Si l'on se donne $z = \varphi(x)$ le long d'un segment $OA$ de l'axe des $x$ et $z = \psi(y)$ le long de $OB$ sur $Oy$, Darboux et M. Picard ont démontré l'existence d'une intégrale de (1), régulière dans le rectangle $R$ construit sur $OA, OB$. La recherche de cette intégrale c'est ce qu'on appelle *le problème de Darboux-Picard.* Si l'on se donne $z$ et une de ses dérivées le long d'un arc de courbe $\Gamma$, non-caractéristique et qui n'est rencontré que dans un point par des parallèles aux axes, on a *le problème de Cauchy*[1]). M. Picard démontre l'existence d'une intégrale régulière, à l'aide de sa méthode des approximations successives. Riemann[2]) est l'auteur d'une méthode célèbre de résolution de ce problème, à l'aide de l'équation adjointe de l'équation proposée, méthode qui a été généralisée par Darboux. (Voir p. ex. ses *Leçons sur la théorie des surfaces* t. II, p. 71 et suiv.)

On peut aussi se donner $z$ sur un segment $OA$ de caractéristique et un arc de courbe non-caractéristique issue du même point (*problème de Picard*) et enfin on a le *problème de Goursat* lorsqu'on se donne $z$ sur deux arcs de courbes non-caractéristiques issues du même point et qui se trouvent dans le même angle des axes.

---

[1]) Pour tous ces problèmes sur l'équation (1) voir: E. Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles. Gauthier-Villars éd. Paris 1927.

[2]) Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen . . . Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft f. Wissenschaften zu Göttingen 8, 1860.

On connait aussi sur l'équation (1) sans second membre, et depuis Euler et Laplace, une suite d'opérations et transformations, qui peuvent conduire à l'intégrale générale (méthode des cascades de Laplace), toutes ces opérations ayant en même temps des interprétations géomètriques.

Dans la présente étude, nous nous proposons d'étendre la méthode de Riemann à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, qui généralise l'équation (1). Nous y arrivons à l'aide de la notion de système adjoint à paramètres d'un système différentiel donné, et qui nous a déjà servi à résoudre le problème de Dirichlet pour les systèmes du type elliptique[3]). Tout d'abord nous allons démontrer l'existence des solutions correspondantes aux données de Cauchy, à l'aide de la méthode des approximations successives. En traitant ce même problème par la méthode de l'adjointe de Riemann, nous rencontrerons pour notre système un nouveau problème aux limites, qu'on peut ramener, pour démontrer l'existence des solutions à un problème de Darboux-Picard, comme dans le cas de l'équation (1).

**2.** Considérons le système suivant:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + b_1 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + c_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + d_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} + e_1 \dfrac{\partial v}{\partial x} + \ldots = 0, \\ a_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + b_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + c_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + d_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} + e_2 \dfrac{\partial v}{\partial x} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Supposons que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ dans tout le domaine. Alors on peut l'écrire sons la forme suivante:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{11} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{11} \dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{11} u + c_{12} v = f_1, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + a_{21} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_{21} \dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{21} u + c_{22} v = f_2. \end{cases}$$

C'est ce système que nous avons en vue. Les fonctions $a_{ik}$, $b_{ik}$, $c_{ik}$, $f_n$ sont supposées continues par rapport aux variables $x$ et $y$. Ce système (2) peut se réduire à un système de quatres équations à quatres fonctions inconnues, mais du premier ordre. En effet il peut s'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a_{11} u + b_{11} v\right) + a_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + a_{11} u + b_{11} v\right) + b_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + a_{21} u + b_{21} v\right)$$
$$+ \left(c_{11} - a_{11} a_{12} - a_{21} b_{12} - \frac{\partial a_{11}}{\partial x}\right) u + \left(c_{12} - a_{12} b_{11} - b_{12} b_{21} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x}\right) v = f_1$$

et de même pour la seconde équation. Si l'on pose:

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + a_{11} u + b_{11} v = u_1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + a_{21} u + b_{21} v = v_1,$$

---

[3]) Voir notre thèse, Le problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Thèses Paris 1929. Gauthier-Villars.

alors le système $x$ réduit à:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\,u_1 + b_{12}\,v_1 + p_1\,u + q_1\,v = 0, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + a_{22}\,u_1 + b_{22}\,v_1 + p_2\,u + q_2\,v = 0, \end{cases}$$

auquel il faut attacher aussi les équations (3).

On a posé: $p_1 = c_{11} - a_{11}\,a_{12} - a_{21}\,b_{12} - \dfrac{\partial a_{11}}{\partial x}$ etc.

Mais il y a avantage à notre point de vue, à étudier le système (2) tel qu'il est, pour obtenir ainsi une généralisation directe de la méthode de Riemann. Une étude de ce système au point de vue de l'application de la méthode de Laplace a été faite par Albert Tonelli[4]).

**3.** Nous appelons comme d'habitude *intégrale régulière* dans un domaine, celle qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre. Introduisons un paramètre $\lambda$ dans le système du paragraphe précédent et soit le système:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \lambda\left[a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{11}\,u + c_{12}\,v\right] + f_1, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \lambda\left[a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{21}\,u + c_{22}\,v\right] + f_2. \end{cases}$$

Considérons le rectangle $R$ de sommets $ABDC$, $a \leqq x \leqq c$ et $b \leqq y \leqq d$ et dans lequel on suppose que les coefficients de (1) sont continus. Soit $BC$ un arc de courbe tracé dans ce rectangle, qui n'est rencontré que en un point par une parallèle à l'axe $ox$ ou $oy$. Nous nous proposons de démontrer l'existence d'une solution pour (1) lorsqu'on se donne le long de cet arc $u$ et $v$ une de leurs dérivées du premier ordre, car les relations $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy$, $dv = \ldots$ permettent de déterminer l'autre. Ou bien on peut se donner les dérivées du premier ordre de $u$ et $v$ le long de $BC$ et les fonctions $u, v$ en un point quelconque de $BC$, car alors en intégrant les relations précédentes le long de $BC$, on aurait $u, v$ en tout point de $BC$. De toute façon, nous supposons par conséquent connu $u, v$ et leurs dérivées du premier ordre sur $BC$. Il est évident qu'on peut supposer les données nulles sur $BC$, sans diminuer la généralité du problème. En effet soit $U$ et $V$ les solutions de l'équation $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial y} = 0$ et qui satisfont aux données initiales sur $BC$.

Alors la substitution $u = u' + U$, $v = v' + V$ vous conduit pour $u'$ et $v'$ à un système de la même forme, et qui ne diffère du proposé que par les termes libres $f_1$ et $f_2$.

---

[4]) Sobra un sistema di equazioni a derivate parziali di 2° ordine Memorie della Societa italiana delle Scienze. Serie 3, t. XIII, 1904.

Cherchons $u$ et $v$ sous la forme:

$$u(x,y)=\sum_0^\infty \lambda^n u_n(x,y); \qquad v(x,y)=\sum_0^\infty \lambda^n v_n(x,y).$$

En substituant en (1) on a les équations des approximations successives:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y}=f_1(x,y), \qquad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\,\partial y}=f_2(x,y) \quad \text{et pour} \quad n>0$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y}=a_{11}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+b_{11}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}+c_{11}u_{n-1}+c_{12}v_{n-1}$$
$$=h_{n-1}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y}=a_{21}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+b_{21}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}+\ldots=k_{n-1}(x,y).$$

$u_n$, $v_n$ satisfont aux mêmes conditions sur $BC$ que $u$ et $v$. Soit $M(x,y)$ un point de $R$ (supposons-le au-dessus de l'arc $BC$) et $P, Q$ les points de rencontre des parallèles aux arcs $oy$, $ox$ menées par $M$ et de l'arc de courbe $BC$, et $P', Q'$ les points où $MP, MQ$ rencontrent $AB$ et $AC$. Alors on sait que pour les données nulles de Cauchy, on a:

$$u_0(x,y)=\iint_{MPQ} f_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta; \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}=\int_{PM} f_1(x,\eta)\,d\eta; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y}=\int_{QM} f(\xi,y)\,d\xi$$

et de même pour $v_0$ et $u_n(x,y)=\iint_{MPQ} h_{n-1}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$ etc.

Soit $F$ un nombre qui majore les fonctions $f_1, f_2$ dans $R$. Il est évident alors que l'on a:

$$|u_0(x,y)|,\ |v_0|<\iint_{MPQ} F\,d\xi\,d\eta<\iint_{MP'AQ'} F\,d\xi\,d\eta$$

car on a augmenté le domaine d'intégration. De la même manière

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right|<\int_{P'M} F\,d\eta; \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial v_0}{\partial y}\right|<\int_{Q'M} F\,d\xi.$$

Considérons l'équation $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}=F$ et la solution $w_0$ qui s'annulle sur $AB$ et $AC$. En tenant compte de l'expression de $w_0$, on en déduit:

$$|u_0|,\ |v_0|\leqq w_0; \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right|<\frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial v_0}{\partial y}\right|<\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Soit $K$ les maximum des coefficients $|a_{ik}|, |b_{ik}|, |c_{ik}|$ dans $R$. Il s'ensuit alors que:

$$|h_0|,\ |k_0|<2K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}+w_0\right).$$

Si l'on considère alors l'équation

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}=2K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}+w_0\right)$$

et la solution qui s'annulle sur $AB$, $AC$, on déduit comme précédemment

$$|u_1|,\ |v_1| < w_1; \quad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right| < \frac{\partial w_1}{\partial x} \text{ etc.}$$

et ainsi de suite. Si

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y} = 2K\left(\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{n-1}}{\partial y} + w_{n-1}\right)$$

alors on a que

$$|u_n|,\ |v_n| < w_n \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| < \frac{\partial w_n}{\partial x}; \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| < \frac{\partial w_n}{\partial y}.$$

Il suffit par conséquent de démontrer la convergence uniforme pour les séries

$$\sum_0^\infty \lambda^n w_n, \quad \sum \lambda^n \frac{\partial w_n}{\partial x}, \quad \sum \lambda^n \frac{\partial w_n}{\partial y},$$

pour en déduire la convergence de séries correspondantes en $u$ et $v$. En faisant la substitution

$$w_0 = W_0, \quad w_n = 2K W_n$$

les $W_n$ satisfont aux équations

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial W_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial W_{n-1}}{\partial y} + W_{n-1}$$

et la démonstration de la convergence absolue et uniforme des séries en $W$, dans $R$ se fait comme dans le cas d'une seule équation. (Voir le livre déjà cité de M. Picard XV$^e$ leçon.)

Par conséquent nous avons démontré l'existence des intégrales satisfaisant aux conditions de Cauchy, pour notre système. En ce qui concerne l'unicité de ces solutions, il n'y a pas des difficultis spéciales pour ce problème, et on peut la démontrer comme dans le cas d'une seule équation. Voyons maintenant comment on peut appliquer la méthode de Riemann pour trouver ces solutions à l'aide des fonctions de Riemann[5]).

**4.** Soit toujours le système:

$$(1) \quad \begin{cases} L_1 \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{11}u + c_{12}v = 0, \\ L_2 \equiv \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y} + b_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y} + c_{21}u + c_{22}v = 0 \end{cases}$$

(on le considère sans second membre pour simplifier l'écriture, ce qui ne diminue pas la généralite de la méthode). Au système (1) on peut adjoindre un autre système, $M_1$, $M_2$, de la même manière que dans le cas des systèmes du type elliptique (voir notre thèse) en écrivant que

[5]) Sur l'application de la méthode de Riemann au système considéré nous avons déjà publié une Note dans les Comptes Rendus de l'Ac. de Paris, 188, p. 1973 (1929, I semestre).

l'on a la relation:

$$(I) \qquad UL_1 - uM_1 + \lambda(VL_2 - vM_2) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}.$$

$\lambda$ étant un paramètre quelconque $\neq 0$, $F$ et $G$ des expressions bi-linéaires en $u, U, v, V$ et leurs dérivées du premier ordre. On trouve de cette manière:

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 \equiv \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial(a_{11}U)}{\partial x} - \dfrac{\partial(a_{12}U)}{\partial y} - \lambda\left[\dfrac{\partial(a_{21}V)}{\partial x} + \dfrac{\partial(a_{22}V)}{\partial y}\right] + c_{11}U + \lambda c_{21}V, \\ M_2 \equiv \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{\lambda}\left[\dfrac{\partial(b_{11}U)}{\partial x} + \dfrac{\partial(b_{12}U)}{\partial y}\right] - \dfrac{\partial(b_{21}V)}{\partial x} - \dfrac{\partial(b_{22}V)}{\partial y} + \dfrac{1}{\lambda}c_{12}U + c_{22}V, \end{cases}$$

et pour $F$ et $G$:

$$(3) \quad \begin{cases} F = \dfrac{1}{2}\left(U\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) + \dfrac{\lambda}{2}\left(V\dfrac{\partial v}{\partial y} - v\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \qquad\qquad + a_{11}uU + \lambda a_{21}uV + b_{11}vU + \lambda b_{21}vV, \\ G = \dfrac{1}{2}\left(U\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + \dfrac{\lambda}{2}\left(V\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial V}{\partial x}\right) \\ \qquad\qquad + a_{12}uU + \lambda a_{22}uV + b_{12}vU + \lambda b_{22}vV. \end{cases}$$

Maintenant on procède de la même manière que dans le cas d'une seule équation. Soit $u$ et $v$ les intégrales du système $L_1 = L_2 = 0$ satisfaisant aux conditions de Cauchy et $U, V$ des intégrales, pour le moment quelconques, mais régulières dans $R$, du système adjoint $M_1 = M_2 = 0$. En intégrant dans ce cas, la relation (I) dans le triangle $MPQ$, envisagé précédament, on obtient:

$$(II) \qquad \int_{QP}(F\,dy - G\,dx) + \int_{PM} F\,dy - \int_{MQ} G\,dx = 0.$$

Explicitons les deux dernières intégrales

$$\int_{PM} F\,dy = \int_{PM}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(uU)}{\partial y} - u\left(\frac{\partial U}{\partial y} - a_{11}U - \lambda a_{21}V\right) + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial(vV)}{\partial y} - v\left(\lambda\frac{\partial V}{\partial y} - b_{11}U - \lambda b_{21}V\right)\right]dy,$$

et

$$\int_{QM} G\,dx = \int_{QM}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(uU)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial U}{\partial x} - a_{12}U - \lambda a_{22}V\right) + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial(vV)}{\partial x} - v\left(\lambda\frac{\partial V}{\partial x} - b_{12}U - \lambda b_{22}V\right)\right]dx.$$

Nous avons choisi $U$ et $V$ solutions quelconques du système adjoint $(M_1 M_2)$. Supposons en outre que ces solutions satisfont aussi aux conditions suivantes:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} - a_{12}U - \lambda a_{22}V = 0, & \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{1}{\lambda}b_{12}U - b_{22}V = 0 \text{ sur } MQ, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} - a_{11}U - \lambda a_{21}V = 0 \quad \text{et} & \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{1}{\lambda}b_{11}U - b_{21}V = 0 \text{ sur } MP. \end{cases}$$

Admettons pour le moment qu'il existe des solutions du système $M_1 = M_2 = 0$ satisfaisant à ces conditions. Alors on obtient de (II):

$$(uU)_M + \lambda (vV)_M = \frac{(uU)_P + (uU)_Q}{2} + \lambda \frac{(vV)_P + (vV)_Q}{2} - \int_{QP} F\,dy - G\,dx.$$

Supposons aussi que l'on a

$$U_M = V_M = 1. \tag{4'}$$

Il s'ensuit que

$$u_M + \lambda v_M = \frac{(uU)_P + (uU)_Q}{2} + \lambda \frac{(vV)_P + (vV)_Q}{2} - \int_{QP} F\,dy - G\,dx, \tag{5}$$

relation fondamentale qui permet de déterminer $u_M$ et $v_M$.

En effet, si l'on donne à $\lambda$ deux valeurs particulières, soit $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, alors le système qu'on obtient ainsi dans (5), permet de tirer $u_M$ et $v_M$.

Le résultat est indépendant du choix de $\lambda_1, \lambda_2$, comme on peut s'assurer facilement. Soit $U_1$ et $U_2$ les solutions du système adjoint correspondant à $\lambda = \lambda_1$ et de même $U_2$ et $V_2$ celle qui correspondent à $\lambda = \lambda_2$. Dans les expressions de $u_M$ et $v_M$ qu'on tire de (5), il n'entre que les fonctions

$$\frac{U_1 - U_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \frac{\lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

et leurs dérivées du premier ordre. Or il est facile à montrer que ces expressions sont indépendentes de $\lambda_1, \lambda_2$. En effet, ces fonctions satisfont aussi au système $M_1 = M_2 = 0$ avec $\lambda = 1$ comme on peut facilement s'assurer, et aux conditions (4) où l'on a aussi $\lambda = 1$. En tenant compte de ce que $U_M = V_M = 1$ on voit qu'au point $M$ on a:

$$\frac{(U_1 - U_2)_M}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0; \qquad \frac{(\lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_2)_M}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1.$$

Par conséquent ces fonctions satisfont à des équations et des conditions aux limites sans paramètres, elles sont donc indépendentes des $\lambda_1, \lambda_2$.

Soient maintenant $\xi, \eta$ les coordonnées de $M$. Les fonctions $U$ et $V$ dépendent de quatres arguments $\xi, \eta, x, y$ et aussi du paramètre $\lambda$, donc $U(x, y; \xi, \eta / \lambda)$ et $V(x, y; \xi, \eta / \lambda)$. Elles jouent le même rôle que la fonction de Riemann dans le cas d'une seule équation du type hyperbolique. On peut par conséquent les appeller *les fonctions de Riemann* du système (1). Elles sont tout à fait analogues aux fonctions de Green généralisées que nous avons considéré dans le cas des systèmes du type elliptique. Pour ces fonctions de Riemann on a aussi une relation d'échange des arguments qui $x$ déduit facilement de la même relation (I). Considérons le rectangle $ABCD$ ($A, D$ sommets opposés) et supposons que

$U$ et $V$ satisfont le long de $BD$, $CD$ aux relations (4) et $u, v$ solutions de $L_1 = L_2 = 0$ satisfont aux conditions:

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}u + b_{12}v = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{22}u + b_{22}v = 0 \ \text{ sur } AB, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{11}u + b_{11}v = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} + a_{21}u + b_{21}v = 0 \ \text{ sur } AC. \end{cases}$$

Alors en intégrant (I) dans $ABDC$ et en tenant compte de ces doubles conditions, en obtient la relation:

$$(7)\qquad (uU)_D + \lambda(vV)_D = (uU)_A + \lambda(vV)_A .$$

Si l'on ajoute les conditions supplémentaires: $U_D = V_D = 1$ et

$$(6')\qquad u_A = v_A = 1$$

alors on a en explicitant les arguments, la relation d'échange des arguments:

$$(7')\qquad u(A;D) + \lambda v(A;D) = U(D;A/\lambda) + \lambda V(D;A/\lambda)$$

qui a lieu pour toute valeur de $\lambda + 0$.

5. Nous avons admis dans ce qui précède l'existence des fonctions de Riemann, c'est-à-dire des solutions du système $M_1 = M_2 = 0$ et satisfaisant aux conditions (4) et (4'). Il s'agit maintenant de montrer que ces conditions sont compatibles et déterminent bien les fonctions de Riemann. On peut remarquer que pour cela, c'est la même chose que de considérer le système $(M_1 M_2)$ et les conditions (4), (4'), ou le système $(L_1 L_2)$ et les conditions (6), (6').

Soit $x_0, y_0$ les coordonnées du point $A$ et $R$ le rectangle $ABDC$. Par conséquent nous considérons le système:

$$(1)\qquad L_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots = 0, \qquad L_2 = 0$$

et les conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}u + b_{12}v = 0; \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{22}u + b_{22}v = 0 \end{cases}$$

pour $y = y_0$ (sur $AB$) et

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{11}u + b_{11}v = 0; \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} + a_{21}u + b_{21}v = 0 \end{cases}$$

sur $AC$ donc pour $x = x_0$. Et

$$(4)\qquad u_A = v_A = 1.$$

On peut considérer les deux premières équations (éq. (2)) comme un système différentiel ordinaire (car $y = y_0$) et tirer de ces système $u(x;y_0)$ et $v(x;y_0)$ en fonctions de deux constantes arbitraires (par rapport à $x$) et qui entrent linéairement, à cause de la linéareté du système. On dé-

ermine ces deux constantes par les conditions $u_A = v_A = 1$. On procède le la même manière avec les équations (3). En somme on obtient que our $y = y_0$ $u$ et $v$ doivent se réduire à certaines fonctions de $x$ soient $\varphi_1(x; x_0, y_0)$, $\varphi_2(x; x_0, y_0)$ et pour $x = x_0$ aux fonctions $\psi_1(y; x_0, y_0)$, $\psi_2(y; x_0, y_0)$, fonctions dont la nature si non l'expression, peut être déerminée dès qu'on connaît les coefficients $a_{ik}, b_{ik}$. Comme on l'a dit ces onctions ne dépendent plus d'aucune arbitraire car l'on a:

$$\varphi_1(x_0; x_0, y_0) = \varphi_2(x_0; x_0, y_0) = \psi_1(y_0; x_0, y_0) = \psi_2(y_0; x_0, y_0) = 1.$$

On est conduit ainsi, pour déterminer l'existence des solutions du système (1) atisfaisant aux conditions (2), (3) et (4) à un problème de Darboux-Picard pour ce système, dans lequel les données sur les caractéristiques $AB$, $AC$ dépendent en outre de deux paramètres $x_0, y_0$, ce qui ne change ien au problème.

Or un tel problème ne présente, en ce qui concerne le théorème l'existence, aucune difficulté spéciale. La méthode des approximations successives, comme dans le cas d'une seule équation[6]) nous montre qu'il en xiste bien des solutions pour ce problème. Pour cela, on part du système (1) crit sous la forme (1) du § 3, avec un paramètre $\lambda$, on suppose des lonnées nulles sur $AB$, $AC$ ce qui ne diminue pas la généralité, et on orme la chaîne $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ des approximations uccessives, et les séries $\Sigma \lambda^n u_n$, $\Sigma \lambda^n v_n$ sont uniformément convergentes, uel que soit $\lambda$ (donc aussi pour $\lambda = 1$).

Au point de vue théorique il n'y a aucune difficulté pour démontrer 'existence des fonctions de Riemann. Mais il peut se faire que la déermination des fonctions $\varphi$ et $\psi$ soit impossible.

6. La méthode que nous venons d'exposer pour le cas de deux équations à deux fonctions inconnues et deux variables indépendentes, peut s'appliquer à des cas beaucoup plus étendus, sans aucun changement mportant. Considerons le cas de $n$ équations à $n$ fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Soit donc le système:

$$1) \quad L_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_{i1}^k \frac{\partial u_k}{\partial x} + a_{i2}^k \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système adjoint à ce système est le suivant:

$$2) \quad M_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x\, \partial y} - \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \frac{\partial (a_{k1}^i v_k)}{\partial x} + \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \frac{\partial (a_{k2}^i v_k)}{\partial y} \right) + \sum_i \frac{\lambda_k}{\lambda_j} b_{ji} u_j = 0.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des paramètres arbitraires $\neq 0$.

---

[6]) Voir le livre de M. É. Picard déjà cité, XIII[e] leçon.

Entre ces deux systèmes on a la relation:

$$(I') \qquad \sum_1^n \lambda_i (v_i L_i - u_i M_i) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

qui comme (I) permet de traiter le problème de Cauchy pour le système (1) comme dans le cas de deux équations. Nous n'insistons pas sur ce point et renvoyons à notre thèse, car l'analogie avec le cas du problème de Dirichlet se conserve.

On peut aussi essayer de traiter le même problème dans le cas des systèmes à plus de deux variables et on a les mêmes difficultés que dans le cas d'une seule équation, et pas d'autres. De même la méthode de Riemann peut s'appliquer aussi au troisième et quatrième problème que nous avons énoncé au § 1. On peut aussi appliquer cette méthode de l'adjointe paramètrique, pour ces problèmes et aux systèmes que nous avons envisagé.

(Eingegangen am 20. Oktober 1929.)

# Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen.

Von

S. Lewin in Moskau.

Jedes orthogonale Funktionensystem kann als ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Hilbertschen Raume, dessen Elemente Funktionen mit summierbarem Quadrat sind, betrachtet werden. Ein solches Koordinatensystem weist im Vergleich mit willkürlich gewählten „schiefwinkligen" Systemen einige Vorteile auf, teilweise im Hinblick auf die Theorie der Fourierschen Reihen.

Ist das gegebene Funktionensystem nicht orthogonal, so kann es mittels des Schmidtschen Verfahrens durch lineare Transformation in ein orthogonales System verwandelt werden. Daher erscheint eine spezielle Untersuchung der schiefwinkligen Systeme bei Betrachtung von Eigenschaften, die bei linearen Transformationen unveränderlich bleiben, als überflüssig.

Andererseits kann eine Vereinfachung des Problems mittels Ersetzung eines schiefwinkligen Systems durch ein rechtwinkliges nicht stattfinden. Hier scheint es vielmehr zweckmäßig zu sein, die für orthogonale Systeme gültigen Grundsätze auf die willkürlichen Systeme von Funktionen mit summierbarem Quadrat auszudehnen. So haben wir es in § 1 unter Berücksichtigung von Grams Mitteilung[1]) versucht.

Jedes Funktionensystem wird gewissermaßen durch die Grundmatrix charakterisiert, welche die „Winkel" zwischen den „Koordinatenachsen" bestimmt. Diejenigen Sätze, welche dem Fischer-Rieszschen Theorem und der Parsevalschen Gleichung entsprechen, unterscheiden sich von den üb-

[1]) J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Journal f. d. reine und angew. Mathematik 94 (1883), S. 41.

lichen nur dadurch, daß sie anstatt der Quadratsumme der Komponenten eine andere quadratische Form enthalten [2]). Die Koeffizienten dieser Form werden von der Grundmatrix vollkommen bestimmt.

Satz 1 (die Verallgemeinerung des Schmidtschen Verfahrens) liefert eine Methode zum Aufbau eines durch eine vorgeschriebene Matrix bestimmten Koordinatensystems innerhalb eines jeden Funktionenraumes. § 2 behandelt dichte Systeme. Satz 2 erbringt den Beweis dafür, daß die quadratische Dichtigkeit eine Eigenschaft ist, die ausschließlich von der Form der Grundmatrix abhängt und infolgedessen als eine Eigenschaft der gleichen Art wie die Orthogonalität betrachtet werden kann. Satz 3 liefert eine Methode zur effektiven Konstruktion von absolut dichten Systemen durch lineare Transformation absolut stetiger Funktionen. § 3 betrachtet B-Systeme, das sind Systeme, welche zu biorthogonalen ergänzt werden können. Außer der notwendigen und hinreichenden Bedingung wird hier ein die Koeffizienten der besten Approximation betreffender Satz bewiesen, welcher uns zu den biorthogonalen Reihen führt. § 4 liefert uns einige Beispiele, welche die Ergebnisse der §§ 2 und 3 illustrieren.

## § 1.

## Vorbereitende Sätze über Systeme von Funktionen mit summierbarem Quadrat.

Es sei $L$ die Klasse aller reellen, auf $a \leqq x \leqq b$ definierten, quadratisch summierbaren Funktionen. Zwei zu $L$ gehörende Funktionen heißen nach Lebesgue *äquivalent*:

$$f_1(x) \sim f_2(x),$$

wenn

$$\text{(I)} \qquad \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 \, dx = 0,$$

oder, was dasselbe ist, wenn sie „fast überall" auf $[a, b]$ zusammenfallen. Wir wollen hier zwischen zwei äquivalenten Funktionen keinen Unterschied machen und jede Gesamtheit aller zueinander äquivalenten Funktionen als eine einzige Funktion betrachten.

Wir wollen sagen, daß die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *linear unabhängig* sind, wenn keine Beziehung von der Form

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha f_\alpha(x) \sim 0$$

besteht, außer wenn $c^1 = c^2 = \ldots = c^n = 0$.

---

[2]) Den Grundgedanken dieses Teiles der vorliegenden Ausführung verdanke ich dem freundlichen Einfluß von Herrn P. Raschevsky.

Es sei

(1) $$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

eine unendliche Folge von zu $L$ gehörenden linear unabhängigen Funktionen. Wir bilden die symmetrische Matrix

$$\| \varphi_{ij} \| \ (i, j = 1; 2, \ldots); \quad \varphi_{ij} = \int \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx \ ^3),$$

welche wir als *Grundmatrix des Systems* (1) bezeichnen werden. Der $n$-te Abschnitt $\| \varphi_{ij} \|^{(n)}$, der aus den $n$ ersten Spalten und Zeilen der Grundmatrix besteht, *hat eine positive Determinante* $D^n$ [4]). Wir können deshalb die Matrix

$$\| \varphi_n^{ij} \| \ (i, j = 1, 2, \ldots, n); \quad \varphi_n^{ij} = \frac{D_n^{ij}}{D^n}$$

für jedes $n$ bilden, wobei $D_n^{ij}$ die zu dem Elemente $\varphi_{ij}$ von $D^n$ gehörige Unterdeterminante bezeichnet. Es ist also

(2) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{i\alpha}\, \varphi_n^{j\alpha} = \delta_i^j,$$

wo $\delta_j^i$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$. Die Matrizen $\| \varphi_n^{ij} \|$ sind symmetrisch.

Man sagt [5]), eine Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *konvergiert im Mittel*, wenn

(III) $$\int [f_n(x) - f_m(x)]^2\, dx \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty.$$

In diesem Falle existiert in $L$ eine im Sinne der Äquivalenz eindeutig bestimmte Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\int [f(x) - f_n(x)]^2\, dx \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty;$$

$f(x)$ heißt die Grenzfunktion der Folge:

$$\{f_i(x)\} \sim f(x).$$

---

[3]) Unter $\int f(x)\, dx$ ist überall $\int_a^b f(x)\, dx$ zu verstehen.

[4]) Das ist das sogenannte Gramsche Kriterium für die lineare Unabhängigkeit der Funktionen. Am kürzesten kann man es folgendermaßen beweisen. Es sei die Behauptung für $n = 1, 2, \ldots, k$ schon festgestellt. Da $D_{k+1}^{k+1\,k+1} = D^k$, so entsteht aus (I) und (II) die Ungleichung

$$J = \int \Big[ \sum_{\alpha=1}^{k+1} D_{k+1}^{k+1\,\alpha}\, \varphi_\alpha(x) \Big]^2 dx > 0.$$

Da aber

$$J = \sum_{\alpha=1}^{k+1} \sum_{\beta=1}^{k+1} D_{k+1}^{k+1\,\alpha}\, D_{k+1}^{k+1\,\beta}\, \varphi_{\alpha\beta} = D^k\, D^{k+1},$$

so ist $D^{k+1} > 0$, w. z. b. w.

[5]) E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, C. R. 144 (1907), S. 1022.

Für jedes $g(x)$ aus $L$ gilt

(IV) $$\lim_{n\to\infty} \int g(x) f_n(x)\, dx = \int g(x) f(x)\, dx.$$

Es seien

$$a_n^1(f), a_n^2(f), \ldots, a_n^n(f)$$

(kurz: $a_n^i$) die *Koeffizienten der besten Approximation* $n$-ter *Ordnung der Funktion* $f(x)$ *nach dem System* (1). D. h. für ein beliebiges Zahlensystem $b^1, b^2, \ldots, b^n$ sei

(V) $$\int \Big[f(x) - \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \varphi_\alpha(x)\Big]^2 dx \leqq \int \Big[f(x) - \sum_{\alpha=1}^{n} b^\alpha \varphi_\alpha(x)\Big]^2 dx.$$

Das lineare Aggregat

$$f_n(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

approximiert bei festem $n$ die Funktion $f(x)$ auf die beste Weise im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate. Die Größen

$$A_i(f) = \int f(x) \varphi_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

wollen wir die *Komponenten von* $f(x)$ *nach dem System* (1) *nennen*. Wie J. Gram [6]) gezeigt hat, berechnen sich die Zahlen $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^n$ aus den Gleichungen

(3) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{i\alpha} a_n^\alpha = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eindeutig zu

(4) $$a_n^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_n^{i\alpha} A_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Für orthogonale Funktionensysteme sind die $a_n^i = A_i$, hängen also von $n$ nicht ab.

Die Besselsche Ungleichung. *Das Komponentensystem jeder zu* $L$ *gehörigen Funktion ist der Bedingung*

(5) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A_\alpha A_\beta \varphi_n^{\alpha\beta} \leqq \int [f(x)]^2\, dx$$

*unterworfen.*

Beweis. Man setze

$$M_n = \int \Big[f(x) - \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \varphi_\alpha(x)\Big]^2 dx.$$

Dann haben wir

$$0 \leqq M_n = \int [f(x)]^2\, dx - 2 \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha a_n^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_n^\alpha a_n^\beta \varphi_{\alpha\beta}.$$

---

[6]) J. P. Gram, loc. cit.

Setzt man jetzt

$$G_n(f) = \int \Big[ \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \varphi_\alpha(x) \Big]^2 dx,$$

so ergibt sich aus (3) und (4):

$$(6) \qquad G_n(f) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_n^\alpha a_n^\beta \varphi_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha a_n^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A_\alpha A_\beta \varphi_n^{\alpha\beta}$$

und die Ungleichung $M_n \geqq 0$ schreibt sich in der Form:

$$G_n(f) \leqq \int [f(x)]^2 dx, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Folgerung. Wegen (V) ist $M_n \geqq M_{n+1}$ und wegen $G_n(f) = \int [f(x)]^2 - M_n(f)$ ist

$$G_n(f) \leqq G_{n+1}(f).$$

Da aber, wie (5) zeigt, $G_n(f)$ beschränkt bleibt, *strebt $G_n(f)$ gegen einen Grenzwert* $\leqq \int [f(x)]^2 dx$.

Der Fischer-Rieszsche Satz[6a]). *Es sei $A_1, A_2, \ldots$ ein Zahlensystem, für welches der Ausdruck*

$$G_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A_\alpha A_\beta \varphi_n^{\alpha\beta}$$

*für alle $n$ unterhalb einer Schranke $N$ bleibt. Dann existiert in $L$ eine Funktion $f(x)$, die die gegebenen Zahlen $\{A_i\}$ zu ihren Komponenten nach* (1) *hat.*

Beweis. Wir setzen

$$a_n^i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \varphi_n^{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

wodurch auch (3) erfüllt wird, und bestimmen die Funktionen

$$f_n(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \varphi_\alpha(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$ konvergiert im Mittel. In der Tat: für $m > n$ ist

$$\int [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx = G_m(A_1, \ldots, A_m) - 2 \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha \sum_{\beta=1}^{m} a_m^\beta \varphi_{\alpha\beta} + G_n(A_1, \ldots, A_n)$$

$$= G_m - 2 \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha A_\alpha + G_n = G_m - G_n,$$

da wegen (6)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_n^\alpha A_\alpha = G_n$$

gilt. Daher ist $G_m \geqq G_n$, d. h. $G_n(A_1, \ldots, A_n)$ ist eine nicht abnehmende Funktion von $n$. Da die Folge außerdem beschränkt ist, so besitzt sie einen Grenzwert $G$. Es gilt

$$\int [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx = G_m - G_n \to 0 \quad \text{für} \quad m, n \to \infty.$$

---

[6a]) Vgl. mit L. Brand, On infinite systems of linear integral equations, Ann. of Math. 14 (1913), S. 101.

Nach (III) konvergiert also die Folge $\{f_i(x)\}$ im Mittel gegen eine Grenzfunktion $f(x)$. Wegen (IV) ist

$$\int f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} a_n^{\alpha}\varphi_{i\alpha} = A_i,$$

w. z. b. w.

*Die Beschränktheit der Folge $G_n(A_1, \ldots, A_n)$ ist also die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß $A_1, A_2, \ldots$ das Komponentensystem einer zu $L$ gehörenden Funktion darstellt.*

Die Gesamtheit aller Funktionen, welche sich durch lineare Kombinationen von der Form

$$P(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} b^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x)$$

beliebig genau im Mittel approximieren lassen, bezeichnet man als *Raum* $R\{\varphi_i\}$ des Systems (1). D. h. für jedes $f(x)$ aus $R\{\varphi_i\}$ und zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ läßt sich ein Ausdruck $P(x)$ finden derart, daß

$$\int [f(x) - P(x)]^2\,dx < \varepsilon$$

wird.

Die Parsevalsche Gleichung. *Damit eine Funktion $f(x)$ zu $R\{\varphi_i\}$ gehöre, ist offenbar notwendig und hinreichend $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$, oder, was dasselbe ist,*

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha}A_{\beta}\varphi_n^{\alpha\beta}\Big] = \int [f(x)]^2\,dx. \tag{7}$$

Die bei dem Beweis des Fischer-Rieszschen Satzes konstruierte Funktion $f(x)$ gehört gewiß zu $R\{\varphi_i\}$. Es ist leicht zu beweisen, daß aus (7) die Gültigkeit der Gleichung

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha}B_{\beta}\varphi_n^{\alpha\beta}\Big] = \int f(x)\,g(x)\,dx \tag{7'}$$

folgt, wo $B_1, B_2, \ldots$ die Komponenten einer willkürlichen Funktion $g(x)$ aus $L$ bedeuten. Im Falle, wenn die Gleichung (7) für jede Funktion $f(x)$ aus $L$ erfüllt ist, heißt das System (1) vollständig. Es ist klar, daß es in jedem Raume nur eine Funktion geben kann, die das vorgeschriebene Komponentensystem besitzt. Alle anderen Funktionen, die dieselben Komponenten haben, unterscheiden sich von dieser um Funktionen, die zu allen $\varphi_i(x)$ orthogonal sind, gehören aber nicht zu dem Raume $R\{\varphi_i\}$.

Die Bedingung (7) kann in einer anderen Form ausgesprochen werden.

*Damit $\psi_1(x)$ zu dem Raume $R_2$ des Systems $\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{11} = \infty. \tag{8}$$

Beweis. Es sei $\psi_1(x)$ in $R_2$ enthalten. Wegen (7′) ist jede Funktion $h(x)$, die zu allen $\psi_2(x), \psi_3(x), \ldots$ orthogonal ist, auch zu $\psi_1(x)$ orthogonal. Das Komponentensystem

$$A_i = \delta_i^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

kann also in dem Raume des Systems $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ nicht stattfinden. Daher muß $G_n(1, 0, \ldots, 0) \to \infty$; es ist aber

$$G_n(1, 0, \ldots, 0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^1 \psi_n^{\alpha\beta} = \psi_n^{11},$$

w. z. b. w.

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß (8) erfüllt ist. Wäre $\psi_1(x)$ im $R_2$ nicht enthalten, so könnten wir in $R_2$ eine solche Funktion $\psi_1^*(x)$ finden, daß

$$\int \psi_1^*(x)\, \psi_i(x)\, dx = \psi_{1i} \qquad (i > 1).$$

Die Funktion $g(x) = \psi_1(x) - \psi_1^*(x)$ wäre dann zu allen $\psi_i(x)$ $(i > 1)$ orthogonal, zu $\psi_1(x)$ kann sie aber nicht orthogonal sein, da sie zu dem Raume $R\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ gehört und von 0 verschieden ist. Die Funktion

$$h(x) = \frac{g(x)}{\int g(x)\, \psi_1(x)\, dx}$$

besäße das Komponentensystem $A_i = \delta_i^1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, was unmöglich ist, da $G_n(\delta_1^1, \delta_2^1, \ldots, \delta_n^1) = \psi_n^{11} \to \infty$.[7])

* * *

Wir wollen sagen, ein System $\{\psi_i(x)\}$ sei in ein anderes System $\{\varphi_i(x)\}$ *linear transformiert*, wenn

$$\varphi_i(x) = \sum_{\alpha=1}^{i} c_i^\alpha \psi_\alpha(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei alle $c_i^i \neq 0$. Eine lineare Transformation ist also umkehrbar. Daraus folgt, daß *der Raum des Systems bei linearen Transformationen unverändert bleibt.* Die Schmidtsche Orthogonalisierungstransformation liefert ein Beispiel linearer Transformationen.

Wir wollen sagen, die Matrix $\| \varphi_{ij} \|$ sei *positiv*, wenn alle ihre Hauptdeterminanten $D^n > 0$ sind.

Satz 1. *Um eine Matrix, die aus den Zahlen $\varphi_{ij}$ gebildet ist, als Grundmatrix betrachten zu können, ist hinreichend*[8]*, daß sie symmetrisch und positiv ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man jedes gegebene*

[7]) Der Satz kann leicht auch direkt aus (7) gefolgert werden.

[8]) Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist von J. Gram bewiesen worden. Siehe Fußnote [4]).

*System von linear unabhängigen*[9]*), zu $L$ gehörenden Funktionen linear in ein anderes transformieren, so daß das neue System die Matrix $\| \varphi_{ij} \|$ zur Grundmatrix hat.*

Beweis. Es sei $\{\psi_i(x)\}$ ein beliebiges System von zu $L$ gehörenden Funktionen. Erster Schritt. Mittels der Schmidtschen Transformation $S$ verwandle man $\{\psi_i(x)\}$ in ein orthogonales, normiertes System $\{\Phi_i(x)\}$. Zweiter Schritt. Man definiere eine lineare Transformation $T$ mittels der rekursiven Formeln:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \pm\sqrt{\varphi_{11}}\,\Phi_1(x), \\ \varphi_n(x) &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} d_n^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x) + l_n\Phi_n(x), \end{aligned}$$

wo

$$d_n^i = \sum_{\beta=1}^{n-1}\varphi_{n\beta}\varphi_{n-1}^{i\beta} \quad (i=1,2,\ldots,n-1); \qquad l_n = \pm\sqrt{\frac{D^n}{D^{n-1}}} \quad (n=2,3,\ldots)$$

gesetzt ist. Wir wollen zeigen, daß die Gleichungen

$$\int \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \varphi_{ij} \qquad (i,j=1,2,\ldots)$$

bestehen. Es soll nun der Satz für $i,j<n$ bereits bewiesen sein (für $i=j=1$ ist $\int[\varphi_1(x)]^2\,dx=\varphi_{11}$). Wir wollen zeigen, daß er auch für $i,j<n+1$ gilt. Für $j<n$ ist[10]) wegen (2)

$$\int \varphi_n(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1} d_n^{\alpha}\varphi_{j\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n-1}\varphi_{j\alpha}\sum_{\beta=1}^{n-1}\varphi_{n\beta}\varphi_{n-1}^{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{n-1}\varphi_{n\beta}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\varphi_{j\alpha}\varphi_{n-1}^{\alpha\beta} = \varphi_{nj}$$

und für $j=n$

$$\int[\varphi_n(x)]^2\,dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1} d_n^{\alpha}d_n^{\beta}\varphi_{\alpha\beta} + l_n^2 = l_n^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1}\varphi_{\alpha\beta}\sum_{\gamma=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}\varphi_{n-1}^{\alpha\gamma}\sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\delta}\varphi_{n-1}^{\beta\delta}$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}\varphi_{n\delta}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\varphi_{n-1}^{\alpha\gamma}\sum_{\beta=1}^{n-1}\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{n-1}^{\beta\delta} + l_n^2 = \sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}\varphi_{n\delta}\varphi_{n-1}^{\gamma\delta} + \frac{D^n}{D^{n-1}}.$$

Die rechte Seite ist gleich $\varphi_{nn}$. Um dies einzusehen, zerlege man die Determinante $D^n$ nach den Elementen der letzten Zeile:

$$D^n = \sum_{\gamma=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}D_n^{n\gamma} + \varphi_{nn}D^{n-1}.$$

Zerlegen wir die Determinante $(-1)^{n+\gamma}D_n^{n\gamma}$ nach den Elementen der letzten Spalte:

$$(-1)^{n+\gamma}D_n^{n\gamma} = \sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\delta}(-1)^{n+\gamma+1}D_{n-1}^{\delta\gamma},$$

---

[9]) Es genügt, das Vorhandensein unendlich vieler linear unabhängiger Funktionen im $\{\psi_i(x)\}$ zu fordern. Die gleiche Bemerkung kann auch zu den Folgerungen 1 und 3 und zu dem Satze 3 gemacht werden.

[10]) Da nämlich $\int \Phi_n(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0$ ist für $j<n$.

so folgt

$$D^n = -\sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}\varphi_{n\delta}D_{n-1}^{\gamma\delta} + \varphi_{nn}D^{n-1}$$

und

$$\frac{D^n}{D^{n-1}} + \sum_{\gamma=1}^{n-1}\sum_{\delta=1}^{n-1}\varphi_{n\gamma}\varphi_{n\delta}\varphi_{n-1}^{\gamma\delta} = \varphi_{nn}.$$

Wir sehen, daß die Transformation $ST$ das System $\{\psi_i(x)\}$ durch dasjenige System $\{\varphi_i(x)\}$ ersetzt, welches die vorgeschriebene Matrix $\|\varphi_{ij}\|$ besitzt.

Folgerung 1. *Wenn $\{\varphi_i(x)\}$ und $\{\psi_i(x)\}$ zwei beliebige Funktionensysteme sind, so kann man das System $\{\psi_i(x)\}$ derart linear transformieren, daß das neue System die Matrix $\|\varphi_{ij}\|$ besitzt.*

## § 2.

## Dichte Systeme.

### 1. Quadratische Dichtigkeit.

Das Funktionensystem

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots \tag{1}$$

heißt *quadratisch dicht*[11]), wenn der Raum einer jeden von seinen (unendlichen) Teilfolgen mit dem Raume des ganzen Systems zusammenfällt. Mit anderen Worten, das System wird quadratisch dicht genannt, wenn aus der Gültigkeit der Parsevalschen Gleichung (7) für irgendeine Funktion $f(x)$ für das System $\{\varphi_i(x)\}$ die Gültigkeit derselben Gleichung für das Teilsystem

$$\varphi_{i_1}(x),\ \varphi_{i_2}(x),\ \ldots$$

folgt.

Satz 2. *Damit* (1) *quadratisch dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Zahlenfolge $i_1 < i_2 < \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{11} = \infty$$

*wird, wo $\varphi_{i_k}(x) = \psi_k(x)$ gesetzt ist.*

Beweis. Damit (1) quadratisch dicht ist, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß jede Funktion $\varphi_{i_1}(x)$ des Systems (1) zu dem Raume eines jeden Teilsystems $\varphi_{i_2}(x),\ \varphi_{i_3}(x),\ \ldots$ gehört. Setzt man jedesmal $\varphi_{i_k}(x) = \psi_k(x)$, so sieht man, daß (8) erfüllt sein muß, w. z. b. w.

Folgerung 2. *Die quadratische Dichtigkeit ist eine Eigenschaft, die ausschließlich von der Grundmatrix abhängt.*

In der Tat, die Größen $\{\psi_n^{11}\}$ sind durch die Matrix $\|\varphi_{ij}\|$ vollständig bestimmt.

---

[11]) Ch. Müntz, Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 96–110.

Folgerung 3. *Jedes System von linear unabhängigen, zu $L$ gehörenden Funktionen läßt sich in ein quadratisch dichtes System linear transformieren.*

Um dies zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges quadratisch dichtes System $\{\varphi_i(x)\}$ [12]) und konstruieren seine Grundmatrix $\|\varphi_{ij}\|$. Folgerung 1 gemäß kann man jedes vorgeschriebene System $\{\omega_i(x)\}$ derart linear transformieren, daß das neue System $\{\varphi_i^*(x)\}$ die Matrix $\|\varphi_{ij}\|$ besitzt. Nach Folgerung 2 muß $\{\varphi_i^*(x)\}$ quadratisch dicht sein.

Da bei der linearen Transformation der Raum des Systems sich nicht ändert, kann man in jedem Raume ein quadratisch dichtes System herstellen. Im Falle, wenn das Ausgangssystem $\{\omega_i(x)\}$ vollständig ist, ist auch das gewonnene quadratisch dichte System vollständig.

## 2. Absolute Dichtigkeit.

Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Funktionen, die mit beliebiger Genauigkeit durch lineare Aggregate aus (1) gleichmäßig approximiert werden können, als *Feld $P\{\varphi_i\}$ des Systems* (1). D. h. wenn $g(x) \subset P\{\varphi_i\}$, so läßt sich zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ ein Ausdruck $\sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha \varphi_\alpha(x)$ finden derart, daß

$$|g(x) - \sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha \varphi_\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Nach Ch. Müntz [13]) heißt ein Funktionensystem *absolut dicht* (kürzer: *dicht*), wenn das Feld eines jeden unendlichen Teilsystems von (1) mit dem Felde des ganzen Systems zusammenfällt. Um ein dichtes System zu gewinnen, ist es hinreichend, ein quadratisch dichtes System $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ zu nehmen und die Folge der unbestimmten Integrale

$$F_1(x), F_2(x), \ldots ; \qquad F_i = \int_a^x \varphi_i(y)\, dy$$

zu bilden [14]).

Satz 3. *Es seien*

$$\Omega_1(x), \Omega_2(x), \ldots$$

a) *linear unabhängige,*

b) *absolut stetige Funktionen mit quadratisch summierbaren Ableitungen, und es sei*

c) $$\Omega_1(a) = \Omega_2(a) = \ldots = 0 .$$

*Dann läßt sich das System $\{\Omega_i(x)\}$ in ein absolut dichtes System linear transformieren.*

---

[12]) Daß solche Systeme existieren, hat H. Müntz gezeigt. Siehe auch § 4.

[13]) Ch. Müntz, loc. cit.

[14]) Ch. Müntz, loc. cit.

Beweis. Man setze $\omega_i(x) = \frac{d\Omega_i(x)}{dx}$. Die Funktionen $\{\omega_i(x)\}$, die auf solche Weise fast überall auf $[a, b]$ definiert sind, gehören zu $L$. Sie sind stets linear unabhängig; denn existierte eine Beziehung von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha \omega_\alpha(x) \sim 0,$$

so wäre

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha \Omega_\alpha(x) = \text{konst.}$$

und wegen c)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c^\alpha \Omega_\alpha(x) = 0,$$

was der Bedingung a) widerspricht. Wir können also (Folgerung 3) dieses System in ein quadratisch dichtes System $\{\varphi_i(x)\}$ mit Hilfe einer linearen Transformation $T$ verwandeln. Man setze jetzt

$$F_i(x) = \int_a^x \varphi_i(y)\, dy.$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß das System $\{F_i(x)\}$, welches dicht ist, aus dem System $\{\Omega_i(x)\}$ durch dieselbe lineare Transformation $T$ entsteht; w. z. b. w.

Ist das System $\{\omega_i(x)\}$ vollständig, so enthält das Feld $P\{F_i\}$ alle stetigen Funktionen, die im Punkte $a$ verschwinden.

Bemerkung. Wenn $\{F_i(x)\}$ auf $a \leqq x \leqq b$ dicht ist, so besitzt es offenbar dieselbe Eigenschaft auf jedem Teilintervall $a_1 \leqq x \leqq b_1$, wo $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß *die Bedingung* c) *des Satzes* 3 *überflüssig ist.* Es sei in der Tat $\{\Omega_i(x)\}$ ein Funktionensystem, welches nur den Bedingungen a) und b) unterworfen ist. Dann betrachten wir neben $[a, b]$ das Intervall $[c, a]$, wo $c < a$, und definieren auf ihm irgendein Funktionensystem $\{\Omega_i'(x)\}$, welches außer der Bedingung b) noch den Bedingungen

$$\Omega_i'(c) = 0; \qquad \Omega_i'(a) = \Omega_i(a) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

genügt. Das System $\{\Omega_i^*(x)\}$, wo

$$\Omega_i^*(x) = \begin{cases} \Omega_i'(x) & \text{für} \quad c \leqq x \leqq a \\ \Omega_i(x) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq b \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ist auf $c \leqq x \leqq b$ definiert und genügt den Bedingungen a), b) und c) des Satzes. Es kann also in ein dichtes System $\{F_i(x)\}$ linear transformiert werden. Nach der Bemerkung ist $\{F_i(x)\}$ auch auf $a \leqq x \leqq b$ dicht.

Daraus folgt, daß wir mittels dieser Methode auch solche dichte Systeme zu konstruieren imstande sind, welche alle stetigen Funktionen beliebig genau gleichmäßig approximieren können. Um ein solches System zu gewinnen, kann man z. B. das System

$$1, x, \ldots, x^m, \ldots$$

als Ausgangssystem $\{\Omega_i(x)\}$ benutzen.

## § 3.

## Biorthogonale Funktionensysteme.

Zwei Funktionenfolgen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \quad \text{und} \quad \varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots$$

bilden ein *biorthogonales System*, wenn sie den Gleichungen

$$\int \varphi_i(x)\,\varphi^j(x)\,dx = \delta_i^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

genügen. Wir wollen sagen, $\{\varphi_i(x)\}$ sei ein *B-System*, wenn in $L$ mindestens ein System $\{\varphi^i(x)\}$ existiert, das mit dem ersten zusammen ein biorthogonales System bildet.

A. Pell[15]) hat ein mit Orthogonalisationskoeffizienten verbundenes Kriterium für ein $B$-System aufgestellt. Wir wollen hier ein anderes, mit der Grundmatrix verbundenes Kriterium herleiten.

Satz 4. *Damit* (1) *ein B-System sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes i die Größe* $\varphi_n^{ii}$ *für* $n \to \infty$ *gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.*

Beweis. Die Komponenten der Funktion $\varphi^i(x)$, wenn sie existiert, sind notwendigerweise

$$A_k(\varphi^i) = \delta_k^i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

mithin ist

$$G_n(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \delta_\alpha^i\, \delta_\beta^i\, \varphi_n^{\alpha\beta} = \varphi_n^{ii}.$$

Da aber die Existenz des Grenzwertes der Form $G_n$ die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer Funktion ist, welche die Komponenten $A_1, A_2, \ldots$ besitzt, so ist somit der Satz bewiesen.

Bemerkung. Da die Existenz von $\lim g_n$ bereits aus der Beschränktheit von $\{g_n\}$ folgt, so genügt es, die Beschränktheit der Größe $\varphi_n^{ii}$ für $n \to \infty$ zu fordern.

---

[15]) A. Pell, „Biorthogonal systems of functions", Transactions of the American Mathematical Society 12 (1911), p. 135–164.

Das System $\{\varphi^i(x)\}$, dessen Funktionen dem Fischer-Rieszschen Satze entsprechend als Grenzfunktionen (im Mittel) der Folgen

$$\varphi_1^i(x),\ \varphi_2^i(x),\ \ldots \qquad (i=1,2,\ldots);$$

$$\varphi_n^i(x)=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_n^{i\alpha}\varphi_\alpha(x)\ ^{16}) \qquad (n,i=1,2,\ldots)$$

gewonnen sind, wollen wir als das zu (1) adjungierte System bezeichnen. Es ist das einzige System, welches den Gleichungen (10) genügt und im Raume $R\{\varphi_i\}$ liegt. Alle anderen Funktionen, die den Gleichungen (10) genügen, unterscheiden sich von den adjungierten Funktionen um Funktionen, die zu dem Raume $R(\varphi_i)$ orthogonal sind.

Die $B$-Systeme besitzen eine in gewisser Hinsicht der quadratischen Dichtigkeit entgegengesetzte Eigenschaft. Wir wollen sagen, daß (1) *minimal* ist, wenn der Raum $R\{\varphi_i\}$ sich verkleinert, sobald wir aus dem System eine beliebige Funktion ausschließen. Wir wollen nachweisen, daß *jedes $B$-System minimal ist, und umgekehrt.*

Ist (1) ein $B$-System, so muß $\varphi_n^{11}$ begrenzt sein. Infolge der Bedingung (8) gehört also $\varphi_1(x)$ nicht zu dem Raume des Systems $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$. Die entsprechende Eigenschaft besitzt auch jedes $\varphi_i(x)$, da es als erste Funktion des $B$-Systems $\varphi_i(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{i-1}(x), \varphi_{i+1}(x), \ldots$ betrachtet werden kann.

Ist (1) minimal, so gehört $\varphi_1(x)$ nicht zu dem Raume des Systems $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$; infolge (8) ist $\varphi_n^{11}$ beschränkt. Also (Satz 4) existiert die adjungierte Funktion $\varphi^1(x)$.

Es ist bekannt, daß *in einem Orthogonalsystem die Koeffizienten der besten Approximation $a_n^k(f)$ für jede Funktion $f(x)$* mit ihren Komponenten $A_k(f)$ zusammenfallen und daß sie folglich *von $n$ nicht abhängen. Umgekehrt: Besitzt das System diese Eigenschaft, so ist es orthogonal.* Dieser Satz läßt sich für $B$-Systeme leicht verallgemeinern.

Satz 5. *Damit* (1) *ein $B$-System ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten der besten Approximation $a_n^i(f)$ für jedes $f(x)$ aus $L$ mit $n\to\infty$ gegen endliche Grenzwerte $A^i(f)$ streben.*

Beweis. 1. Die Bedingung ist notwendig. Es sei (1) ein $B$-System, $\{\varphi^i(x)\}$ sein adjungiertes System, $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $L$. Man setze

$$A^i(f)=\int f(x)\varphi^i(x)\,dx.$$

---

[16]) Da für $\varphi^i(x)$ $\quad a_n^k(\varphi^i)=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_n^{k\alpha}\delta_\alpha^i=\varphi_n^{ik}$.

Wir erhalten nach (4)

$$a_n^i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \varphi_n^{i\alpha} = \int f(x) \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_n^{i\alpha} \varphi_\alpha(x)\, dx = \int f(x) \varphi_n^i(x)\, dx,$$

daher ist

$$(A^i - a_n^i)^2 = \left\{\int f(x)[\varphi^i(x) - \varphi_n^i(x)]\, dx\right\}^2$$
$$\leqq \int [f(x)]^2 dx \cdot \int [\varphi^i(x) - \varphi_n^i(x)]^2 dx.$$

Da die Funktionen $\{\varphi_n^i(x)\}$ für $n \to \infty$ im Mittel gegen $\varphi^i(x)$ konvergieren, so gilt

$$a_n^i(f) \to A^i(f)$$

für $n \to \infty$ und sogar gleichmäßig in bezug auf die Gesamtheit aller Funktionen $\{f(x)\}$, welche gleiche Normen besitzen.

2. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei angenommen, daß für jedes $f(x)$ aus $L$ und jedes $i$

$$a_n^i(f) \to A^i(f)$$

gilt. Wäre unsere Behauptung falsch, so (Satz 4) würde $\varphi_n^{ii}$ mindestens für ein $i$ über alle Grenzen wachsen:

$$\varphi_n^{ii} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

und wir könnten die Zahlen

$$i \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

derart nacheinander bestimmen, daß

$$\varphi_{n_k}^{ii} - \varphi_{n_{k-1}}^{ii} \geqq 2^k \quad (k = 1, 2, \ldots); \quad (\varphi_{n_0}^{ij} = 0).$$

Wir setzen

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{n_k}^{ii} - \varphi_{n_{k-1}}^{ii}}} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n_k} \varphi_{n_k}^{i\alpha} \varphi_\alpha(x) - \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \varphi_{n_{k-1}}^{i\beta} \varphi_\beta(x)\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ bilden ein orthogonales und normiertes System. In der Tat ist

$$\int f_k(x) f_l(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\varphi_{n_k}^{ii} - \varphi_{n_{k-1}}^{ii}\right]\left[\varphi_{n_l}^{ii} - \varphi_{n_{l-1}}^{ii}\right]}} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\beta=1}^{n_l} \varphi_{n_k}^{i\alpha} \varphi_{n_l}^{i\beta} \varphi_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha=1}^{n_k} \sum_{\delta=1}^{n_{l-1}} \varphi_{n_k}^{i\alpha} \varphi_{n_{l-1}}^{i\delta} \varphi_{\alpha\delta}\right.$$
$$\left. - \sum_{\gamma=1}^{n_{k-1}} \sum_{\beta=1}^{n_l} \varphi_{n_{k-1}}^{i\gamma} \varphi_{n_l}^{i\beta} \varphi_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n_{k-1}} \sum_{\delta=1}^{n_{l-1}} \varphi_{n_{k-1}}^{i\gamma} \varphi_{n_{l-1}}^{i\delta} \varphi_{\gamma\delta}\right].$$

Da aber in bezug auf (2) für $p \geqq q$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{q} \varphi_p^{i\alpha} \varphi_q^{i\beta} \varphi_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{q} \varphi_q^{i\beta} \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi_p^{i\alpha} \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_q^{ii}$$

gilt, so ist für $l > k$

$$\int f_k(x) f_l(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{[\varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_{k-1}}][\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}]}} \cdot [\varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_{k-1}} + \varphi^{ii}_{n_{k-1}}] = 0$$

und für $l = k$

$$\int [f_k(x)]^2\,dx = \frac{1}{[\varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_{k-1}}]} \cdot [\varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_{k-1}} - \varphi^{ii}_{n_{k-1}} + \varphi^{ii}_{n_{k-1}}] = 1.$$

Daraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^\beta}} f_\beta(x)$$

wegen der Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten eine Fouriersche ist und im Mittel gegen eine Funktion $f(x)$ aus $L$ konvergiert. Für diese wird

$$a^i_{n_k} = \int f_l(x)\,\varphi^i_{n_k}(x)\,dx = \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^\beta}} \int f_\beta(x)\,\varphi^i_{n_k}(x)\,dx = \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^\beta}} \cdot J_\beta,$$

wo

$$J_l = \int f_l(x) \sum_{\alpha=1}^{n_k} \varphi^{i\alpha}_{n_k} \varphi_\alpha(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}}} \left[ \sum_{\gamma=1}^{n_l} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \varphi^{i\gamma}_{n_l} \varphi^{i\alpha}_{n_k} \varphi_{\gamma\alpha} - \sum_{\delta=1}^{n_{l-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \varphi^{i\delta}_{n_{l-1}} \varphi^{i\alpha}_{n_k} \varphi_{\delta\alpha} \right].$$

Für $l > k$ ist also

$$J_l = \frac{1}{\sqrt{\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}}} \cdot [\varphi^{ii}_{n_k} - \varphi^{ii}_{n_k}] = 0,$$

und für $l \leqq k$

$$J_l = \frac{1}{\sqrt{\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}}} [\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}] = \sqrt{\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}}.$$

Die Wahl der Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ bedingt, daß für $l \leqq k$

$$\frac{1}{\sqrt{2^l}} \cdot J_l = \sqrt{\frac{\varphi^{ii}_{n_l} - \varphi^{ii}_{n_{l-1}}}{2^l}} > 1$$

und demzufolge

$$a^i_{n_k}(f) = \sum_{\beta=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2^\beta}} J_\beta > k$$

wird, was der Annahme, daß $a^i_n$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt, widerspricht[17]).

[17]) Der zweite Teil des Satzes 5 entspricht folgendem wohlbekannten Satze aus der Hilbertschen Theorie der Linearformen: „*Konvergiert die Reihe* $\sum_{\alpha=1}^{\infty} l_\alpha x^\alpha$ *jedesmal, wenn* $\sum_{\alpha=1}^{\infty} (x^\alpha)^2$ *konvergiert, so konvergiert auch die Reihe* $\sum_{\alpha=1}^{\infty} l_\alpha^2$.“

Folgerung. Da $a_n^i(\varphi^j) = \varphi_n^{ji}$ ist, so müssen *für ein B-System die Größen* $\varphi_n^{ji}$ *gegen endliche Grenzwerte streben:*

$$\varphi_n^{ji} \to \varphi^{ji} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die Matrix $\|\varphi^{ij}\|$ ist die Grundmatrix des adjungierten Systems, da wegen $\varphi^{ij} = A^i(\varphi^j) = \int \varphi^i(x)\,\varphi^j(x)\,dx$.

Da das adjungierte System zu dem Raume $R\{\varphi_i\}$ gehört, so enthält $R\{\varphi_i\}$ den Raum $R\{\varphi^i\}$.

*Damit die beiden Räume zusammenfallen, ist notwendig und hinreichend, daß für alle i*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{ii}^n = \varphi_{ii} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

In der Tat, diese Bedingung ist nichts anderes, als die Parsevalsche Gleichung (7) für $\varphi_i(x)$ in dem System $\{\varphi^i(x)\}$.

Sind diese Gleichungen erfüllt, so gelten auch die Gleichungan

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{ij}^n = \varphi_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots$$

Die beiden Matrizen und die beiden Funktionensysteme sind gleichberechtigt. In der Gesamtheit aller $B$-Systeme spielen derartige Systeme eine besondere Rolle.

Für jedes $f(x)$ können zwei Reihen rein formal konstruiert werden die „erste" biorthogonale Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

und die „zweite" biorthogonale Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \varphi^\alpha(x).$$

Diese Reihen stellen die unmittelbare Verallgemeinerung von orthogonalen Reihen dar, da

$$A^i = \lim_{n\to\infty} a_n^i$$

ist, während für orthogonale Reihen

$$A^i = a_n^i$$

gilt. Die Frage über die Konvergenz im Mittel dieser Reihen ist aber viel schwerer zu beantworten als im Falle der orthogonalen Reihen.

*Damit eine biorthogonale Reihe im Mittel konvergiert, ist die Ungleichung*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^\alpha A_\alpha \leqq \int [f(x)]^2\,dx \tag{11}$$

*notwendig.*

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend (siehe § 4). Jedenfalls existieren sowohl biorthogonale Systeme, für welche im Mittel alle biorthogonalen Reihen konvergieren, als auch solche, für welche eine derartige Konvergenz nicht immer stattfindet.

*Sollen in einem B-System alle biorthogonalen Reihen im Mittel konvergent sein, so müssen die beiden Matrizen* $\|\varphi_{ij}\|$ *und* $\|\varphi^{ij}\|$ *den Bedingungen*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{i\alpha}\varphi^{j\alpha} = \delta_i^j \qquad (i,j=1,2,\ldots) \tag{12}$$

*genügen.*

## § 4.

## Beispiele.

### 1. Ein quadratisch dichtes System.

*Die Matrix*

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{b^{i+j-1}-1}, \qquad b>1 \qquad (i,j=1,2,\ldots)$$

*ist die Grundmatrix eines quadratisch dichten Systems.*

Beweis. Es sei $r_1 < r_2 < \ldots$ eine beliebige Teilfolge von $1, 2, \ldots$. Nach Satz 2 ist

$$\psi_{ij} = \frac{1}{b^{r_i+r_j-1}-1}.$$

Multipliziert man die erste Spalte der Determinante

$$\Delta^n = |\psi_{ij}|^{(n)}$$

mit $\frac{b^{2r_1}-1}{b^{r_1+r_j-1}-1}$ und subtrahiert das Produkt von der $j$-ten Spalte, so folgt

$$\Delta^n = \begin{vmatrix} \frac{1}{b^{2r_1-1}-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{b^{r_2+r_1-1}-1} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{1}{b^{r_n+r_1-1}-1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$a_{ij} = \frac{(b^{r_i}-b^{r_1})(b^{r_j}-b^{r_1})}{b(b^{r_1+r_i-1}-1)(b^{r_1+r_j-1}-1)(b^{r_i+r_j-1}-1)} \qquad (i,j=2,3,\ldots,n);$$

folglich gilt

$$\Delta^n = \frac{1}{b^{n-1}(b^{2r_1-1}-1)} \cdot \left[\prod_{\alpha=2}^{n} \frac{b^{r_\alpha}-b^{r_1}}{b^{r_1+r_\alpha-1}-1}\right]^2 \cdot \Delta_n^{11}$$

mit

$$\Delta_n^{11} = \begin{vmatrix} \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß alle Matrizen $\|\psi_{ij}\|$ positiv sind. Nun ist

$$\psi_n^{11} = \frac{\Delta_n^{11}}{\Delta^n} = b^{n-1}(b^{2r_1-1}-1)\cdot\left[\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{b^{r_1+r_\alpha-1}-1}{b^{r_\alpha}-b^{r_1}}\right]^2,$$

also wegen $r_1 \geqq 1$

$$\frac{b^{r_1+r_k-1}-1}{b^{r_k}-b^{r_1}} > \frac{b^{r_1+r_k-1}-b^{r_1}}{b^{r_k}-b^{r_1}} \geqq 1$$

und

$$\psi_n^{11} > b^{n-1}(b^{2r_1-1}-1) \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nach Satz 1 kann man unendlich viele quadratisch dichte Systeme konstruieren, welche die Matrix $\|\varphi_{ij}\|$ besitzen. Die Koeffizienten der Transformation (9) sind in unserem Falle leicht zu berechnen:

$$d_n^i = \frac{(-1)^{n-i-1}\, b^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}}{(b^{n-i}-1)} \cdot \prod_{\alpha=0}^{n-i-1}\frac{(b^{i+\alpha}-1)^2}{b^{n+i-1+\alpha}-1}, \qquad l_n = \pm\sqrt{\frac{b^{(n-1)^2}}{b^{2n-1}-1}} \cdot \prod_{\alpha=0}^{n-2}\frac{b^{1+\alpha}-1}{b^{n+\alpha}-1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots).$$

## 2. Ein $B$-System.

Die Matrix $\|\varphi_{ij}\|$, wo

$$\varphi_{ij} = b \quad \text{für} \quad i \neq j; \qquad \varphi_{ii} = 1; \qquad 0 < b < 1,$$

ist symmetrisch und positiv, da $D^n = (1-b)^{n-1}\cdot(1+\overline{n-1}\,b) > 0$. Folglich (Satz 1) existieren Systeme $\{\varphi_i(x)\}$, welche unsere Grundmatrix $\|\varphi_{ij}\|$ besitzen. Es ist leicht zu zeigen, daß

$$\varphi_n^{ii} = \frac{1}{1-b}\left[1 - \frac{b}{1+\overline{n-1}\,b}\right]; \qquad \varphi_n^{ij} = -\frac{b}{(1-b)(1+\overline{n-1}\,b)} \qquad (i \neq j),$$

mithin

$$\varphi^{ii} = \lim_{n\to\infty}\varphi_n^{ii} = \frac{1}{1-b}; \qquad \varphi^{ij} = \lim_{n\to\infty}\varphi_n^{ij} = 0.$$

$\varphi_i(x)\}$ *ist also* (Satz 4) *ein $B$-System. Das adjungierte System* $\{\varphi^i(x)\}$ *ist orthogonal und gleichmäßig normiert.* Es besitzt einen Raum, der wesentlich kleiner als $R\{\varphi_i\}$ ist, da

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{ii}^n = 1 - b + \varphi_{ii}.$$

Wegen der Orthogonalität des Systems $\{\varphi^i(x)\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \varphi^\alpha(x)$$

im Mittel gegen eine Funktion $f_1(x)$, welche die Komponenten $A^i = \frac{1}{(1-b)\cdot i}$ hat. *Die „erste" biorthogonale Reihe für $f_1(x)$ konvergiert aber im Mittel nicht.* Dafür, daß eine Reihe

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

im Mittel konvergiere, ist notwendig (und hinreichend), daß

$$K_n = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A^\alpha A^\beta \varphi_{\alpha\beta} \to K < \infty$$

für $n \to \infty$. In unserem Falle ist dagegen

$$K_n = \frac{1}{(1-b)^2} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \varphi_{\alpha\beta} > \frac{1}{(1-b)^2} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\alpha}\right]^2 \to \infty,$$

da die Reihe $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}$ divergiert. Wegen

$$A_i(f_1) = \int \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \varphi^\alpha(x)\, \varphi_i(x)\, dx = \frac{1}{i}$$

gilt

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^\alpha A_\alpha = \frac{1}{1-b} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} = \int [f_1(x)]^2 dx.$$

Die Bedingung (11) ist also erfüllt. *Wir sehen, daß sie nicht hinreichend ist. Es existieren Funktionen, für welche* (11) *gar nicht erfüllt ist.* Das Komponentensystem $B_1 = B_2 = \ldots = 1$ ist ein zulässiges für den Raum $R\{\varphi_i\}$, da

$$g_n(1, 1, \ldots, 1) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{1}{1-b}\left[\delta_\alpha^\beta - \frac{b}{1+n-1\,b}\right] = \frac{1}{\frac{1-b}{n} + b} \to \frac{1}{b}$$

(Fischer-Rieszscher Satz).

Im Raume $R\{\varphi_i\}$ existiert also eine Funktion $f_2(x)$, die die Komponenten $B_i = 1$ besitzt. Sie ist zu allen $\varphi^i(x)$ orthogonal:

$$B^i = \lim_{n\to\infty} a_n^i(f_2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha \varphi_n^{i\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n-1\,b} = 0.$$

Wir setzen

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

dann haben wir

$$A^i(F) = A^i + B^i = \frac{1}{(1-b)i}; \qquad A_i(F) = A_i + B_i = \frac{1}{i} + 1,$$

mithin

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^\alpha(F) \cdot A_\alpha(F) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-b} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-b} \cdot \frac{1}{\alpha} = \infty.$$

Für $F(x)$ ist also (11) ungültig.

### 3. Ein $B$-System.

Die Matrix $\| \varphi_{ij} \|$, wo

$$\varphi_{ij} = b^{i+j-2} \quad (i \neq j); \qquad \varphi_{ii} = 1; \qquad 0 < b < 1,$$

ist positiv, da $D^{n+1} = (1-b^2)(1-b^4)\dots(1-b^{2n}) > 0$. Alle zu ihr gehörenden Systeme sind $B$-Systeme: für $i > 0$ haben wir

$$\varphi_{n+1}^{i+1\,i+1} = \frac{1}{1-b^{2i}} = \varphi^{i+1\,i+1}$$

und für $i = 0$

$$\varphi_{n+1}^{11} = \frac{1}{1-b^2} + \sum_{\alpha+2}^{n-1} \frac{b^{2\alpha}}{1-b^{2\alpha}} < \left[\frac{1}{1-b^2}\right]^2,$$

mithin

$$\varphi^{11} = \varphi_{n+1}^{11} + r_{n+1}; \qquad r_n \to 0 \text{ mit } \frac{1}{n}.$$

Wir haben ferner

$$\varphi_{n+1}^{1j+1} = -\frac{b^j}{1-b^{2j}} = \varphi^{1j+1} \quad (j > 0); \qquad \varphi_{n+1}^{i+1,\,j+1} = 0 = \varphi^{i+1,\,j+1} \quad (i, j > 0).$$

Das einzige Element, welches von $n$ abhängt, ist also $\varphi_n^{11}$.

Die Räume $R\{\varphi_i\}$ und $R\{\varphi^i\}$ fallen zusammen, da

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{ii}^n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{b^{2(n-1)} r_{n+1}}{1 + r_{n+1}}\right] = 1.$$

Die beiden Matrizen $\| \varphi_{ij} \|$ und $\| \varphi^{ij} \|$ genügen der Bedingung (12).

*Wir wollen jetzt nachweisen, daß jede biorthogonale Reihe in $R\{\varphi_i\}$ im Mittel konvergent ist.*

Für ein beliebiges $f(x)$ gilt

$$A^{i+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^{i+1} = a_{n+1}^{i+1} \quad (i > 0),$$ da diese Größe von $n$ nicht abhängt;

$$A^1 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^1 = a_{n+1}^1 - \sum_{\alpha=n+1}^{\infty} \frac{b^\alpha}{1-b^{2\alpha}} A_{\alpha+1} + r_{n+1} A_1 = a_{n+1}^1 + r_{n+1} A_1 - \varrho_{n+1},$$

wo

$$r_{n+1} A_1 - \varrho_{n+1} \to 0.$$

Nun haben wir

$$K_{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} A^\alpha A^\beta \varphi_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} a_{n+1}^\alpha a_{n+1}^\beta \varphi_{\alpha\beta} + 2(r_{n+1}A_1 - \varrho_{n+1}) \sum_{\alpha=1}^{n+1} a_{n+1}^\alpha \varphi_{1\alpha} + (r_{n+1}A_1 - \varrho_{n+1})^2$$

und [vgl. (6) und (3)]

$$K_{n+1} = G_{n+1} + 2(r_{n+1}A_1 - \varrho_{n+1})A_1 + (r_{n+1}A_1 - \varrho_{n+1})^2.$$

Da $G_{n+1}$ gegen $G \leqq \int [f(x)]^2 dx$ konvergiert, so ist $K_n \to G$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 20. Oktober 1929.)

# Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik.

Von

Robert Furch in Rostock.

## Einleitung.

Im euklidischen $R_3$ oder in einem Teil desselben sprechen wir von zwei Metriken $M_i$ bzw. $M_g$, wenn dort zwei unabhängige, relativ krummflächige, kartesische Koordinatensysteme (oder Teile davon) vorgegeben sind, welche die Punkte des Raums durch die Wertetripel $(x, y, z)$ bzw. $(\xi, \eta, \zeta)$ eineindeutig stetig erfassen. Vergleicht man diese Metriken, indem man die relative Lage ihrer einfachsten Gebilde untersucht — indem man z. B. innerhalb einer Kugel der einen Metrik eine stückweise ebene Elementarfläche der anderen Metrik sucht, deren Rand als unverknotetes Polygon dieser andern Metrik vorgelegt ist —, so ergeben sich gegenüber dem Zweidimensionalen ganz erhebliche Schwierigkeiten, weil das Analogon fehlt zu der Polygonapproximation abgeschlossener Mengen, die durch Runge eine klassische Form gefunden hat (Verwendung der Quadratteilung)[1].

Die Behandlung der Verhältnisse im $R_3$ soll in vorliegender Arbeit so gegeben werden, daß eine Gliederung in Grundoperationen die charakteristischen Schwierigkeiten voneinander abhebt. Ganz wesentlich sind hierbei die Ergebnisse einer vorangegangenen Arbeit des Verfassers „Über den Schnitt zweier Sphären im $R_3$“[2], zitiert als „S. S.“ — Der am Ende der vorliegenden Arbeit (s. V) beweisbare „Schalensatz“ gab den Anstoß zu diesen Betrachtungen, weil es von ihm ein kleiner Schritt ist[3] zum Haupt

[1]) S. etwa v. Kerékjártó, Topologie I (1923), S. 49.

[2]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 556—566. Zur Berichtigung sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß dort auf S. 563, Zeile 2 v. o. zwischen dem Worte das und dem Buchstaben $\mathfrak{R}$ folgender Satzteil fehlt: [zu $\mathfrak{R}$ fremd ist und innerhalb $\mathfrak{Q}$ entsteht durch polygonale Verbindung mehrerer Polygone, deren jedes]. Außerdem muß es Zeile 3 v. o. statt scheidet heißen schneidet.

[3]) R. Furch, „Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie“, Hamb. Abh. (1923), S. 69—88. Die ausführliche Begründung des Hauptsatzes entsprechend jenen Angaben und mit Hilfe der jetzt bereitgestellten Grundoperationen ist ohne grundsätzliche Schwierigkeit möglich und wird folgen, voraussichtlich in Gestalt einer Rostocker Dissertation.

satz der dreidimensionalen Topologie. Die Frage, ob zwei im Sinn der Abbildung homöomorphe Zellmannigfaltigkeiten eine solche Zellzerlegung zulassen, daß ein gemeinsames Schema in beiden Mannigfaltigkeiten entsteht, habe ich früher[3]) unter Zugrundelegung dieses Schalensatzes behandelt, dessen Beweis ich mir vorbehalten mußte[3a]). Ich hoffe jedoch, daß dieser Zusammenhang nicht die einzige Rechtfertigung für die vorliegenden, einigermaßen systematischen Bemühungen und für den Schalensatz sein werde.

Beim Schalensatz handelt es sich um die unserer Anschauung einleuchtende Aussage, daß eine Sphäre $\Sigma^2$, die im Innern einer Sphäre $S^2$ des $R_3$ liegt, zusammen mit $S^2$ einen Raumteil begrenzt, der *einschließlich* der Ränder abbildungshomöomorph ist zu dem Raumteil zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen gleicher Metrik — vorausgesetzt, daß die räumliche Halbumgebung im Zwischenraum um einen jeden seiner Randpunkte elementar ist. Eine unwesentliche Verschärfung dieser Voraussetzung führt zu dem genannten Satz in V. — Betrachtet man den Zwischenraum einschließlich nur *einer* Randsphäre, so folgt die Homöomorphie zur Menge $1 \leqq x^2 + y^2 + z^2 < 2$ leicht aus „S. S.“, weil eine Bedeckung des Zwischenraumes mit einer unendlichen Folge von Schalen möglich ist (vgl. den Satz in II, 4, 3 und den Satz IVb in „S. S.“).

## I. Erklärungen.

I 1. Das im Sinn der Abbildungshomöomorphie zu verstehende Wort *elementar* (Elementarraum, Elementarfläche, Elementarlinie) verwenden wir sowohl für die abgeschlossenen wie für die offenen Punktgebilde; nehmen wir den Rand mit hinzu, so verwenden wir meist die Bezeichnung $\mathfrak{A}^i$, lassen wir ihn weg, so schreiben wir meist $\mathfrak{E}^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Meist mit $\mathfrak{S}^i$ bezeichnen wir die $i$-dimensionale Sphäre, welche bei $i = 0$ ein Punktepaar wird. $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}^0$ ist ein einzelner Punkt. — Das topologische Bild der Punktmenge $\left\{ \begin{matrix} 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}$ nennen wir einen *Ringstreifen*, das von $\left\{ \begin{matrix} 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2 \\ z^2 \leqq 1 \end{matrix} \right\}$ einen *Raumring*, das von $1 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2$ eine *sphärische Schale*.

I 2. Zugrunde gelegt wird der euklidische $R_3$. Ein Gebilde ist *polyedral* im Sinn einer Metrik (wir verwenden die zwei in der Einleitung erwähnten Metriken $M_l$ und $M_g$), wenn es aus endlich vielen Facetten, d. h. polygonal berandeten ebenen Stücken, besteht. Polyedrale Gebilde, des-

[3a]) Irrtümliche Überlieferung hatte den Beweis als von anderer Seite erbracht bezeichnet.

gleichen räumliche Polygone und polyedral berandete Raumstücke bezeichnen wir mit *lateinischen bzw. griechischen Lettern*, je nachdem die Metrik $M$ bzw. $M_g$ zugrunde gelegt ist. Wir sprechen dann allgemein von $M_l$- bzw. $M_g$-Gebilden. $A^i$ bzw. $\mathsf{A}^i$, $E^i$ bzw. $\mathsf{E}^i$, $S^i$ bzw. $\Sigma^i$ sind dementsprechend spezialisierte $\mathfrak{A}^i$, $\mathfrak{E}^i$, $\mathfrak{S}^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Diese Buchstaben werden nie in anderem Sinne verwendet.

Inwiefern diese $M_l$- bzw. $M_g$-Gebilde ihre Eigenschaften mit allgemeineren Gebilden teilen, soll hier nicht erörtert werden. Krummflächige Facetten verwenden wir nur bei *Modellen* zum Zweck der bequemen Beschreibung von polyedralen Gebilden. Diese Modelle sind aufzufassen als symbolische Darstellungen von topologisch gleichwertigen $M_l$-Gebilden mit einer bestimmten jedesmal hervorgehobenen Zerlegung durch Flächenstücke, Linien, Punkte (dagegen ist ohne Interesse die Gliederung durch die jeweils zur Realisierung benutzten Facetten).

I 3. Unter einem Zellen-*Komplex* verstehen wir die Gesamtheit von endlich vielen Zellen, d. h. offenen Elementargebilden $\mathfrak{E}^i$ und Punkten $\mathfrak{E}^0$, so daß je zwei $\mathfrak{E}$ zueinander fremd sind und daß der Rand eines jeden $\mathfrak{E}$ mit zum Komplex gehört. Entsteht aus jedem $\mathfrak{E}^i$ durch Hinzunahme seines Randes ein abgeschlossenes Elementargebilde $\mathfrak{A}^i$, so haben wir einen *Komplex im engeren Sinn*; dadurch werden also z. B. „Selbstberührungen" des $\mathfrak{E}^i$ ausgeschlossen. Ein stetiges eindeutiges, aber nicht eineindeutiges Bild eines Komplexes nennen wir einen *Komplex mit Singularitäten*.

Sind die eindimensionalen Zellen polygonal, die zweidimensionalen polyedral im Sinne von $M_g$ bzw. $M_l$, so reden wir von einem *$M_g$- bzw. $M_l$-Komplex* $\mathsf{K}$ bzw. $K$.

I 4. *$U$-Umgebungen.* Bei kombinatorischen Gebilden ist es bequem[4]), als Umgebungen *abgeschlossene* Raumstücke zu wählen. — Unsere *$U$-Umgebungen* werden stets im Sinn von $M_l$ polyedral berandet sein. Als $U(\mathfrak{E}^i)$ *einer Zelle* $\mathfrak{E}^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ wählen wir einen Elementarraum $A^3$, welcher $\mathfrak{E}^i$ und den Rand von $\mathfrak{E}^i$ in seinem Innern enthält. Die ungegliederte Vereinigung der $U(\mathfrak{E}^i)$ aller Zellen $\mathfrak{E}^i$ eines Komplexes $\mathfrak{K}$ engeren Sinnes nennen wir dann eine *$U$-Umgebung $U(\mathfrak{K})$ des Komplexes $\mathfrak{K}$ engeren Sinnes*, wenn die $U(\mathfrak{E}^i)$ ein System folgender Art bilden:

1. Die Umgebungen von zwei Zellen haben die Umgebungen der gemeinsamen — echten oder unechten — Randzellen gemein und sonst nichts. Dabei verstehen wir unter der unechten Randzelle einer Zelle die Zelle selbst.

2. Die Wegnahme der Umgebungen aller (echten) Randzellen einer Zelle $\mathfrak{E}^i$ aus $U(\mathfrak{E}^i)$ läßt einen Raum übrig, dessen abgeschlossene Hülle

[4]) Der Sprechweise halber.

lementar ist. Wir nennen diese Hülle die *Rumpfumgebung* $U^*(\mathfrak{E}^i)$. — Die Möglichkeit dieser Festsetzungen, sowie ihre kombinatorische Bedeutung wird hier nicht erörtert. Die jeweils behandelten besonderen Fälle lassen alles Wünschenswerte erkennen. Vgl. übrigens I 5 und die Anm. [7a]).

Als *U-Umgebungskomplex* eines solchen Umgebungssystems erklären wir einen Komplex (engeren Sinns), dessen dreidimensionale Zellen die offenen Kerne der $U^*(\mathfrak{E}^i)$ sind, dessen andere Zellen dem Rand dieser $U^*(\mathfrak{E}^i)$ angehören [5]).

Diese Erklärungen bei Komplexen engeren Sinnes können ausgedehnt werden auf solche *Gebilde* $\mathfrak{G}$, *die zu einem Komplex engeren Sinnes* $\mathfrak{K}$ *gemacht werden können* durch Einzeichnen bzw. Vervollständigen eines Schemas in $\mathfrak{G}$, also z. B. auf alle polyedralen Gebilde. Zeichnen wir nämlich in das Gebilde $\mathfrak{G}$ eine Komplexzerlegung engeren Sinnes, bzw. vervollständigen wir die zu Anfang vorgelegte Teilung von $\mathfrak{G}$, so daß der Komplex engeren Sinnes $\mathfrak{K}$ entsteht, so erklären wir die (wieder unge-gliederte) *U-Umgebung* $U(\mathfrak{G})$ *von* $\mathfrak{G}$ durch $U(\mathfrak{G}) = U(\mathfrak{K})$. Auch zum Umgebungskomplex finden wir dann ein Analogon durch folgende *gegliederte U-Umgebung von* $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G}$ ist durch gewisse vorgegebene Flächen, Linien, Punkte in Bestandteile zerlegt [6]), welchen wir in $U(\mathfrak{G})$ Teilumgebungen zuordnen können, indem wir die Umgebungen aller Zellen von $\mathfrak{K}$, welche zu dem betreffenden $\mathfrak{G}$-Bestandteil gehören, zusammenfassen. Diese Teilumgebungen entsprechen dann den Zellumgebungen bei Komplexen engeren Sinnes.

Auf solche Weise erhalten wir z. B. als *Umgebung der Sphären* $\mathfrak{S}^1$ bzw. $\mathfrak{S}^2$ — auch wenn sie nicht das Schema eines Komplexes im engeren Sinne tragen — einen Raumring $U(\mathfrak{S}^1)$ bzw. eine sphärische Schale $U(\mathfrak{S}^2)$, deren Innerem $\mathfrak{S}^1$ bzw. $\mathfrak{S}^2$ in spezieller Weise eingelagert sind, z. B. ist dort $\mathfrak{S}^1$ nicht nullhomotop, d. h. ist dort *irreduzibel*. Kann ein Raumring wie $U(\mathfrak{S}^1)$ einer gegebenen $\mathfrak{S}^1$ betrachtet werden, so sagen wir, $\mathfrak{S}^1$ sei ein *einmaliger Umlauf im Raumring* [7]). Wir sprechen auch von dem ein-

---

[5]) Wir wollen *nicht* fordern, daß $\mathfrak{K}$ Grenzmenge einer stetigen Schar von Umgebungskomplexen sei, so daß diese Schar vom gegebenen Umgebungskomplex ihren Ausgang nimmt und daß bei ihr das $U(\mathfrak{E}^i)$ einer „späteren" Lage stets in dem $U(\mathfrak{E}^i)$ derselben Zelle $\mathfrak{E}^i$] einer „früheren" Lage enthalten ist. Hierdurch würde z. B. verhieden, daß $\mathfrak{E}^1$ verknotet zwischen den Umgebungen der zwei Eckpunkte liegt. Es ist natürlicher, diese Zusatzforderung durch die Einlagerung der Komplexe $\mathfrak{K}$ in umfassendere zu erledigen, vgl. Anm. [7]).

[6]) Von welchen wir allerdings annehmen müssen, daß sie nicht mehr singulär sind.

[7]) I. a. sind zwei Sphären $\mathfrak{S}^1$ mit gleicher $U$-Umgebung in dieser zwar homotop, aber nicht isotop zueinander. In unseren Anwendungen kommt die Isotopie und Unverknotetheit in $U(\mathfrak{S}^1)$ z. B. durch die Einbeziehung von $\mathfrak{S}^1$ in einen sphärischen Komplex von selbst hinzu.

maligen Umlauf einer $\mathfrak{S}^1$ *in einem Ringstreifen* sowie eines Ringstreifen in einem Raumring.

I 5. *Y- und* $\Upsilon$*-Umgebungen.* Was wir soeben als räumliche Um gebungen formulierten, läßt sich selbstredend auch auf Flächen analo erklären. Wir fügen aber einige Forderungen zu. a) Wir beschränken un auf zweidimensionale $M_l$- bzw. $M_g$-Komplexe. Die Grenze der Flächen umgebungen auf diesen Komplexen soll dann polygonal im Sinne von $M$ bzw. $M_g$ sein; wir nennen diese Umgebungen der Zellen dann $Y(E^i)$ bzw $\Upsilon(\mathsf{E}^i)$ $(i = 0, 1, 2)$, wenn b) die *Rumpfumgebungen* $Y^*(E^i)$ bzw. $\Upsilon^*(\mathsf{E}$ zweier verschiedener Zellen *fremd* sind *bei gleicher Dimensionszahl* $i$.[7a]

I 6. *Gleichmäßige Approximation* (*gl. Appr.*). In der $U$-Umgebun $U(K)$ eines Komplexes engeren Sinnes $K$ wollen wir einen $M_g$-Komplex konstruieren, für welchen der Umgebungskomplex von $K$ ebenfalls Um gebungskomplex ist, und zwar derart, daß eine zu $\mathsf{K}$ gehörige „Bildzelle" $\mathsf{E}$ in der $U$-Umgebung einer zugehörigen „Originalzelle" $E^i$ [8]) verbleibt. Wi wollen diese Operation und gelegentlich auch ihr Ergebnis $\mathsf{K}$ als gleich mäßige Approximation von $K$ bezeichnen, was sich sofort wieder auf al gemeinere $M_l$-Gebilde $G$ ausdehnen läßt, wenn diese eine gegliedert $U$-Umgebung besitzen (vgl. Anm. [6])). Das neue $M_g$-Gebilde $\Gamma$ soll als u. a. derart liegen, daß diese gegliederte $U$-Umgebung auch als zu $\Gamma$ ge hörig betrachtet werden kann.

Bei der Ausführung dieser gl. Appr. ist folgendes Vorkommnis wichtig Ein Teilgebilde $\mathfrak{T}$ eines Gebildes $\mathfrak{G}$ enthalte seinerseits das Teilgebilde $\mathfrak{T}$ für welches zwei $U$-Umgebungen $U(\mathfrak{T}')$ und $\bar{U}(\mathfrak{T}')$ so vorgelegt sind daß $\bar{U}(\mathfrak{T}') \prec U(\mathfrak{T}')$ gilt. Wir sagen, daß $\mathfrak{T}$ hinsichtlich $\mathfrak{T}'$ in bezug au die zwei Umgebungen den *Absorptionscharakter* habe, wenn $\mathfrak{T}$ alle zu $\bar{U}(\mathfrak{T}'$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{G}$ enthält und dabei selbst ganz in $U(\mathfrak{T}')$ verbleib

## II. Hilfskonstruktionen.

Eine Reihe von einfachen, jedoch teilweise umständlich zu charak terisierenden Operationen sollen in diesem Kapitel zur Verfügung gestell werden.

### A. Operationen an Gebilden derselben Metrik.

II 1. *Ein Satz über Streckenkomplexe.* Auf einem Ringstreifen lieg ein geschlossenes, irreduzibles Polygon $P^1$ mit Selbstüberkreuzung. Dan

---

[7a]) Ein Flächenkomplex dieser Art kann aufgefaßt werden als Dualkomplex z der ersten regulären Unterteilung des Ausgangskomplexes.

[8]) Über die Folgen hiervon vgl. Anm. [7]).

ibt es auf $P^1$ auch ein den Ring einmal umlaufendes, *einfaches*[9]) Polygon, elches *von einer* auf $P^1$ vorgegebenen *Elementarlinie* $E^1$ *höchstens eine* zusammenhängende) Teilelementarlinie $E_0^1$ enthält.

Der höchst einfache Beweis zerlegt $P^1$ in eine Reihe von einfachen eschlossenen Polygonen, welche die letztgenannte Eigenschaft haben. Wären alle diese Polygone reduzibel, so auch $P^1$. Mehr als einmal kann in einfaches Polygon nicht umlaufen.

II 2. *Dehnsches Lemma*[10]). Die für die Hilfskonstruktionen grundegende Operation ist die *Einspannung einer Elementarfläche in eine olygonale Sphäre* $S^1$, wenn $S^1$ ein eindeutig-stetiges, polyedrales Bild iner Elementarfläche *ohne Singularitäten am Rande* bereits begrenzt. Dies ist der Inhalt des Dehnschen Lemmas. — Daraus ergibt sich gemäß S. S."[11]) die „$M_l$-*Approximation*" des eindeutig-stetigen Bildes $\mathfrak{B}$ einer weidimensionalen Sphäre, d. h. die Gewinnung einer $M_l$-Sphäre $S^2$, welche urch gewisse Abänderungen in beliebig kleiner Umgebung von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}$ ervorgeht und dabei gewisse Zerlegungseigenschaften beibehält — ist z. B. $\mathfrak{B}$ selbst eine Sphäre, so liegt $S^2$ irreduzibel in jener Umgebung von $\mathfrak{B}$.

II 3. Das *Ablösen* eines polyedralen Gebildes von einem anderen gleicher Metrik und das *Einspannen einer* $E^i$ *im Innern einer* $S^i$ in einen auf $S^i$ vorgegebenen Rand $S^{i-1}$ $(i = 1, 2)$, d. h. also die *elementare Unterteilung einer* $(i+1)$*-Zelle.*

Wie beim Beweis des Dehnschen Lemmas[10]) soll hier ohne nähere Begründung folgende, als *Ablösung* bezeichnete Operation benutzt werden:

Gegeben sind zwei eindimensionale bzw. zwei zweidimensionale, singularitätenfreie, orientierbare $M_l$-Gebilde $B_1$ und $B_2$ ohne gemeinsamen Randpunkt. Es sei ein gemeinsames Stück[12]) $B_0$[13]) vorhanden — es ist nicht notwendig abgeschlossen —, so daß in einer gewissen Umgebung eines jeden $B_0$-Punktes höchstens auf *einer* Seite von $B_2$ weitere $B_1$-Punkte liegen, also *längs* $B_0$ *berühren sich* $B_1$ *und* $B_2$ in beschriebener Art.

Ändern wir unter Wahrung des topologischen und polyedralen Charakters $B_1$ in einer vorgegebenen Umgebung von $B_0$ so ab, daß es keinen $B_0$-Punkt mehr mit $B_2$ gemein hat, so nennen wir dies *Ablösung des Ge-*

[9]) D. h. sich nicht überkreuzendes.

[10]) Siehe Math. Annalen 69 (1910), S. 147. Auf dem im Lemma genannten Komplexe sei die Metrik $M_l$ eingeführt; wegen der Abänderungsprozesse verlangt das Lemma die Fortsetzbarkeit von $M_l$ auf eine gewisse Umgebung. Der von *Dehn* a. a. O. skizzierte Beweis ist, wie mir *H. Kneser* mitteilte, nicht stichhaltig.

[11]) § 1.

[12]) Zu dem Begriff des „Stücks" soll es gehören, daß es kein umfassenderes, das Stück enthaltendes, zusammenhängendes Gebilde von sonst gleicher Art gibt.

[13]) Ist $B_0$ zweidimensional, so folgt, daß es polygonal berandet ist wegen der Definition des $M_l$-Gebildes I 2.

*bildes $B_1$ von $B_2$.* Die entsprechende Operation benutzen wir auch ge legentlich *unter Festhalten des $B_0$-Randes.*

Die Operation ist mit Hilfe von Ebenen, welche den Facetten paralle laufen, ausführbar. Bei Festhaltung des Randes ist noch ein, auf einem gewissen Ufer von $B_2$ längs des $B_0$-Randes verlaufender, polyedraler Streifen zu verwenden.

Ist auf einer $S^i$ $(i = 1, 2)$ eine $S^{i-1}$ gegeben, so kann man eine de auf $S^i$ durch $S^{i-1}$ bestimmten Elementarflächen unter Festhaltung des Randes von $S^i$ ablösen und bekommt so die elementare Unterteilung der durch $S^i$ berandeten $(i+1)$-Zelle.

II 4. 1. *Einspannen eines Ringstreifens in zwei Randsphären $S_1^1$ bzw. $S_2^1$* die auf den fremden Sphären $S_1^2$ bzw. $S_2^2$ gelegen sind.

Der Streifen ergibt sich, *auf den Raum zwischen $S_1^2$ und $S_2^2$ beschränkt* folgendermaßen: Wir legen zuerst ohne Berücksichtigung der $S_k^1$ $(k = 1, 2)$ einen Streifen zwischen die $S_k^2$, indem wir (im Innern je einer Facette und fremd zu $S_k^1$) auf $S_k^2$ den Punkt $P_k^0$ so wählen, daß zwischen $P_1^0$ und $P_2^0$ eine gerade Strecke liegt, die sonst keine Punkte mit $S_1^2$ oder $S_2^2$ gemein hat. Ein genügend schmales Dreiecksprisma, parallel dieser Strecke und um sie herum gelegen, schneidet die beiden Facetten in je einem Dreieck $D_k^1$ derart, daß auf dem Prisma zwischen diesen Dreiecken ein sonst zu den $S_k^2$ fremder Streifen liegt. Zwischen $D_k^1$ und $S_k^1$ liegt auf $S_k^2$ je ein Ringstreifen, um welchen wir den prismatischen Streifen bis zu dem verlangten Rande $S_k^1$ hin vergrößern können. Ablösen unter Festhalten der Ränder $S_k^1$ führt zu einem Ringstreifen, der nur die $S_k^1$ mit den $S_k^2$ gemein hat.

II 4. 2. Analog zu II 3 kann *ein Ringstreifen innerhalb eines polyedralen Torus* in zwei Ränder gespannt werden, welche auf dem Torus passend[14]) liegen.

Unter gewissen Bedingungen kann im Innern eines polyedralen Torus eine Elementarfläche konstruiert werden, deren Rand $S^1$ auf dem Torus vorgegeben ist. Hierzu vgl. IV 4. 42.

II 4. 3. *Der Raum zwischen zwei* ineinanderliegenden, fremden *$M_l$-Sphären ist eine sphärische Schale,* wie aus II 4. 1 durch die Zerlegung in zwei Elementarräume sogleich folgt.

II 5. *Angleichung.* Die zweidimensionalen $M_l$-Gebilde $G_1^2$ und $G_2^2$ mögen sich schneiden, ohne daß ihre Berandung an der Durchdringung teilnimmt. Die *Angleichung von $G_1^2$ an $G_2^2$* ist eine *Abänderung von $G_1^2$*

---

[14]) Ohne Singularitäten und Schnittpunkte, also auch homotop zueinander auf dem Torus.

unter Wahrung seines topologischen sowie polyedralen Charakters *innerhalb einer zu allen Rändern fremden Umgebung von* $G_3^2$ derart, daß die *Durchdringung verschwindet*. Wesentlich ist, daß $G_3^2$ unverändert bleibt. — Durch Ablösen denken wir uns zuerst alle Berührungen beseitigt, desgleichen soll durch kleine Veränderungen die Durchdringung in eine Anzahl von getrennten einfachen Polygonen $P_j^1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ übergeführt werden. Wir besprechen einfache Fälle.

II 5. 1. *Angleichung einer Elementarfläche* $A_1^2$ *an eine andere* $A^2$ *bzw. an eine Sphäre* $S^2$. Der Rand von $A_1^2$ sei $S_1^1$. Durch die Polygone $P_j^1$ werden auf $A_1^2$ gewisse Gebiete bestimmt, deren eines — es heiße $B^2$ — $S_1^1$ auf dem Rande hat und sonst noch einige der $P_j^1$, die wir als $\overline{P}_i^1$ auszeichnen. Jedes $\overline{P}_i^1$ schneidet sowohl aus $A_1^2$ wie aus $A^2$ eine Elementarfläche heraus[15]). Nun ändern wir $A_1^2$ ab. $B^2$ bleibt, aber in die Ränder $\overline{P}_1^i$ setzen wir die Elementarflächen ein, welche auf $A^2$ von $\overline{P}_1^i$ berandet werden. Wir ergänzen so $B^2$ zu einer Elementarfläche $A_1'^2$ mit Selbstberührungen[15]), welche $A^2$ nur noch berührt. Durch sukzessives Ablösen der Berührungsflächen[16]) erhält man die gewünschte angeglichene Elementarfläche $A_1^{*2}$. In der Fig. 1 werden die dünnen Teile weggenommen, die gestrichelten neu eingeführt.

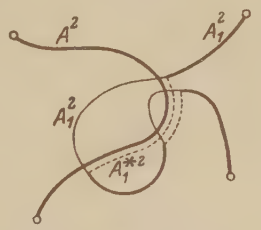


Fig. 1.

II 5. 11. Die *simultane Angleichung einer Anzahl* $n > 1$ *von Elementarflächen* $A_k^2$ *an eine* $A^2$, *wenn die* $A_k^2$ *paarweise fremd sind*, ist möglich, ohne daß die gewonnenen $A_k^{*2}$ sich durchdringen. Es haben ja die zu den verschiedenen $A_k^2$ gehörenden Schnittkurvensysteme $\{P_j^1\}_k$ keine Punkte gemein und die Konstruktion wird genau so verlaufen, als ob die verschiedenen $A_k^2$ etwa Teile einer sie umfassenden, an $A^2$ anzugleichenden Elementarfläche wären.

II 5. 2. Die *Angleichung eines Ringstreifens* $R^2$ *an eine Elementarfläche* $A^2$ ist möglich, wenn man auf dem Ringstreifen wandernd von beiden Randsphären her an dasselbe Ufer von $A^2$ stößt bei dem ersten in $R^2$ angetroffenen, dort *irreduziblen* Schnittpolygon (reduzible können wir uns sofort beseitigt denken). Diese zwei äußersten Polygone können auch als Ränder eines (evtl. singulären[17])) auf $A^2$ gelegenen Ringstreifens be-

[15]) Die aus $A^2$ herausgeschnittenen Elementarflächen können ineinandergeschachtelt liegen.

[16]) Bei ineinandergeschachtelten Berührungsflächen wird die innerste zuerst abgelöst usw.

[17]) Für die kommenden Anwendungen ist dieser Fall bedeutungslos.

trachtet werden, dessen Substitution, Ablösung (und evtl. Regularisierung nach II 2[18]) das Verlangte leistet.

---

In Abänderung der seitherigen Voraussetzungen fassen wir nun die Möglichkeit ins Auge, daß *der Rand der* anzugleichenden *Fläche* $G_1^2$ ganz oder teilweise *auf* $G_2^2$ *oder auf dem Rand von* $G_2^2$ liege. Es ist bequem, die unwesentliche (im ferneren stets erfüllte!) Annahme zu machen, daß in einer gewissen Umgebung dieser an $G_2^2$ herangebrachten $G_1^2$-Randstücke keine anderen gemeinsamen Punkte von $G_1^2$ und $G_2^2$ liegen.

II 5.3. *Angleichung einer Elementarfläche* $A^2$ *an einen Ringstreifen* $R^2$, dessen eine Randsphäre mit dem Rand $S^1$ von $A^2$ zusammenfällt, dessen andere Randsphäre zu $A^2$ fremd ist. — Alle Durchdringungspolygone $P^1$, welche in $R^2$ reduzibel sind, lassen sich wie in II 5.1 beseitigen. Dann sind alle $P^1$ — auf $R^2$ betrachtet — homotop zu $S^1$. Wenigstens eines derselben begrenzt auf $A^2$ eine solche Elementarfläche $E^2$, die kein $P^1$ im Innern enthält, also zu $R^2$ fremd ist. Eines dieser Polygone heiße $P_0^1$. Man ersetze den auf $A^2$ zwischen $P_0^1$ und $S^1$ gelegenen Ringstreifen durch den auf $R^2$ gelegenen $R'^2$ und löse $E^2 + R'^2$ längs $R'^2$ bei festem $S^1$ von $R^2$ ab, so erhält man das gewünschte $A^{*2}$.

II 5.31. Die *simultane Angleichung von zwei* fremden *Elementarflächen* $A_1^2$ *und* $A_2^2$ *an einen Ringstreifen* $R^2$, dessen Ränder an die Ränder der $A_k^2$ ($k = 1$ und 2) anschließen, aber die $A_k^2$ nicht schneiden, ist möglich, ohne daß die abgeänderten Elementarflächen sich treffen.

Nach der Angleichung von $A_1^2$ an $R^2$ betrachte man — für die Angleichung von $A_2^2$ — als anzugleichenden Ringstreifen den neuentstandenen Ringstreifen, der bei der Angleichung von $A_1^2$ gemäß II 5.3 aus dem Ringstreifen $R^2 + R'^2$ gewonnen wurde. $A_2^2$ schneidet das von $A_1^2$ verbliebene Stück $E^2$ nicht, die Reduktion nebst Ablösung von $A_2^2$ verbleibt in der Nähe von $R^2 + R'^2$, also von $R^2$, kann daher als Angleichung an $R^2$ betrachtet werden.

II 5.32. Die Angleichung von $A^2$ an $R^2$ (s. II 5.3) ist auch noch möglich, wenn der *Rand* $S^1$ *von* $A^2$ nicht auf dem Rande von $R^2$, sondern *im Innern von* $R^2$ *irreduzibel* verläuft.

Hier ist die Angleichung von $A^2$ an die *beiden* Ringstreifen, in welche $R^2$ durch $S^1$ zerlegt wird, auszuführen. Die beiden Schnittsysteme sind nach Annahme zu $S^1$ fremd und werden durch $S^1$ getrennt, also entsteht keine Komplikation.

---

[18]) Anwendung des Dehnschen Lemmas auf $A^2 + R^2$ würde im allgemeinen $R^2$ abändern.

II 5.4. Die Angleichung *eines Ringstreifens* $R_1^2$ *an einen* längs des Randes $S^1$ *angehefteten Ringstreifen* $R^2$[19]) erfordert eine

Voraussetzung: „Jedes in $R_1^2$ irreduzible Schnittpolygon soll auch in $R^2$ irreduzibel sein und vice versa[20])." — Dann gibt es nach Beseitigung der reduziblen Schnittpolygone (II 5.1) analog II 5.2 ein Polygon $P^{1'}$, so daß auf $R_1^2$ zwischen $P^1$ und dem freien Rand von $R_1^2$ kein $R^2$-Punkt liegt und daß dieses Gebiet ein Ringstreifen ist. Den auf $R_1^2$ zwischen $S^1$ und $P^1$ gelegenen Streifen ersetzen wir durch den auf $R^2$ gelegenen und lösen ihn bei festem $S^1$ ab.

II 5.41. Die *Angleichung von* $R_1^2$ *an* $R^2$ ist auch möglich, wenn der Rand $S^1$ von $R_1^2$ im Innern von $R^2$ irreduzibel verläuft[19]) — $S^1$ zerlegt $R^2$ in zwei Ringstreifen, an welche $R_1^2$ anzugleichen ist.

## B. Operationen an Gebilden verschiedener Metrik.

Hierzu gehören vor allem die Ergebnisse aus „S. S."[2]), die wir nunmehr verwerten:

II 6. *Verweisung.* In gewissen Fällen ist das Analogon zur Angleichung bei polyedralen Gebilden verschiedener Metrik möglich. Es treten jetzt die Metriken $M_l$ und $M_g$ in Beziehung zueinander.

II 6.1. Der Elementarraum $E^3$ habe den Rand $S^2$ und enthalte den Rand $\Sigma^1$ einer Elementarfläche $\mathsf{E}'^2$. Es ist eine *Elementarfläche* $\mathsf{E}^2$ *in* $\Sigma^1$ *einzuspannen, welche in* $E^3$ *verbleibt,* mit anderen Worten: $\mathsf{E}'^2$ *ist* nach $E^3$ hinein *zu verweisen.*

Trenne nach Satz IVb von „S. S." $\Sigma^1$ von $S^2$ durch eine in $E^3$ liegende Sphäre $\Sigma^2$, gleiche $\mathsf{E}'^2$ mit festem $\Sigma^1$ an $\Sigma^2$ an, so entsteht $\mathsf{E}^2$.

II 6.11. Sind mehrere, paarweis fremde Elementarflächen $\mathsf{E}_i'^2$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ in der Art von II 6.1 gegeben, so ist nach II 5.11 eine *simultane Verweisung* nach $E^3$ hinein ohne Kollision möglich.

II 6.2. Ebenso läßt sich ein Ringstreifen $\Omega'^2$ unter Festhaltung der Ränder, die in $E^3$ liegen, ins Innere von $E^3$ verweisen (II 5.2). — Die Verweisung in das Innere eines Torus kann erst nach der gleichmäßigen Approximation des Torus betrachtet werden. Hier liegt eine Erschwerung für die gleichmäßige Approximation der einfachsten Gebilde, bei welcher diese Verweisung ins Innere des Torus ein sehr bequemes Hilfsmittel wäre. So müssen wir erst schrittweise die Approximation des Torus gewinnen.

---

[19]) An den Rändern keine Durchdringungen!

[20]) Dies ist z. B. der Fall, wenn es einen Raumring $V^3$ gibt, in welchem der singuläre Ringstreifen $R^2 + R_1^2$ irreduzibel liegt.

## C. Hilfssätze über allgemeinere Gebilde.

Zunächst besprechen wir an Hand der als Meridianfigur eines Rotationsgebildes aufzufassenden Fig. 2 das

II 7. *Modell* eines $M_l$-Gebildes, nämlich einer sphärischen Schale $W^3$, bestehend aus einem Ringraum $R^3$ und aus zwei zueinander fremden Elementarräumen $A_i^3$ $(i = 1, 2)$, welche längs je eines Ringstreifens $R_i^2$ an den sonst zu den $A_i^3$ fremden Ringraum $R^3$ grenzen. $\bar{A}_i^3$ sei der durch Vereinigung des einzelnen $A_i^3$ mit $R^3$ entstehende Elementarraum. Der Rand von $A_i^3$ besteht außer aus $R_i^2$ noch aus einer — am Außenrand von $W^3$ liegenden — Elementarfläche $A_i^2$ und aus einer an den Hohlraum $E'^3$ der Schale grenzenden $A_i'^2$. Wir formulieren jetzt drei Homotopiesätze.

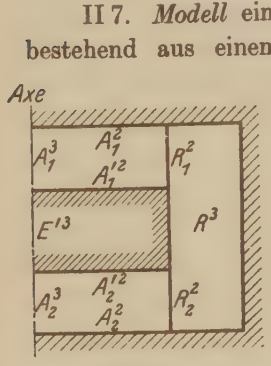


Fig. 2.

II 7.1. Im Innern von $R^3$ ist gegeben ein einmaliger Umlauf $\mathfrak{S}^1$, der in $\bar{A}_1^3$ bzw. $\bar{A}_2^3$ je eine vorgelegte Elementarfläche $\mathfrak{E}_1^2$ bzw. $\mathfrak{E}_2^2$ berandet. $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{S}^1 + \mathfrak{E}_2^2$ ist eindeutig stetiges Bild einer Sphäre $\mathfrak{S}^2$ und *ist in $W^3$ homotop zu jeder der beiden Randsphären von $W^3$, welche durch $\mathfrak{T}^2$ getrennt werden.*

Beweis. Daß $\mathfrak{S}^1$ in $R^3$ nach einem einmaligen einfachen Umlauf auf dem Rand von $R^3$ deformiert werden kann, gehört zur Annahme. Ein solcher, dem $\left\{\begin{matrix}\text{Außen}\\ \text{Innen}\end{matrix}\right\}$rand von $W^3$ angehörender Umlauf teilt die $\left\{\begin{matrix}\text{Außen}\\ \text{Innen}\end{matrix}\right\}$-sphäre des $W^3$-Randes in zwei Elementarflächen. Auf die eine davon kann $\mathfrak{E}_1^2$ innerhalb $\bar{A}_1^3$ deformiert werden, auf die andere $\mathfrak{E}_2^2$ in $\bar{A}_2^3$. — Würde $\mathfrak{T}^2$ die Randsphären von $W^3$ nicht trennen, so gäbe es zwischen diesen Sphären in $W^3$ einen zu $\mathfrak{T}^2$ fremden $M_l$-polygonalen Zug. Dann ließe sich $W^3$ (vgl. II 4.3) in zwei Elementarräume zerlegen, deren einer $\mathfrak{T}^2$ gänzlich, also reduzibel enthielte.

II 7.21. Eine Sphäre $\mathfrak{S}^2$ ist in $W^3$ irreduzibel gegeben. Dann *gibt es in $R^3$ eine auf $\mathfrak{S}^2$ liegende irreduzible Sphäre* $\mathfrak{S}^1$. — Dies finden wir am bequemsten als Bestandteil des Satzes III von „S.S.“, wenn wir bedenken, daß $\mathfrak{S}^2$ die Randsphären von $W^3$ trennt und wenn wir $\mathfrak{S}^2$ mit einer $M_l$-Sphäre schneiden, welche außer- und innerhalb von $\mathfrak{S}^2$ je einen einmaligen Umlauf um $R^3$ auf sich trägt[20a]).

II 7.22. Wenn, wie in II 7.21, auf $\mathfrak{S}^2$ eine in $R^3$ irreduzible $\mathfrak{S}^1$ gegeben ist, so folgt (weil $\mathfrak{S}^2$ in $W^3$ homotop zu jeder *einmal* genommenen Randsphäre ist), daß $\mathfrak{S}^1$ *ein einmaliger Umlauf* in $R^3$ ist.

---

[20a]) Z. B. die Randsphäre von $A_1^3$; man betrachte ein „Übergangskontinuum“ (s. „S. S.“), welches die beiden Umläufe trennt.

### D. Scheitelung innerhalb derselben Metrik.

II 8. Die sphärische Schale $W^3$ von II 7 (vgl. Fig. 2) kann mit ihrer Gliederung als Umgebungskomplex einer Sphäre $\bar{S}^2$ aufgefaßt werden, welche durch ein Polygon $\bar{S}^1$ in die Elementarflächen $\bar{E}_j^2$ $(j=1,2)$ geteilt ist, wenn man $W^3 = U(\bar{S}^2)$, $R^3 = U(\bar{S}^1)$, $A_j^3 = U^*(\bar{E}_j^2)$ setzt, vgl. I 4. Wir stellen uns die Aufgabe, $\bar{S}^2 = S^2$ so zu finden, daß $\bar{S}^1$ auf ihr *eine vorgegebene Lage* $S^1$ in $R^3$ einnehmen kann. Als Bürgschaft für die Möglichkeit einer Lösung sei $S^1$ irreduzibel in $R^3$ auf einer in $W^3$ liegenden und dort irreduziblen, aber sonst beliebigen Sphäre $S_0^2$ gegeben (vgl. II 7. 21 und 22).

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt einen Ringstreifen $V^2$ zu finden, dessen Ränder $S_j^1$ irreduzibel in den Ringstreifen $R_j^2$ liegen (welche $A_j^3$ von $R^3$ trennen), der ferner in $R^3$ verbleibt und $S^1$ enthält. Denn alsdann kann man innerhalb $A_j^3$ mit dem Rand $S_j^1$ je eine Elementarfläche finden, welche $V^2$ zu einer gesuchten Lage $S^2$ ergänzen.

Zunächst wählen wir auf $S_0^2$ einen Ringstreifen, der $S^1$ irreduzibel im Innern enthält und der in $R^3$ verbleibt. Seine Ränder seien $O_j^1$ $(j=1,2)$. Lösen wir diesen Streifen unter Festhalten der $O_j^1$ einmal ins Äußere, ein anderes Mal ins Innere von $S_0^2$ hinein ab, so entstehen zwei Streifen, die zusammen einen Torus $O^2$ bilden, dessen Inneres $S^1$ enthält. Nehmen wir aus $R^3$ das Innere von $O^2$ heraus, so sind im Restraum die $O_j^1$ homotop zu den $S_j^1$, denn die $O_j^1$ sind ja außerhalb von $O^2$ (auf $S_0^2$) reduzibel, umschlingen den entstandenen Hohlraum nullmal; desgleichen die $S_j^1$. Wir können daher (auch in dem Restraum von $R^3$) je einen singulären Ringstreifen zwischen $O_j^1$ und $S_j^1$ einspannen[21]) und bekommen so durch Zwischenschalten des auf $S_0^2$ durch $O^2$ ausgesparten Streifens einen singulären Streifen zwischen den $S_j^1$, welcher jedoch mit seinen Singularitäten von $S^1$ entfernt bleibt. Sollten die Singularitäten an die $S_j^1$ heranreichen, so ist leicht ersichtlich, wie ganz analog zu $O^2$ ein schützender Torus dieses verhindern könnte. Dann aber erlaubt das Dehnsche Lemma die Regularisierung des gesamten Ringstreifens und so bekommen wir $V^2$.

## III. Gleichmäßige Approximation polyedraler Gebilde ohne Punktzellen.

An zwei Stellen ist eine gleichmäßige Approximation — besonders einfacher Art — bereits zur Sprache gekommen. Die $M_g$-Approximation (s. „S. S.“) einer Sphäre $S^2$ lieferte uns („S. S.“ Satz IVb) in vorgegebener

[21]) Auf kombinatorischem Wege durch Zerlegung von $R^3$ in Elementarzellen (Verlängerung der Facettenebenen!).

Umgebung von $S^2$, z. B. in $U(S^2)$, d. h. in einer sphärischen Schale (siehe I 4 Schluß) eine irreduzible Sphäre $\Sigma^2$, das ist also die *gleichmäßige Approximation einer nicht untergeteilten* $S^2$. Ferner können wir in II 6. 1 den Elementarraum $E^3$ (zuzüglich Rand) als $U(E^2)$ einer passend zu wählenden $E^3$ mit Rand $S^1$ betrachten, womit wir die Lösung der Aufgabe haben: „$E^2$ *gleichmäßig zu approximieren*. wenn der *Rand* $\Sigma^1$ der Bildfläche $\mathsf{E}^2$ passend *gegeben ist*“[22]). Wir stellen uns neue Aufgaben.

III 1. *Gleichmäßige Approximation einer Elementarfläche* $E^2$ *mit ungeteiltem Rand* $S^1$ — *ohne* Vorgabe des Randes $\Sigma^1$ der Bildfläche. Im Hinblick auf den Ringraum $U(S^1)$ heißt dies: Zeichne *in einen unverknoteten* $M_l$*-Ringraum ein ihn einmal umlaufendes unverknotetes* $M_g$*-Polygon.*

Die Aufgabe ist nach II 7.21 und 22 gelöst, wenn eine Sphäre $\Sigma^2$ gefunden wird, welche relativ zum Ringraum $U(S^1)$ dieselbe Lage hat, wie dort $\mathfrak{S}^2$ relativ zu $R^2$. — 1. Wir stellen eine *sphärische Schale* $W^3$ her, welche aus $U(S^1)$ und aus zwei (je längs eines Ringstreifens angrenzenden) Elementarräumen besteht, indem wir aus der Rumpfumgebung $U^*(E^2)$ einen Elementarraum $E'^3$ (vgl. Fig. 2) herausnehmen, welcher nicht an die Randsphären von $U(E^2)$, wohl aber längs eines ($R^3$ einmal umlaufenden) Ringstreifens an $U(S^1) = R^3$ anstößt. — 2. Wir konstruieren nach „S. S.“ Satz IVb *eine* $\Sigma^2$, *welche* die beiden Randsphären von $W^3$ *trennt*. — Eine gleichmäßige Approximation $\mathsf{E}^2$ von $E^2$ liegt nun ohne weiteres auf $\Sigma^2$ mit Rand $\Sigma^1$.

III 1. 1. Hilfssatz. „Das soeben konstruierte Bild $\mathsf{E}^2$ von $E^2$ *trennt* in der Rumpfumgebung $U^*(E^2)$ *die beiden freien Randflächen von* $U^*(E^2)$.“ Dabei verstehe ich unter den beiden freien Randflächen die beiden Elementarflächen, längs deren $U^*(E^2)$ *nicht* an $U(S^1)$, aber an den Rand von $U(E^2)$ stößt. (Für $E^2$ statt $\mathsf{E}^2$ ist ein Beweis leicht.)

Beweis. Wir können sogar behaupten, daß unter den *einzelnen Gebieten* $\mathfrak{G}$, welche $\mathsf{E}^2$ mit dem Innern von $U^*(E^2)$ gemein hat, wenigstens *eines* ist, welches den Weg zwischen diesen „freien“ Randflächen innerhalb $U^*(E^2)$ *versperrt*[23]).

Wir konstruieren eine Jordankurve $\mathfrak{P}^1$, bestehend aus 1. einem in $U^*(E^2)$ die beiden „freien“ Flächen verbindenden $M_l$-Polygonzug, 2. einem Kurvenstück, das außerhalb $U(E^2)$ diesen Polygonzug zur Sphäre $\mathfrak{P}^1$

---

[22]) $U(S^1)$ ist also insofern nicht mehr willkürlich, als es auch $\Sigma^1$ enthalten muß. Die Isotopiefrage ist durch die Auflagerung von $\Sigma^1$ auf $E'^2$ erledigt.

[23]) Das Entsprechende für den einfacheren Fall der Sphäre $\Sigma^2$ (statt $\mathsf{E}^2$), welche *als Ganzes* diese Versperrung bewirkend angenommen sei, findet man z. B. in „S. S.“ S. 560 unten.

schließt. Durch hinreichend kleine $M_g$-Sehnen kann $\mathfrak{P}^1$ zu einem geschlossenen $M_g$-Polygon $\Pi^1$ gemacht werden, welches zu $U(S^1)$ fremd ist und $\mathsf{E}^2$ nur in diskreten Punkten schneidet — nicht berührt.

Wäre auf $\mathsf{E}^2$ *kein* Gebiet $\mathfrak{G}$ (siehe oben) vorhanden, welches in $U^*(E^2)$ die freien Flächen trennt, so müßte jedes $\mathfrak{G}$ von $\Pi^1$ in einer *geraden* Zahl von Punkten getroffen werden. Bei einer Durchlaufung von $\Pi^1$ können je zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte mit demselben $\mathfrak{G}$ beseitigt werden, wenn man einen neuen, innerhalb $U^*(E^2)$ liegenden $M_g$-Polygonzug (entlang $\mathfrak{G}$) substituiert. So entsteht ein geschlossenes Polygon $\Pi'^1$, welches die beiden freien Flächen innerhalb $U^*(E^2)$ verbindet und von $\mathsf{E}^2$ einen endlichen Abstand hat. Nehmen wir aus $U(E^2)$ eine zu $\mathsf{E}^2$ fremde $\lambda$-Umgebung weg, so bliebe $\Sigma^1$ trotzdem in dem Rest von $U(E^2)$ reduzibel. Nehmen wir aber innerhalb dieser $\lambda$-Umgebung (durch $M_l$-Approximation von $\Pi'^1$) ein $M_l$-Polygon weg, das die freien Flächen in $U^*(E^2)$ verbindet, so genügt schon diese Wegnahme zu der rein kombinatorischen Folgerung, daß $\Sigma^1$ irreduzibel werden muß — unsre Annahme führt zu diesem Widerspruch, der Hilfssatz ist richtig.

III 2. *Gleichmäßige Approximation einer Sphäre $S^2$, auf welcher eine Sphäre $S^1$ gezeichnet ist* (*Scheitelung*). $S^1$ zerlege $S^2$ in die Elementarflächen $E_1^2$ und $E_2^2$. Die gewünschte Bildsphäre $\Sigma^2$ zerfalle durch das Bild $\Sigma^1$ von $S^1$ in die Elementarflächen $\mathsf{E}_1'^2$ und $\mathsf{E}_2'^2$. Da nunmehr $\mathsf{E}_i'^2$ auf das Innere von $U(E_i^2)$ beschränkt wird, handelt es sich um eine Art „*Scheitelung*“ der nach „S. S.“ Satz IVb allgemein approximierenden $M_g$-Sphäre. Bei dieser Scheitelung wird die Trennung zwischen rechts und links durch die Metrik $M_l$ diktiert. Wir sprechen auch von einer „Scheitelung gemäß $U(S^1)$“.

III 2. 1. Der *Gedanke der Konstruktion* ist dieser: $U(E_1^2)$ und $U(E_2^2)$ haben den Ringraum $U(S^1)$ gemeinsam. Jedes $E_i^2$ für sich läßt sich (III 1) in $U(E_i^2)$ durch $\mathsf{E}_i^2$ gleichmäßig approximieren. Wollten wir aber beide $\mathsf{E}_i^2$ in denselben Rand einspannen, so würde der Schnitt $\mathsf{E}_1^2 \times \mathsf{E}_2^2$ im allgemeinen weder durch Ablösung noch durch die Dehnsche Konstruktion beseitigt werden können, ohne daß z. B. $\mathsf{E}_1^2$ in die Rumpfumgebung $U^*(E_2^2)$ eindränge, also $U(E_1^2)$ verließe. Wir konstruieren daher 1. die $\mathsf{E}_i^2$ so, daß sie sich in $U(S^1)$ nirgends treffen und spannen 2. zwischen ihre Ränder $\Sigma_i^1$ einen Ringstreifen $\Omega^2$ ein, der ganz in $U(S^1)$ verläuft und dessen Schnittfiguren mit den $\mathsf{E}_i^2$ nicht an die $\Sigma_i^1$ heranreichen, so daß eine Angleichung der $\mathsf{E}_i^2$ an $\Omega^2$ gemäß II 5. 31 erfolgen kann: $\overline{\mathsf{E}}_i^2$. Diese Angleichung führt $\mathsf{E}_i^2$ nicht aus $U(E_i^2)$ heraus, folglich scheitelt jedes in $\Omega^2$ irreduzibel gelegene $\Sigma^1$ die Sphäre $\Sigma^2 = \overline{\mathsf{E}}_1^2 + \Omega^2 + \overline{\mathsf{E}}_2^2$ gemäß $U(S^1)$. — Man beachte, daß dies noch *nicht* die gleichmäßige Approximation ist für eine Sphäre $S^2$, welche durch zwei eindimensionale Sphären in zwei Elementar-

flächen und einen zwischenliegenden Ringstreifen zerlegt wird (dann müßte $\Omega^2$ einen „Absorptionscharakter“ haben).

III 2. 2. Ein *Modell* liefert die Fig. 3, wenn wir sie als Meridianfigur eines Rotationsgebildes auffassen. Die $M_g$-Gebilde sind durch krumme Linien angedeutet. Im Anschluß an Fig. 2 ist eine sphärische Schale $U(S^2)$ mit dem Hohlraum $E'^3$ in zwei Elementarräume $U^*(E_i^2)$ $(i=1,2)$ und einen Ringraum $R^3=U(S^1)$ geteilt. $R^3$ zerlegen wir durch einen Ringstreifen $R^2$ (im Modell ein zylindrischer Streifen parallel zur Achse) in einen äußeren bzw. inneren Ringraum, $R_a^3$ bzw. $R_j^3$. Durch einen anderen Ringstreifen (im Modell ein ebener Streifen in der Symmetrieebene) wird $R^3$ zerlegt in einen oberen bzw. unteren Ringraum $R_1^3$ bzw. $R_2^3$.

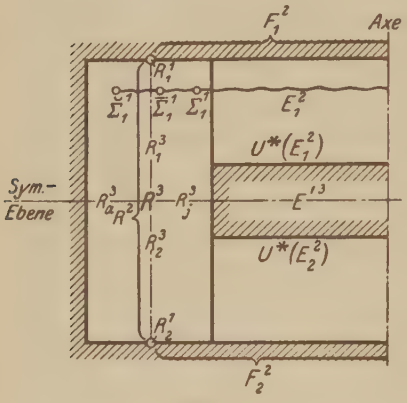


Fig. 3.

III 2. 3. *Wahl von* $\mathsf{E}_1^2$ *und* $\mathsf{E}_2^2$. Um $\mathsf{E}_1^2$ und $\mathsf{E}_2^2$ getrennt zu halten, beschränken wir $\mathsf{E}_1^2$ auf das Innere der „oberen“ (siehe Fig. 3) Hälfte der Schale, d. h. auf $R_1^3+U^*(E_1^2)$; analog $\mathsf{E}_2^2$ auf die „untere“ Hälfte. Die (endgültige) Lage der Ränder $\Sigma_i^1$ $(i=1,2)$ von $\mathsf{E}_i^2$ wird innerhalb des „inneren“ Ringraums $R_j^3$ zu suchen sein, vorläufig müssen wir jedoch zwei Elementarflächen $\bar{\mathsf{E}}_i^2$ zu Hilfe nehmen, die ebenfalls auf die obere bzw. untere Schalenhälfte verteilt sind, deren Rand $\bar{\Sigma}_i^1$ im Innern des „äußern“ Ringraums $R_a^3$, und zwar einmal umlaufend, gelegen ist. Nach III 1 ist $\bar{\mathsf{E}}_i^2$ derart konstruierbar. $\bar{\mathsf{E}}_i^2$ wird dann $\mathsf{E}_i^2$ als Teil enthalten.

$\bar{\mathsf{E}}_i^2$ hat folgende Eigenschaft: „Es liegt auf $\mathsf{E}_i^2$ innerhalb des „inneren“ Ringraums $R_j^3$ ein einmaliger Umlauf $\bar{\Sigma}_i^1$, der so nahe bei $R^2$ gewählt werden kann, daß er — in einer beliebig gegebenen $\lambda$-Umgebung von $R^2$ — in eine auf $R^2$ gelegene, dort irreduzible, $M_l$-polygonale Endlage $P_i^1$ hineindeformiert werden kann.“ — Zum *Beweis* dieser Eigenschaft betrachte man die Außensphäre der sphärischen Schale $W'^3$, welche übrigbleibt, wenn man von der Schale $U(S^2)$ den „äußeren“ Ringraum $R_a^3$ entfernt. Diese Außensphäre besteht aus $R^2$ und zwei Elementarflächen $F_i^2$ (siehe Fig. 3), welche in die Ränder $R_i^1$ von $R_2$ eingespannt sind (im Modell sind dies zwei Kreisflächen parallel zur Symmetrieebene). Diese Sphäre hat bezüglich eines jeden $\bar{\mathsf{E}}_i^2$ dieselbe Lage, wie sie in III 1. 1 der Rand von $U^*(E^3)$ bezüglich $\mathsf{E}^3$ hat (die Elementarflächen $F_i^2$ sind die dortigen „freien“ Flächen). Wir wenden III 1. 1 an und finden, daß es unter den $\bar{\mathsf{E}}_1^2$-Gebieten, welche innerhalb $R^2$ liegen, ein Gebiet $\mathfrak{G}_1$ gibt, welches inner-

halb von $R^2$ die beiden $F_i^2$ trennt. Unter den Randstücken von $\mathfrak{G}_1$ gibt es dann nach „S. S." Satz II eines (ein „Übergangskontinuum"), $\mathfrak{K}_1$, in dessen $\lambda$-Umgebung eine Deformation möglich ist von einem einfachen $M_l$-Polygon, das auf $R^2$ irreduzibel liegt[24]), nach einem einfachen $M_g$-Polygon, das auf $\breve{E}_1^2$ in $\mathfrak{G}_1$ und innerhalb $R^2$ liegt. Dieses $M_g$-Polygon nennen wir $\bar{\Sigma}_1^1$, es ist ein einmaliger Umlauf in $R^3$, ebenso wie $\bar{\Sigma}_1^1$. Dasselbe gilt auf $\breve{E}_2^2$.

Bei der Deformation von $P_i^1$ $(i = 1, 2)$ nach $\bar{\Sigma}_i^1$ wird ein Deformationsstreifen $\mathfrak{D}_i$ (eindeutig stetiges Bild eines Ringstreifens) durchschritten.

III 2.4. *Konstruktion des Ringstreifens* $\Omega^2$. In III 2.1 wünschten wir einen Ringstreifen $\Omega^2$ innerhalb $R^3$ zwischen zwei einmal umlaufenden $\bar{\Sigma}_i^1$ $(i = 1, 2)$. Zwischen den beiden $\bar{\Sigma}_i^1$ gibt es einen *singulären* Ringstreifen, bestehend aus einem regulären, der auf $R^2$ zwischen den beiden $P_i^1$ liegt, und zwei singulären anschließenden, die wir $\mathfrak{D}_i$ nannten. Da die Ränder $\bar{\Sigma}_i^1$ von den $\mathfrak{D}_i$ noch geschnitten werden können, ist eine $M_g$-Approximation[25]) im allgemeinen nicht ausführbar. Daher unterwerfen wir die $\bar{\Sigma}_i^1$ einer weiteren Bedingung.

Wir konstruieren in $\mathfrak{G}_1$ eine Sphäre $\Sigma_1^1$ (analog $\Sigma_2^1$ in $\mathfrak{G}_2$), welche die Eigenschaften von $\bar{\Sigma}_1^1$ hat, außerdem auf $\breve{E}_1^2$ (nicht nur auf $\mathfrak{G}_1$!) zwischen $\mathfrak{K}_1$ und sich keinen Punkt hat, der außerhalb von $R^3$ läge. Die Entfernung aller $\Sigma_1^1$-Punkte von $\mathfrak{K}_1$ muß nur klein genug werden. Die Minimalentfernung ist immer noch $\mu > 0$. Wähle nun $\lambda < \mu$ und konstruiere mit diesem $\lambda > 0$ genau wie in III 2.3 $\bar{\Sigma}_1^1$. Dann hat $\bar{\Sigma}_1^1$ die Eigenschaft bekommen, daß man auf $\breve{E}_1^2$ einen Ringstreifen hat, der längs $\bar{\Sigma}_1^1$ an $\mathfrak{D}_1$ anstößt, aber mit seinem andern Rande $\Sigma_1^1$ einen Abstand von $\mathfrak{D}_1$ behält. Und nun können wir auf einen gewissen, am Rande singularitätenfreien und sonst im allgemeinen singulären Ringstreifen die $M_g$-Approximation[25]) anwenden, nämlich auf den Ringsteifen, welcher besteht 1. und 5. aus den beiden auf $\breve{E}_i^2$ zwischen $\Sigma_i^1$ und $\bar{\Sigma}_i^1$ innerhalb $R^3$ liegenden $M_g$-Ringstreifen, 2. und 4. aus den beiden Deformationsstreifen $\mathfrak{D}_i$ zwischen $\bar{\Sigma}_i^1$ und $P_i^1$, 3. aus dem auf $R^2$ zwischen den $P_i^1$ liegenden $M_l$-Ringstreifen. Die Regularisierung dieses Gesamtstreifens gibt $\Omega^2$ zwischen den $\Sigma_i^1$.

III 2.5. *Abschluß.* $\Sigma_i^1$ möge auf $\breve{E}_i^2$ die Elementarfläche $E_i^2$ beranden. *Da* $\Omega^3$ *in* $R^3 = U(S^1)$ liegt, führt die Angleichung der $E_i^2$ an $\Omega^2$ (II 5.31),

[24]) Weil es auf der betrachteten „Außensphäre" $F_1^2$ von $F_2^2$ trennen muß.

[25]) Feine Triangulierung, Einspannen von $M_g$-Dreiecken in die Eckentripel der Dreieckszellen, Anwendung des Dehnschen Lemmas (schlichte Fläche!).

die wir vornehmen, $E_i^2$ nicht aus $U(E_i^2)$ heraus. — Wir erinnern uns, daß $\Sigma_i^1$ ebenso wie $\bar{\Sigma}_i^1$ als einmaliger Umlauf in $R^3$ liegt. Daraus folgt nach II 7.1, daß $\Omega^2$ mit den beiden (angeglichenen) $E_i^2$ — sie sollen keine neue Bezeichnung mehr erhalten — eine Sphäre $\Sigma^2$ konstituiert, welche in $U(S^2)$ irreduzibel verläuft, und daß *jede in* $\Omega^2$ *irreduzibel gewählte Sphäre* $\Sigma^1$ *eine Scheitelung von* $\Sigma^2$ gemäß $U(S^1)$ bewirkt.

III 3. *Gleichmäßige Approximation eines Ringstreifens* $V^2$ *ohne Unterteilung.* Wir nehmen $V^2$ unverknotet an[26]) und führen alles auf III 2 zurück. In die Ränder $S_1^1$ bzw. $S_2^1$ von $V^2$ seien (als Bürgschaft für die Unverknotetheit) die Elementarflächen $E_1^2$ bzw. $E_2^2$ eingespannt, so daß $E_1^2 + V^2 + E_2^2$ eine Sphäre $S^2$ vorstellt[27]). Den Umgebungskomplex der durch $S_1^1$ und $S_2^1$ geteilten Sphäre $S^2$ ersehen wir aus Fig. 4, welche die Meridianfigur eines rotationssymmetrischen Modells gibt und welche sich von Fig. 3 dadurch unterscheidet, daß der Ringraum $R^3$ nicht in *zwei* Ringräume parallel zur Symmetrieebene abgeteilt wird, sondern in *drei*: $U(S_1^1)$, $U(S_2^1)$ und $U^*(V^2)$, wovon der letzte samt seinem Rand fremd zu den $U^*(E_i^2)$ gewählt wird. Führen wir jetzt III 2 so durch, daß $\Sigma_i^1$ in $U(S_i^1)$, $\bar{E}_i^2$ in $U(E_i^2)$ verbleiben, dann kann das entstehende $\Omega^2$ als Bild von $V^2$ behandelt werden (nicht aber die $E_i^2$ als Bilder der $E_i^2$).

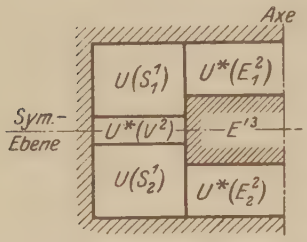


Fig. 4.

III 4. Wir betrachten jetzt die *gleichmäßige Approximation von Kombinationen verschiedener Elementarflächen und Ringstreifen*, welche längs ihrer ungeteilten Ränder zusammenhängen. An jeden Rand sollen zuerst höchstens zwei Flächenstücke anstoßen.

III 4.1. *Gleichmäßige Approximation des zonenhaft geteilten Ringstreifens.* Es stoßen (zunächst) zwei Ringstreifen $V_1^2$ bzw. $V_2^2$ längs des Randes $S^1$ zusammen; ihre freien Ränder heißen $S_1^1$ bzw. $S_2^1$.

Wie in III 2 wollen wir die beiden Teilflächen (dort hießen sie $E_1^2$ und $E_2^2$) zuerst jede für sich, und zwar durch zwei zueinander fremde Gebilde, gleichmäßig approximieren, um dann einen Hilfsringstreifen (dort $\Omega^2$) dazwischenzuschieben, welcher der Korrektur, Angleichung und Verbindung

[26]) Durch Abbildung auf einen anderen Raum usf. wäre auch der Fall des verknoteten $V^2$ in gleicher Weise zu behandeln, wobei das Bild von $V^2$ in $U(V^2)$ homotop zu $V^2$ wird; dieser Fall wird uns im folgenden nicht beschäftigen und kann später ohne weiteres behandelt werden durch Abbildung eines *Komplexes*, dem man das entsprechend geteilte $V^2$ eingliedert.

[27]) Wir kommen aber noch immer nicht auf die zu Ende von III 2.1 erwähnte Aufgabe.

lient. — Der Umgebungskomplex wird an Hand der Fig. 3 gewonnen, venn man jeden Elementarraum $U^*(E_i^2)$ durch Wegnahme eines koaxialen ylindrischen Kernes in einen Ringraum verwandelt, welcher dann die Ver-inigung der Rumpfumgebung $U^*(V_i^2)$ mit $U(S_i^1)$ darstellt, während $R^3$ ach wie vor $= U(S^1)$ ist. — Statt $\breve{\mathsf{E}}_i^2$ zu konstruieren, hat man jetzt n $R^3 + U^*(V_i^2) + U(S_i^1)$ je für $i = 1$ und 2 einen Ringstreifen $\breve{\Omega}_i$ ge-näß III 3 einzulegen, auf ihnen in der Nähe von $R^2$ wieder $\bar{\Sigma}_i^1$ und $\Sigma_i^1$ [28]) u zeichnen und endlich zwischen $\Sigma_1^1$ und $\Sigma_2^1$ den Ringstreifen $\Omega^2$ ein-uspannen, welcher (nach II 5. 4 und analog II 5. 31) die Angleichung der eiden fremden $\Omega_i^2$ ohne Kollision erlaubt. — Ebenso können *n Ringstreifen intereinandergereiht* werden.

III 4. 2. Die Zufügung einer Elementarfläche an beiden oder einem er freien Ränder eines zonenhaft geteilten Ringstreifens ist genau so urchführbar; man erhält so die *gleichmäßige Approximation der durch „Parallelkreise" geteilten Sphäre oder Elementarfläche.*

III 4. 3. Fallen die zwei freien Ränder einer Reihe von hintereinander-eschalteten Ringstreifen zusammen, so ergibt sich wiederum keine Schwierig-keit. Dies gibt die *gleichmäßige Approximation des zonenhaft geteilten Torus* und zugleich natürlich (aber auch erst hier!) die *allgemeine Approxi-mation des ungeteilten Torus* [29]) analog dem für die Sphäre in „S. S." atz IV b Ausgeführten.

Nunmehr lassen wir auch mehr als zwei Flächenstücke an einem ande anstoßen.

III 4. 4. *Gleichmäßige Approximation* des aus *drei Elementarflächen* $E_i^2$ $i = 0, 1, 2$) bestehenden Gebildes, welche den ungeteilten *Rand* $S^1$ und onst nichts *gemein* haben. Im Innern der Sphäre $S^2 = E_1^2 + S^1 + E_2^2$ iege $E_0^2$ als unterteilende Wand. Die elementaren Umgebungen $U(E_i^2)$ $i = 0, 1, 2$) haben den Ringraum $U(S^1)$ und sonst (auch paarweise) ichts gemein.

Zuerst approximieren wir $S^2$ (mit $S^1$) gleichmäßig durch $\Sigma^2 = \mathsf{E}_1^2 + \Sigma^1 + \mathsf{E}_2^2$ emäß III 2. Innerhalb $\Sigma^2$ wird in den Rand $\Sigma^1$ *irgendeine* Elementar-äche $\mathsf{E}_0'^2$ eingespannt (II 3). Durch Verweisung von $\mathsf{E}_0'^2$ ins Innere von $U(E_0^2)$ entsteht $\mathsf{E}_0''^2$, welches in einer gewissen Umgebung von $\Sigma^1$ mit $\mathsf{E}_0'^2$ übereinstimmt, aber im allgemeinen die Elementarflächen $\mathsf{E}_j^2$ $(j = 1, 2)$ chneidet. Damit die Angleichung von $\mathsf{E}_0''^2$ an diese $\mathsf{E}_j^2$ nicht neuerdings us $U(E_0^2)$ herausführe, ist es nötig den beiden $\mathsf{E}_j^2$ *und dem* $\Sigma^1$ *von ornherein noch eine speziellere Lage vorzuschreiben,* indem wir (s. I 6 chluß) innerhalb des $U$-Umgebungssystems ein zweites $\bar{U}$-System ein-

[28]) $\Sigma_i^1$ ist natürlich nicht das Bild von $S_i^1$.

[29]) Bezüglich des verknoteten Torus vgl. Anm. [26]).

führen, so daß jede $\bar{U}$-Umgebung im Innern der entsprechenden $U$-Umgebung verbleibt, und von jedem $\mathsf{E}_j^2$ fordern, daß es am Rande $\Sigma^1$ einen „absorbierenden" Streifen $Z_j^2$ habe: 1. $Z_j^2$ verbleibt in $U(E_0^2)$, also auch in $U(S^1)$; 2. $Z_j^2$ enthält *alle* Punkte von $\mathsf{E}_j^2$, welche in $\bar{U}(E_0^2)$, also auch in $\bar{U}(S^1)$, liegen. — Wenn wir dann auch noch *der Elementarfläche* $\mathsf{E}_0''^2$ *eine schärfere Vorschrift auferlegen*, daß wir nämlich $\mathsf{E}_0''^2$ nicht nur ins Innere von $U(E_0^2)$, sondern in das von $\bar{U}(E_0^2)$ verwiesen denken, dann schneidet $\mathsf{E}_0''^2$ die beiden $\mathsf{E}_j^2$ nur in deren absorbierenden Streifen, so daß die Angleichung (gemäß II 5. 3) von $\mathsf{E}_0''^2$ an $\mathsf{E}_j^2$ höchstens solche Stücke in $\mathsf{E}_0''^2$ substituiert, welche zu $U(E_0^2)$ gehören, wie dies von $\mathsf{E}_0^2$ verlangt wird.

Noch eine Bemerkung zu der Konstruktion der absorbierenden Streifen $Z_j^2$ von $\mathsf{E}_j^2$: Wir haben hier die Aufgabe III 4. 2.

Analoges gilt für ein Gebilde, das aus *mehr als drei Elementarflächen* mit gemeinsamem Rande besteht.

III 4. 5. *Ein zwischen zwei Sphären* $S_1^2$ *und* $S_2^2$ *gespannter Ringstreifen* $R^2$ *ist nebst den Sphären gleichmäßig zu approximieren.*

Die Sphären. Auf $S_j^2$ $(j=1,2)$ liegt nur der Rand $S_j^1$ von $R^2$. Die $U$-Umgebung zeigt drei Ringräume $U(S_1^1)$, $U(S_2^1)$ und $U^*(R^2)$ sowie vier Elementarräume $U^*(E_k^2)$ — zu den Hälften der $S_j^2$ gehörig. Wie in III 4. 4 benutzen wir neben dem $U$-System ein $\bar{U}$-System, welches die gleichmäßige Approximation der $S_j^2$ bzw. $S_j^1$ so erlaubt, daß die Bildsphären $\Sigma_j^2$ einen „absorbierenden" Streifen $Z_j^2$ haben, der in $U(S_j^1)$ verbleibt, alle zu $\bar{U}(S_j^1)$ gehörenden $\Sigma_j^2$-Punkte enthält und das Bild $\Sigma_j^1$ von $S_j^1$ umgibt.

Der Streifen. Der Rand von $\bar{U}(R^2)$ ist ein Torus $T^2$, den wir in beliebig schmale Zonen teilen können, deren Ränder einmalige Umläufe in $\bar{U}(R^2)$ sind. Die gleichmäßige Approximation von $T^2$ nehmen wir im Innern von $T^2$ vor, aber so, daß das Bild $\mathsf{T}^2$ den Streifen $R^2$ im Innern enthält. Ferner wählen wir solche Zonen auf $T^2$, daß wir die entsprechenden Zonen auf $\mathsf{T}^2$ zu zwei Ringstreifen $\bar{\Omega}_j^2$ $(j=1,2)$ mit gemeinsamen Rändern $\Theta_a^1$ und $\Theta_b^1$ folgender Art zusammenfassen können: $\bar{\Omega}_j^2$ soll nur $\Sigma_j^2$, also auch nur $Z_j^2$ treffen. Die Schnittpolygone[30]) $(\bar{\Omega}_j^2 \times Z_j^2)$ sind entweder in $\Omega_j^2$ *und* $Z_j^2$ irreduzibel oder in beiden Streifen reduzibel, weil beide Streifen im Ringraum $U(R^2)$ einmal umlaufend enthalten sind (vgl. Anm. [20])). Wenigstens ein irreduzibles Schnittpologon ist auf $\bar{\Omega}_j^2$ vorhanden[31]); das vom Rande $\Theta_a^1$ zunächst erreichbare heiße $\bar{\Sigma}_j^1$. Den auf

[30]) Durch die Wahl von $\mathsf{T}^2$ können dieselben einfach und getrennt laufend erzielt werden.

[31]) Weil $\Sigma_j^1$ auf $\Sigma_j^2$ von den Rändern der Zone $Z_j^2$ — die ja auch einmal umlaufend sind — durch $\mathsf{T}^2$ getrennt liegen muß.

$\bar{\Omega}_j^2$ zwischen $\Theta_a^1$ und $\bar{\Sigma}_j^1$ gelegenen Ringstreifen gleichen wir an $Z_j^2$ an (die „Voraussetzung" in II 5. 4 ist ja erfüllt) unter Festhalten des Randes. Die gewonnenen Streifen $\breve{\Omega}_j^2$ haben nur $\Theta_a^1$ gemein und bilden zusammen einen Streifen $\breve{\Omega}^2$ mit Rändern $\bar{\Sigma}_j^1$. Wie man nun zu einem Streifen $\Omega^2$ gelangt, der ebenfalls zwischen den $\Sigma_j^2$ und *innerhalb* $U(R^2)$ verbleibt, aber die Ränder $\Sigma_j^1$ hat, ist klar: Zwischen $\bar{\Sigma}_j^1$ und $\Sigma_j^1$, die fremd sind, liegt ja auf $\Sigma_j^2$ ein in $U(R^2)$ verbleibender Ringstreifen, dessen Zufügung zu $\breve{\Omega}^2$ einen Streifen ergibt, der nur noch unter Festhalten der Ränder $\Sigma_j^1$ von den $Z_j^2$ abgelöst werden muß.

III 5. Erst jetzt ist die *gleichmäßige Approximation mit vorgeschriebenen Randbildern* möglich. Wir behandeln nur einen Fall, der II 8 und III 2 vereinigt:

*Gegeben eine Sphäre $S^2$ mit eingezeichnetem Polygon $S^1$*; $\Sigma^2$ bzw. $\Sigma^1$ sollen gleichmäßig approximieren, wobei $\Sigma^1$ *vorgegeben* ist in passender Lage, d. h. $\Sigma^1$ soll irreduzibel in $U(S^1)$ auf einer in $U(S^2)$ irreduziblen Sphäre $\Sigma_0^2$ liegen.

Setzen wir $U(S^2) = W^3$, $U(S^1) = R^3$, so haben wir dieselben Bezeichnungen wie in II 8 (Fig. 2). Wir haben genau die Aufgabe II 8, wenn wir unseren Umgebungskomplex durch gleichmäßige Approximation in die Metrik $M_g$ überführen, und zwar so, daß aus $W^3$ eine innerhalb $W^3$ liegende Schale $\Omega^3$, aus $R^3$ ein innerhalb $R^3$ liegender und $\Sigma^1$ enthaltender Ringraum $\mathsf{P}^3$, aus $A_1^3$ (bzw. $A_2^3$) ein nach $A_2^3$ (bzw. $A_1^3$) nicht hineinragender Elementarraum $\mathsf{A}_1^3$ (bzw. $\mathsf{A}_2^3$) entsteht. — Eine Sphäre $\Sigma^2$, welche der Aufgabe II 8 hinsichtlich dieses $M_g$-Umgebungskomplexes entspricht, wird dann durch $\Sigma^1$ gemäß $U(S^1)$ gescheitelt.

## IV. Gleichmäßige Approximation von Gebilden mit Punktzellen.

### IV 1. Scheitelung der eindimensionalen Sphäre.

Hält man sich daran, daß eine nulldimensionale Sphäre ein Punktepaar ist, so wird das Analogon zur Scheitelung der zweidimensionalen Sphäre (III 2) darin bestehen, *eine $S^1$, welche durch zwei Punkte geteilt ist, gleichmäßig zu approximieren.* Wir werden übrigens im folgenden stets annehmen, $S^1$ liege auf einer — mitzuapproximierenden — Sphäre $S^2$; dann gibt es keine Verknotungsfrage. — Wollten wir den Fall der nur durch *einen* Punkt $P^0$ geteilten $S^1$ ins Auge fassen, so würden wir mit der seither stets benutzten Definition der gleichmäßigen Approximation zu einer Trivialität kommen. Aus alledem wird verständlich, weshalb wir unter Verzicht auf das Wort „gleichmäßige Approximation" als Scheitelung ansehen folgende, nur *einen* Punkt benützende

Fundamentalaufgabe. *„Auf einer $S^1$ liege ein Punkt $P^0$. Stelle eine $M_g$-Sphäre $\Sigma^1$ in $U(S^1)$ her, welche in $U(P^0)$ einen solchen Punkt $\Pi^0$ trägt, daß die beiden innerhalb $U(S^1)$ liegenden Grenzflächen von $U(P^0)$ nicht mehr durch ein in $U(P^0)$ liegendes Stück von $\Sigma^1$ verbunden werden können, wenn $\Pi^0$ weggenommen wird."*

$S^1$ nehmen wir als auf $S^2$ liegend an, wie wir sagten; zur Lösung unserer Aufgabe ziehen wir noch eine Hilfssphäre $T^2$ heran, welche $S^2$ genau in $S^1$ durchsetzt und sowohl in den äußeren wie in den inneren Ergänzungsraum der sphärischen Schale $U(S^2)$ je eine Elementarfläche und sonst nichts entsendet. Zu gegebener Zeit wird auch $T^2$ approximiert werden. — Um die Lage deutlich zu überschauen, konstruieren wir ein

IV 1.1. *Modell des Umgebungskomplexes in der Nähe von $P^0$.* In einer zunächst von uns zu betrachtenden Umgegend von $P^0$ sei $U(S^1)$ ein gerades Prisma; die Ergänzung zum Raumring im ferneren Verlauf von $U(S^1)$ ist dem Belieben überlassen. In diesem Sinn werde $S^1$, soweit es uns interessiert, durch die $y$-Achse eines kartesischen, orthogonalen Systems mit $P^0$ im Ursprung dargestellt. Die Ebenen $z=0$ bzw. $x=0$ geben $S^2$ bzw. $T^2$ wieder. $U(S^2)$ bzw. $U(T^2)$ mögen durch das Ebenenpaar $z=\pm 2k$ bzw. $x=\pm k$ begrenzt werden. Jede dieser Ebenen symbolisiert also die Randsphäre einer sphärischen Schale. $U(S^1)$ ist dann ein Rechtecksprisma, dessen Flächen in diesen vier Ebenen liegen. $U(P^0)$ reiche von $y=-2k$ bis $y=+2k$. Ferner führen wir $U^*(P^0)$ ein als das von $y=-k$ bis $y=+k$ reichende Stück des Prismas. An Stelle dieses $U$-Systems benutzen wir längere Zeit ein System von kleineren Umgebungen $\bar{U}$, [32]) das wir erhalten, wenn wir als Grenzen der $S^2$-Umgebung an Stelle des Ebenenpaares $z=\pm 2k$ das durch $z=\pm k$ gegebene einführen. Wir erhalten so $\bar{U}(S^2)$ bzw. das quadratische Prisma $\bar{U}(S^1)$ und die wiederum zwischen $y=\pm 2k$ bzw. $y=\pm k$ verlaufenden $\bar{U}(P^0)$ bzw. $\bar{U}^*(P^0)$ In der Fig. 5 ist der Durchschnitt mit $x=0$ dargestellt unter der zeichnungserleichternden Annahme, daß $\Sigma^1$ in $x=0$ verlaufen soll.

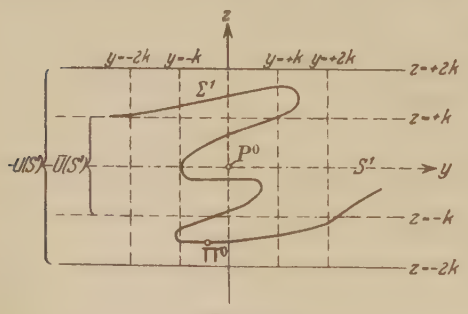


Fig. 5.

[32]) Welches im Gegensatz zu den früher gebrauchten $\bar{U}$-Systemen nicht ganz im Innern des $U$-Systems verläuft; gewisse Randflächen hat jedes $\bar{U}$ mit dem $U$ gemeinsam.

IV 1.2. *Gang der Konstruktion.* Erst wird $S^2$ bzw. $S^1$ in $\overline{U}(S^2)$ durch $\Sigma^2_{(0)}$ bzw. $\Sigma^1_{(0)}$ approximiert [33]). Der erste Versuch, $\Sigma^1_{(0)}$ in die geforderte Lage zu bringen, wird dahin gehen, mit einer Verschiebung auf $\Sigma^2_{(0)}$ auszukommen. Beispiele lehren, daß dies nicht ausreicht. Doch kommt man in einem noch genau zu präzisierenden Sinne der Lösung näher durch eine solche Verschiebung; sie führe nach $\Sigma^1_{(1)}$. Dann wird eine Regulierung von $\Sigma^2_{(0)}$ erforderlich (ergibt $\Sigma^2_{(1)}$), welche eine Wiederholung der Verschiebung auf $\Sigma^2_{(1)}$ nötig macht. Bei diesem Doppelprozeß wird *die Anzahl der auf* $\Sigma^1$ *liegenden, in* $\overline{U}(P^0)$ *von* $y=-2k$ *nach* $y=+2k$ *reichenden Strecken verringert.* Iterierung des Doppelprozesses führt noch nicht zu einer Reduktion dieser Anzahl auf die Eins, vielmehr muß nach einer gewissen Anzahl $l$ von Prozessen (diese ergeben $\Sigma^2_{(l)}$, $\Sigma^1_{(l)}$) innerhalb $U(T^2)$ das Bild $\mathfrak{T}^2$ so eingezeichnet werden, daß $\Sigma^2_{(l)}$ und $\mathfrak{T}^2$ sich in $\Sigma^1_{(l)}$ schneiden. Jetzt führt eine einzige Abänderung von $\Sigma^1_{(l)}$ auf $\mathfrak{T}^2$ zum Ziel. Nunmehr folgt die Beschreibung der Prozesse im einzelnen.

IV 1.3. *Der Übergang von* $\Sigma^i_{(0)}$ zu $\Sigma^i_{(l)}$ $(i=1,2)$.

Erster Doppelprozeß. a) Wir betrachten die verschiedenen Gebiete, welche $\Sigma^2_{(0)}$ mit $\overline{U}(P^0)$ gemein hat, und von ihnen diejenigen, welche Stücke [12]) von $\Sigma^1_{(0)}$ im Innern haben. Von diesen Gebieten gibt es nur endlich viele, $n$ an der Zahl, auf denen wenigstens ein solches $\Sigma^1_{(0)}$-Stück liegt, das auch $\overline{U}^*(P^0)$ betritt, denn $\Sigma^1_{(0)}$ hat endliche Länge und kann nicht unendlich oft zwischen $y^2=4k^2$ und $y^2=k^2$ oszillieren. Diese $n$ Gebiete nennen wir, ohne sie durch Indizes zu unterscheiden, $\mathfrak{H}_{(0)}$, und alle jene in $\overline{U}(P^0)$ liegenden Stücke von $\Sigma^1_{(0)}$, welche $\overline{U}^*(P^0)$ betreten, nennen wir $\varphi^1_{(0)}$.

b) Gewinnung von $\Sigma^1_{(1)}$. Nimmt man sämtliche $\varphi^1_{(0)}$ von $\Sigma^1_{(0)}$ weg, welche in einem *bestimmten* Gebiet $\mathfrak{H}_{(0)}$ liegen, so bleiben von $\Sigma^1_{(0)}$ gewisse Polygonzüge $\psi^1_{(0)}$, welche $\overline{U}^*(P^0)$ höchstens außerhalb dieses $\mathfrak{H}_{(0)}$ betreten, übrig. Die Endpunkte eines $\psi^1_{(0)}$ sind in $\mathfrak{H}_{(0)}$ erreichbar (z. B. durch die anschließenden $\varphi^1_{(0)}$), also kann man die beiden Endpunkte eines beliebigen $\psi^1_{(0)}$ innerhalb $\mathfrak{H}_{(0)}$ durch einen Polygonzug $\chi^1_{(0)}$ verbinden. Jedes $\psi$ wird durch das zugehörige $\chi$ zu einem geschlossenen, im allgemeinen singulären Polygon ergänzt, und es ist sicher, daß wenigstens für eines der $\psi$ ein in $\overline{U}(S^1)$ irreduzibles $\psi+\chi$ entstehen muß, sonst wäre $\Sigma^1_{(0)}$ selbst reduzibel. Nun läßt sich auf einem beliebigen dieser irreduziblen Polygone $\psi+\chi$ ein *singularitätenfreies*, in $\overline{U}(S^1)$ irreduzibles Polygon finden, welches von dem betreffenden Zug $\chi$ *höchstens ein* Stück enthält (Beweis ähnlich wie für II 1). Ein solches Polygon ist nach II 7.22 *ein einmaliger Umlauf* in

[33]) *Gleichmäßige* Approximation hier noch nicht nötig; es genügt II 7.21 und 22 zu benützen.

$\overline{U}(S^1)$. Diese Reduktion von $\Sigma^1_{(0)}$ zu diesem Umlauf führen wir sukzessive bei allen Gebieten $\mathfrak{H}_{(0)}$ durch und erhalten so schließlich *das Polygon* $\Sigma^1_{(1)}$, von dem wir wissen: 1. es ist ein einmaliger Umlauf in $\overline{U}(S^1)$, und 2. alle innerhalb $\overline{U}^*(P^0)$ liegenden Punkte von $\Sigma^1_{(1)}$ *jedes einzelnen Gebiets* $\mathfrak{H}_{(0)}$ gehören zu *je einem einzigen* in $\overline{U}(P^0)$ verbleibenden Stück $\omega^1_{(1)}$ von $\Sigma^1_{(1)}$.

c) Gewinnung von $\Sigma^2_{(1)}$. Wir beachten, daß $\Sigma^1_{(1)}$ einen Abstand $d_1 > 0$ von den beiden Wänden $x = \pm k$ behält und können daher $\Sigma^2_{(0)}$ so umändern, daß alle zwischen $x = \pm (k - d_1)$ liegenden Sphärenpunkte einem *absorbierenden Streifen* angehören, in welchem das soeben gewonnene $\Sigma^{(1)}_1$ enthalten ist, welcher aber seinerseits ganz zwischen $x = \pm k$ verbleibt. Dies erfordert Anwendung von III 5, woselbst (vgl. II 8) ohne weiteres ein absorbierender Streifen entsteht.

Weitere Doppelprozesse. Die Stücke $\omega^1_{(1)}$ — s. Eigenschaft (2) von $\Sigma^1_{(1)}$ — liegen unverändert auf $\Sigma^2_{(1)}$, aber durch die Abänderung von $\Sigma^2_{(0)}$ kann die charakteristische Eigenschaft (2) verloren gegangen sein: Auf gewissen der Gebiete $\mathfrak{H}_{(1)}$, welche auf $\Sigma^2_{(1)}$ die Rolle der $\mathfrak{H}_{(0)}$ übernehmen, können mehrere dieser $\omega^1_{(1)}$ versammelt worden sein, wobei sich die Anzahl der $\mathfrak{H}_{(1)}$ gegenüber $n$ verkleinert haben müßte. Iterieren wir also das Verfahren! Auf allen in Betracht kommenden $\mathfrak{H}_{(1)}$ ersetzen wir diese mehreren $\omega^1_{(1)}$ durch ein $\omega^1_{(2)}$. So erhalten wir $\Sigma^1_{(2)}$, welches vom Rande $x = \pm k$ den Abstand $d_2 > 0$ haben möge. Dieser Abstand erlaubt wieder die nachträgliche Schaffung der Absorptionszone unter Beibehaltung von $\Sigma^1_{(2)}$: Gewinnung der Sphäre $\Sigma^2_{(2)}$. Wieder ist die charakteristische Eigenschaft der $\omega^1_{(2)}$ gefährdet, aber diese Gefährdung bricht spätestens nach $(n-1)$ Schnitten ab, da wenigstens *ein* $\omega^1_{(j)}$ bei jedem einmaligen Umlauf in $\overline{U}(S^1)$ vorhanden sein muß. Nehmen wir also an, wir kämen mit $l < n$ zu der Sphäre $\Sigma^2_{(l)}$, welche den Absorptionsstreifen besitzt, und zu $\Sigma^1_{(l)}$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Es bleibt dann noch die Schwierigkeit, daß es i. a. mehr als ein Gebiet $\mathfrak{H}_{(l)}$ geben wird.

IV 1.31 Hilfssatz. *Zu denjenigen* $\mathfrak{H}_{(l)}$, *welche in* $\overline{U}^*(P^0)$ *sowohl an* $x = -k$ *als an* $x = +k$ *grenzen — wir nennen sie* $\mathfrak{G}_{(l)}$ —, *gehören alle diejenigen* $\mathfrak{H}_{(l)}$, *deren* $\omega^1_{(l)}$ *eine Verbindung zwischen* $y = -2k$ *und* $y = +2k$ *herstellt.*

Beweis. $\Sigma^1_{(l)}$ zerlege $\Sigma^2_{(l)}$ in die zwei Elementarflächen $\xi^2_1$ und $\xi^2_2$, deren erste keine Punkte mit $x = -k$, deren zweite keine Punkte mit $x = +k$ gemein hat. Auf $\xi^2_1$ gibt es ein Stück $\Xi$, welches von $\overline{U}(P^0)$ herausgeschnitten wird und ein bestimmtes $\omega^1_{(l)}$ auf dem Rande hat. Wir behaupten:

„Dasjenige Randstück von $\Xi$, zu welchem $\omega^1_{(l)}$ und eventuell noch andere Züge von $\Sigma^1_{(l)}$ gehören, enthält auch ein solches, nicht auf $\Sigma^1_{(l)}$, da-

gegen also *auf dem Rande von* $\overline{U}(P^0)$ *liegendes, Teilkontinuum* $\mathfrak{K}$, *welches* $y = -2k$ *mit* $y = +2k$ *verbindet.*"

In der Tat: Nimmt man von jenem Randstück den Teil $\omega^1_{(l)}$ — ohne dessen Endpunkte — weg, so enthält der (kontinuierliche) Rest Punkte von $y = -2k$ und $y = +2k$ zugleich. Nimmt man alle anderen zu $\Sigma^1_{(l)}$ gehörenden Züge — ohne Endpunkte — auch noch von $\mathfrak{K}$ weg, so liegen jedesmal die zwei Endpunkte auf derselben der beiden Ebenen $y = \pm 2k$, und jedesmal zerfällt der Rest des Randes erneut in zwei Teilkontinuen. Mit bekannten Sätzen über die Primenden (zyklische Anordnung usw. betreffend) erkennt man die Existenz des nicht zu $\Sigma^1_{(l)}$ gehörenden, $y = -2k$ mit $y = +2k$ verbindenden, zu $\Xi$ gehörenden Kontinuums $\mathfrak{K}$.

Da die beiden in $z = \pm k$ liegenden Randflächen von $\overline{U}(P^0)$, sowie die in $x = -k$ liegende nicht von $\xi^2_1$ getroffen werden, muß $\mathfrak{K}$ auf der in $x = +k$ liegenden Randfläche von $\overline{U}(P^0)$ gelegen sein und dort eine Verbindung zwischen $y = -2k$ und $y = +2k$ herstellen. Diese Randfläche enthält demnach für jedes $y$ mit $|y| < 2k$, a fortiori mit $|y| < k$, d. h. in $\overline{U}^*(P^0)$, Randpunkte von $\mathfrak{H}_{(l)}$. Dasselbe gilt für $x = -k$, wenn $\xi^2_2$ betrachtet wird. Q. e. d.

IV 1. 4. *Konstruktion von* $\mathsf{T}^2$. Nach Konstruktion gibt es eine Zahl $d_{(l)} > 0$, so daß alle zwischen $x = \pm(k - d_{(l)})$ liegenden Punkte von $\Sigma^2_{(l)}$ einem Absorptionsstreifen angehören, der zwischen $x = \pm k$ verbleibt. Dies erlaubt nach III 4. 4 die Konstruktion einer Sphäre $\mathsf{T}^2$ der Art, daß $\mathsf{T}^2$ mit $\Sigma^2_{(l)}$ genau $\Sigma^1_{(l)}$ gemein hat und immer in $U(T^2)$, d. h. in $|x| < k$ verbleibt. Wir wollen aber auch auf $\mathsf{T}^2$ einen Absorptionsstreifen haben, der alle in $|z| < k$, d. h. zu $\overline{U}(S^2)$ gehörenden Punkte von $\mathsf{T}^2$ umfaßt und ganz in $|z| < 2k$ verbleibt (s. III. 5). Daraus folgt dann, daß *jeder* in $|z| < k$ verlaufende einmalige Umlauf $\Sigma^1$ in dieser Zone ohne weiteres als scheitelnde Sphäre hinsichtlich der größeren Umgebung $U(S^1)$ betrachtet werden kann und daß man $\Sigma^1_{(l)}$ auf $\mathsf{T}^2$ nach $\Sigma^1$ verschieben kann, ohne andere Punkte zu überschreiten als solche, die in $|z| < 2k$, d. h. in $U(S^2)$ liegen.

IV 1. 5. *Auffindung von* $\Sigma^1$. $\mathsf{T}^2$ trennt die Ebenen $x = \pm k$. Also gibt es in $\overline{U}(P^0)$ wenigstens ein solches Stück $\mathfrak{T}$ von $\mathsf{T}^2$, welches für sich schon diese Trennung bewirkt (vgl. Anm. [23])). Greifen wir ein solches $\mathfrak{T}$ heraus: es muß jedes $\mathfrak{G}_{(l)}$ (s. Hilfssatz IV 1. 31) *durchsetzen*, die Durchdringung muß nach $\overline{U}^*(P^0)$ hineinreichen, also je ein $\omega^1_{(l)}$ enthalten.

Da es nur *ein* solches $\omega^1_{(l)}$ auf jedem $\mathfrak{H}_{(l)}$ gibt, gibt es auch nur *ein* Stück $\mathfrak{T}$, welches $\mathfrak{G}_{(l)}$ durchsetzt — *es gibt also überhaupt nur ein Stück* $\mathfrak{T}$, *welches aber alle* $\mathfrak{G}_{(l)}$ *durchsetzt. In diesem* $\mathfrak{T}$ *liegen* laut Hilfssatz IV 1. 31 *alle diejenigen* $\omega^1_{(l)}$, *welche* $y = -2k$ *mit* $y = +2k$ *verbinden.* Nehmen wir alle diese $\omega^1_{(l)}$ weg, so bleibt von $\Sigma^1_{(l)}$ eine Reihe von Polygonzügen $\tau^1$,

von denen keiner innerhalb $\overline{U}(P^0)$ die Verbindung zwischen $y = -2k$ und $y = +2k$ herstellt. Die zwei Endpunkte eines $\tau^1$ sind in $\mathfrak{T}^2$ erreichbar, wir verbinden sie durch je einen in $\mathfrak{T}$ verlaufenden Polygonzug $\varrho^1$ zu einem geschlossenen, evtl. singulären Polygon. Unter diesen Polygonen muß wenigstens eines in $U(S^1)$ [34]) irreduzibel sein. Auf einem solchen irreduziblen Polygon gibt es, wenn man II 1 auf den Absorptionsstreifen anwendet, ein singularitätenfreies, geschlossenes, $U(S^1)$ einmal umlaufendes Polygon, welches von dem gewählten $\varrho^1$ höchstens *ein* Stück enthält — aber auch wirklich eines (wie jeder einmalige Umlauf). *Dieses Polygon nennen wir* $\Sigma^1$. *Jeder der ihm zugehörigen Punkte von* $\varrho^1$ *kann als Punkt* $\Pi^0$ *im Sinne der Fundamentalaufgabe* IV 1 *benutzt werden.*

IV 1.6. *Auffindung von* $\Sigma^2$. $\Sigma^1$ liegt im allgemeinen nicht mehr auf $\Sigma^2_{(l)}$, es wurde unter Überschreitung eines in dem $T^2$-Absorptionsstreifen gelegenen, im allgemeinen singulären Ringstreifens verschoben. Dieser sowohl in $U(S^2)$ als auch in $U(T^2)$ liegende Ringstreifen kann längs $\Sigma^1_{(l)}$ zu jeder der beiden auf $\Sigma^2_{(l)}$ von $\Sigma^1_{(l)}$ berandeten Elementarflächen zugefügt werden. Die zwei entstehenden, von $\Sigma^1$ berandeten, singulären Elementarflächen können durch Ablösung von $T^2$ (bei festem $\Sigma^1$) entfernt und singularitätenfrei gemacht werden, ohne daß $U(S^2)$ überschritten würde. So gewinnen wir die endgültige Lage $\Sigma^2$.

## IV 2. Gleichmäßige Approximation einer aus mehreren Elementarstrecken zusammengesetzten $S^1$.

Eine Sphäre $\overline{\Sigma}^1$ bestehe aus $n$ Elementarstrecken $E^1_i$ mit den Zwischenpunkten $\Pi^0_i$; sie sei die gleichmäßige Approximation von $S^1$, geteilt durch $n$ Punkte $P^0_i$ in die Strecken $E^1_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Auf $E^1_1$ wird ein $(n+1)$-ter Punkt $P^0$ ausgezeichnet, man suche eine gleichmäßige Approximation der so veränderten $S^1$. Dabei liege $\overline{\Sigma}^1$ auf einer $\overline{\Sigma}^2$.

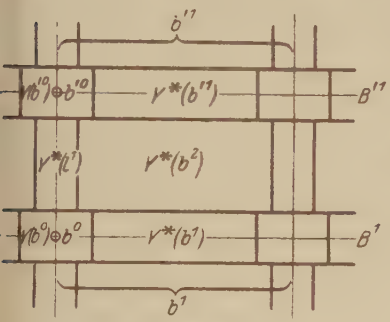
Hier ist IV 1 wörtlich übertragbar. Wir bemerken, daß jedes $\psi^1$ bzw. $\tau^1$ (entsprechend IV 1.3b) bzw. IV 1.5), also auch jede Lösung $\Sigma^1$, das ganze Polygon $\overline{\Sigma}^1$, vermindert um $E^1_1$, enthalten muß. *Nur* $E^1_1$ *wird geändert.*

## IV 3. Gleichmäßige Approximation eines besonderen Schemas auf einer $S^2$.

IV 3.1. *Das Modell.* Es kommt uns darauf an, die gleichmäßige Approximation einer $S^2$ fortlaufend sicherzustellen, wenn die Unterteilung der $S^2$ *zu beliebiger Feinheit* getrieben wird, ohne daß es auf die Be-

[34]) Dort verläuft das Polygon, weil es ja nur innerhalb $\overline{U}(P^0)$, also innerhalb des Absorptionsstreifens auf $T^2$, abgeändert wurde.

trachtung der Schemata allgemeinster Art ankäme[35]). Der kürzeren Darstellung halber beschränken wir uns auf einen besonderen Schematypus, bei welchem wir auf einer vorgegebenen $S^2$ zu beliebig feiner Teilung kommen können. Das Modell sei eine durch Breitenkreise in Zonen geteilte Kugelfläche, deren Zonen durch Stücke von Längenkreisen („Querlinien") in „Rechtecke" zerfallen, während die beiden Polkappen ungeteilt bleiben. In der Fig. 6 bedeuten die feinen Linien einen Teil dieses Schemas.




$$Y(b^0) = Y^*(b^0)$$
$$Y(l^1) = Y^*(b^0) + Y^*(l^1) + Y^*(b'^0) \text{ usw.}$$

Fig. 6.

IV 3.2. *Die Querlinien* $l_i^1$. Die gleichmäßige Approximation dieses $S^2$-Schemas ist nach III 4.2 und IV 2 durchführbar, wenn wir die Querlinien (s. IV 3.1) $l_i^1$ weglöschen, aber deren Endpunkte $b_i^0, b_i'^0, \ldots$ — welche auf den Breitenkreisen $B^1, B'^1, \ldots$ die Strecken $b_j^1, b_j'^1, \ldots$ bestimmen — belassen. Durch gleichmäßige Approximation kämen wir so zu einer Sphäre $\Sigma_0^2$, eingeteilt durch $\mathsf{B}^1, \mathsf{B}'^1, \ldots$, eingeteilt in die Zellen $\beta_j^1, \beta_j'^1, \ldots, \beta_i^0, \beta_i'^0, \ldots$. Um nun auch die Querlinien zu berücksichtigen, kümmern wir uns zuerst nicht um die Bilder der Rechtecks*flächen* $b_j^2, b_j'^2, \ldots$, sondern nur um die Zeichnung der *Bilder* $\lambda_i^1$ *der Querlinien* $l_i^1$ *für sich.*

Auf der von $B^1$ und $B'^1$ berandeten Zone $Z^2$ liege die Querlinie $l^1$ mit den Endpunkten $b^0$ bzw. $b'^0$. Das Bild von $Z^2$ auf $\Sigma_0^2$ sei $Z_0^2$. In $U(l^1)$ ist es offenbar möglich, *irgend* eine polygonale Verbindung $\breve{\lambda}^1$ auf $Z_0^2$ zwischen $\mathsf{B}^1$ und $\mathsf{B}'^1$ herzustellen (man schneide z. B. $\Sigma_0^2$ mit einer $M_g$-Sphäre, welche die zu $l^1$ gehörende Meridianebene in $U(l^1)$ passend approximiert). Diese Verbindung in den Punkten $\beta^0$ und $\beta'^0$ münden zu lassen ist sofort möglich, wenn man z. B. auf $\mathsf{B}^1$ von $\beta^0$ nach dem betreffenden Endpunkt von $\breve{\lambda}^1$ *innerhalb von* $U(l^1)$ gelangen kann. Dies

[35]) Auf dem Umweg über den Schalensatz und den Beweis des Hauptsatzes der 3-dimensionalen Topologie ergibt sich die gleichmäßige Approximation des allgemeinen 2-dimensionalen sphärischen Schemas von selbst. Für die *unmittelbare* Ausführung dieser gleichmäßigen Approximation wäre erforderlich die gleichmäßige Approximation der allgemeinen elementaren Unterteilung einer 1- und 2-dimensionalen Zelle im Verbande eines $S^2$-Schemas.

wiederum ist möglich, wenn man 1. auf $\mathsf{B}^1$ bzw. $\mathsf{B}'^1$ je eine absorbierende Strecke (s. I 6) über den Punkten $\beta^0$ bzw. $\beta'^0$ konstruiert hat, welche in $U(l^1)$ verbleibt und alle zu einer (verkleinerten) $\overline{U}(l^1)$ gehörenden Punkte von $\mathsf{B}^1$ bzw. $\mathsf{B}'^1$ enthält, und 2. $\check{\lambda}^1$ auf $\overline{U}(l^1)$ beschränkt. Durch einfache Abänderung von $\check{\lambda}^1$ entsteht $\lambda^1$; zwischen diesen $\lambda_i^1$ liegen die noch nicht endgültigen Viereckbilder $\tilde{\beta}_j^2$ auf $\Sigma_0^2$, sie liegen noch nicht im Innern von $U(b_j^2)$.

IV 3. 3. *Die Rechtecksflächen* $b_j^2$. Es liegt nahe, die so gewonnenen Flächenzellen $\tilde{\beta}_j^2$ derart zu regulieren, daß man sie erst ins Innere von $U(b_j^2)$ verweist (II 6), um dann die entstehenden gegenseitigen Durchdringungen durch Angleichung zu beseitigen. Sollen hierbei die Flächenzellen nicht von neuem $U(b_j^2)$ verlassen, so ist es nötig, zwischen die „Rümpfe" dieser anzugleichenden Flächen gewisse Streifen einzuschieben, an welche (simultan) angeglichen werden kann, ohne daß die genannte Schwierigkeit auftritt.

Von jetzt ab bezeichnen wir zusammenfassend die Zellen $b^0 \ldots b^1 \ldots l^1 \ldots b^2 \ldots$ mit $a^k$ $(k = 0, 1, 2)$, ihre Bilder mit $\alpha^k$. — Wir bedecken jedes $a^k$ auf $S^2$ mit einer in $U(a^k)$ liegenden *Flächenumgebung* $Y(a^k)$, s. I 5. Die Figur 6 zeigt ein solches $Y$-System (Rumpfumgebungen $Y^*(a^k)$). Die Bilder auf $\Sigma^2$ mögen $\Upsilon(\alpha^k)$ bzw. $\Upsilon^*(\alpha^k)$ heißen.

Die $Y^*(a^k)$ bestimmen auf $S^2$ ein Schema, das wiederum den Typus von IV 3. 1 hat. Für alle Zellen dieses Schemas wählen wir Umgebungen $\breve{U}$, die zusammen eine Komplexumgebung bilden sollen. Die Umgebung von $Y^*(a^k)$ soll innerhalb $U(a^k)$ verbleiben und $\breve{U}(Y^*(a^k))$ heißen. Bei gleicher Dimensionszahl $k$ sind diese $\breve{U}(Y^*(a^k))$ paarweise fremd, da die $Y^*(a^k)$ bei gleichem $k$ nichts, auch keinen Randpunkt, gemein haben.

Zuerst leisten wir gemäß IV 3. 2 die gleichmäßige Approximation des Streckenkomplexes in diesem neuen Schema. Das Bild liegt auf einer Sphäre $\Sigma_0^2$ und bewirkt dort eine Viereckteilung $\tilde{\Upsilon}^*(\alpha^k)$, die wir zwar nicht durch Verweisung und Angleichung in eine gleichmäßige Approximation der $Y^*(a^k)$-Teilung überführen können (so wenig wie entsprechend die $\alpha^2$-Teilung), die wir aber dahin verändern können, daß die $\Upsilon(\alpha^k)$ je als Ganzes in $U(a^k)$ verbleiben: Durch Verweisung der $\tilde{\Upsilon}^*(\alpha^k)$ ins Innere von $\breve{U}(Y^*(a^k))$ erhalten wir die Vierecke $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^k)$, wobei wiederum Vierecke mit gleichem $k$ paarweise *fremd bleiben*. Für $k = 0$ erklären wir $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^k)$ als die endgültige Lage $\Upsilon(\alpha^0)$. Für $k = 1$ nehmen wir erst noch gemäß II 5. 11 eine Simultanangleichung $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^k)$ an die $\Upsilon(\alpha^0)$ vor (mit welchen sie sich ja schneiden können). Dadurch treten zwar die $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^1)$ aus ihrer $\breve{U}$-Umgebung heraus, aber die durch Summierung der $\Upsilon^*$ $(k = 0$ und $1)$ entstehenden $\Upsilon(\alpha^1)$ liegen in den $\breve{U}(Y(a^1))$ und können daher als endgültig betrachtet werden. Für $k = 2$ gilt ganz Analoges: Die $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^2)$ schneiden zunächst den aus den $\Upsilon(\alpha^1)$ vereinigten Ringstreifen, an welchen sie an-

grenzen. Die sinngemäße Anwendung von II 5.31 läßt aber eine simultane Angleichung dieser $\overline{\Upsilon}^*(\alpha^2)$ an ihre angrenzenden Ringstreifen ohne Gefahr eines gegenseitigen Schnittes zu; so erhalten wir die endgültigen $\Upsilon(\alpha^2)$.

IV 3.4. *Abschluß.* Wir wählen in den $\Upsilon(\alpha^0)$ beliebig die $\alpha^0$, verbinden sie in den $\Upsilon(\alpha^1)$ irgendwie zu den Bildern der Breiten- und Längenkreisstrecken und haben eben damit auch die Vierecke $\alpha^2$ endgültig gefunden.

## IV 4. Gleichmäßige Approximation der sphärischen Schale mit spezieller Unterteilung.

IV 4.1. *Das Modell.* Zwischen zwei konzentrischen Kugeln $S^2$ und $S'^2$ liegt eine *Schale* $W^3$. Das auf der inneren Kugel $S^2$ eingetragene Schema sei radial auf die äußere Kugel $S'^2$ projiziert. Die Zellen $a^k$ $(k = 0, 1, 2)$ des Schemas von $S^2$ gehen dabei über in Zellen $'a^k$. Durch Unterteilung zerlegen wir diese $'a^k$ in die Zellen $a'^k$ eines feinergeteilten Schemas von $S'^2$. Dieses Schema soll jedoch ebenso wie das von $S^2$ den in IV 3.1 beschriebenen Typus wahren. — Das Innere von $W^3$ teilen wir durch die Wandzellen $e^k$ $(k = 1, 2)$, welche bei radialer Projektion der $a^j$ $(j = 0, 1)$ von $S^2$ nach $S'^2$ und von den $'a^j$ mitberandet werden, m. a. W. das Schema der Binnenzellen $e^k$ von $W^3$ ist das Produkt des $S^2$-Schemas mit einer Streckenzelle.

Bezüglich der Umgebungskomplexe dieses $W$-Komplexes, welche wir aus passenden $U(a^k)$, $U(a'^k)$ und $U(e^k)$ zusammensetzen können, ist zu beachten, daß — vom Kugelmittelpunkt aus gesehen — die Umgebungen der Zellen der äußeren Sphäre $S'^2$ im allgemeinen nicht denselben Raumwinkel ausfüllen können, wie die der (bei der radialen Projektion entsprechenden) Zellen von $S^2$, wegen der nach außen hin verfeinerten Teilung.

IV 4.2. *Die Randsphären.* Bei der gleichmäßigen Approximation der Randsphären $S^2$ und $S'^2$ legen wir (unter Vorbehalt noch weiterer Verfeinerung, siehe z. B. Ende der Ziffer) an Stelle der soeben beschriebenen Schemata je ein verfeinertes zugrunde. Wir schildern dasselbe nur für $S^2$. Wie in IV 3.3 führen wir ein flächenhaftes Umgebungssystem $Y(a^k)$ ein, bei welchem die $Y^*(a^k)$ von gleichem $k$ paarweise fremd sind. Und nun approximieren wir das aus den Flächen $Y^*(a^k)$ gebaute Schema gleichmäßig (was wir in IV 3.3 nicht taten und was eine Iteration des $Y$-Prozesses verlangt). Es soll also $\Upsilon^*(\alpha^k)$ als Bild von $Y^*(a^k)$ in $\tilde{U}(Y^*(a^k))$ verbleiben, s. IV 3.3. — Dabei sollen die $\Upsilon$-*Umgebungen einen bestimmten Absorptionscharakter* haben (I 6) hinsichtlich des Umgebungssystems $U(a^k)$ bzw. des „kleineren" Systems $\overline{U}(a^k)$. D. h. es sollen z. B. bei dem Bild $\Sigma^2$ von $S^2$ alle in $\overline{U}(a^k)$ gelegenen Punkte von $\Sigma^2$ in $\Upsilon(\alpha^k)$ enthalten sein, welches seinerseits im Innern von $U(a^k)$ verbleibt. Dies alles erreichen

wir mit den seitherigen Mitteln: Wir müssen nur von vornherein die Schemata auf $S^2$ bzw. $S'^2$ durch Einschiebung von Breiten- und Längenkreisen genügend verfeinern und die Parzellen nach der gleichmäßigen Approximation wieder zusammenfassen, sowie die $\overline{U}(a^k)$ genügend klein wählen.

IV 4.3. *Ringstreifen innerhalb $W^3$ längs der Breitenkreise.* Aus den Breitekreisen $B^1$, $B'^1$, ... entstehen bei der Zentralprojektion des $S^2$-Schemas ringstreifenförmige Wände in $W^3$, welche wir $B^2$, $B'^2$, ... nennen können und welche durch Zellen $e^1$ in „Rechtecke", das sind gewisse Zellen $e^2$, zerlegt werden (IV 4.1). Diese $B^2$... wollen wir in die gleichmäßige Approximation nunmehr einbeziehen. —

Bemerkung. In genau gleicher Weise läßt sich die gleichmäßige Approximation eines Komplexes durchführen, dessen Ringstreifen $B^2$... durch noch weitere Querlinien (radial zwischen den Streifenrändern) geteilt sind[36]).

IV 4.31. *Konstruktion gewisser Umgebungen.* Ebenso wie die Zellen $a'^k$ auf $S'^2$ zu den Zellen $'a^k$ zusammengefaßt werden (IV 4.1), können die Flächenumgebungen $Y^*(a'^k)$ zusammentreten zu Umgebungen $Y^*('a^k)$ bzw. $Y('a^k)$; die Raumumgebungen $U(a'^k)$ analog. Führen wir, wie wir das tun wollen, außerdem ein zweites System von Umgebungen $\overline{U}$ (je innerhalb des entsprechenden $U$) ein, so fassen wir auch die $\overline{U}(a'^k)$ entsprechend zusammen. Für einen sofort zu besprechenden Zweck wollen wir sogar die einzelnen $\overline{U}(a^k)$ und $\overline{U}(a'^k)$ durch Zusammenfassen gewisser Teile konstruieren, indem wir 1. aus der $a$-Teilung (ursprüngliches Schema der Sphären) durch Überlagerung der $Y^*$-Flächen eine Feinteilung gewinnen, welche sowohl aus der $a$-Teilung als auch aus der $Y^*$-Teilung (deren Flächenzellen gerade die $Y^*(a^k)$ und $Y^*('a^k)$ sein sollen) durch Unterteilung hervorgeht, und sodann 2. für diese Feinteilung der Sphären zuzüglich der innerhalb $W^3$ liegenden Zellen $e^j$ $(j = 1, 2)$ ein System von Umgebungen $\overline{U}$ konstruieren, dessen einzelne $\overline{U}^*$ zu den Umgebungen $\overline{U}(a^k)$, $\overline{U}(a'^k)$ und $\overline{U}(e^j)$ zusammenfaßbar sind. Ein solches $\overline{U}$-System hat folgende Eigenschaften, die wir benutzen werden: a) *Alle in $\overline{U}(e^j)$ enthaltenen Punkte von $S^2$ bzw. $S'^2$ liegen in $\Upsilon(\alpha^{j-1})$ bzw. $\Upsilon('\alpha^{j-1})$*, wenn $e^j$ längs $a^{j-1}$ bzw. $'a^{j-1}$ an die Ränder des Streifens $B^2$ grenzt und $\alpha^{j-1}$ bzw. $'\alpha^{j-1}$ die zugehörigen Bilder sind — weil wir ja in IV 4.2 die $\Upsilon(\alpha^k)$ mit Absorptionscharakter versehen haben, und weil deshalb die $\overline{U}(a^k)$ so klein sein müssen, daß kein $\Sigma^2$-Punkt von $\overline{U}(a^k)$ außerhalb $\Upsilon(\alpha^k)$ fällt und weil $\Upsilon(\alpha^k)$ im Innern von $U(a^k)$ konstruiert wird. b) *$\overline{U}(e^2)$ ist fremd zu $\overline{U}(Y^*(a^1))$ bzw. $\overline{U}(Y^*('a^1))$*, wenn $a^1$ bzw. $'a^1$

[36]) Die hierzu erforderliche *noch* feinere gleichmäßige Approximation der Sphären wird als Hilfskonstruktion vorausgesetzt.

*nicht* auf dem Rande von $e^2$ liegt, weil ja die $Y^*$ selbst inkl. Rand zu $e^2$ fremd sind.

IV 4.32. *Die gleichmäßige Approximation des auf $S^2$, $S'^2$ und den $B^2 \ldots$ liegenden Komplexes der $a^k$, $a'^k$ und $e^j$.* Nach gleichmäßiger Approximation der zwei Randsphären mit übereinandergelagertem $Y^*$- und $a$-Schema (IV 4.31) gemäß IV 4.2 spannen wir als Bilder der Ringstreifen $B^2 \ldots$ zwischen $\Sigma^2$ und $\Sigma'^2$ in die entsprechenden Ränder (= Breitenkreisbilder) $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}'^1, \ldots$ Ringstreifen $\tilde{\mathfrak{B}}^2$ ein, welche im Sinn von $M_g$ polyedral sind, in $\overline{U}(B^2)$ und in $W^3$ verbleiben (III 4.5)[36]). Auf diesen $\tilde{\mathfrak{B}}^2$ lassen sich als (endgültige) Bilder der $e^1$ in $\overline{U}(e^1)$ die Querlinien $\varepsilon^1$ zwischen den entsprechenden Punkten $\alpha^0$ bzw. $\alpha'^0$ von $\Sigma^2$ bzw. $\Sigma'^2$ aufzeichnen, wenn wir auf den $\mathfrak{B}^1$ bzw. $\mathfrak{B}'^1$ über die $\alpha^0$ bzw. $\alpha'^0$ gewisse absorbierende Streckenumgebungen gelegt denken[36]), welche die Konstruktion von IV 3.2 zu übertragen gestatten. Dann ist jeder Streifen $\tilde{\mathfrak{B}}^2$ eingeteilt in vorläufige $e^2$-Bilder $\tilde{\varepsilon}^2$. Diese $\tilde{\varepsilon}^2$ lassen sich unter Festhaltung ihrer Ränder analog zu IV 3.3 so abändern, daß sie zwar aus $\Sigma^2$ und $\Sigma'^2$ wieder heraustreten (in gewisser Entfernung von ihrem Rande), aber dafür in $\overline{U}(e^2)$ verbleiben[37]). Um den so erhaltenen Ringstreifen, bestehend aus neuen $e^2$-Bildern, wieder in den Raum zwischen $\Sigma^2$ und $\Sigma'^2$ zu bringen, gleichen wir ihn an den auf jeder der Sphären entlang dem Rande $\mathfrak{B}^1$ bzw. $\mathfrak{B}'^1$ laufenden, absorbierenden $\Upsilon$-Ringstreifen (s. IV 4.2) gemäß II 5.41 und III 4.5 an. Hierbei bemerken wir, daß die Durchdringungssysteme dieses $\Upsilon$-Streifens mit den einzelnen $e^2$-Bildern durch die $\varepsilon^1$ (welche ja ganz zwischen $\Sigma^2$ und $\Sigma'^2$ verbleiben) getrennt werden. Somit kann jedes $e^2$-Bild für sich allein angeglichen werden und dabei verbleibt es im Innern von $U(e^2)$, denn die Schnittfigur verläuft in $\overline{U}(e^2)$, liegt also nach IV 4.31 (Ende) innerhalb von $\Upsilon(\alpha^1)$ bzw. $\Upsilon('\alpha^1)$, wenn $\alpha^1$ bzw. $'\alpha^1$ die Ränder von $\tilde{\varepsilon}^2$ (auch nach deren Abänderung) auf $\Sigma^2$ bzw. $\Sigma'^2$ sind. Diese $\Upsilon$ liegen aber in $U(a^1)$ bzw. $U('a^1)$, also in $U(e^2)$, mit andern Worten: bei der Angleichung werden nur Punkte von $U(e^2)$ zur Ergänzung der abzuändernden $\tilde{\varepsilon}^2$ herangezogen. Da diese $\tilde{\varepsilon}^2$ auch nach der Verweisung ins Innere der $\overline{U}(e^2)$, abgesehen von den Rändern, paarweise fremd sind, kann die Angleichung wie in II 5.11 so durchgeführt werden, daß die entstehenden $e^2$-Bilder ohne gemeinsame Innenpunkte verlaufen, daher als endgültige $\varepsilon^2$ angesprochen werden dürfen.

IV 4.4. *Die in den Meridianebenen gelegenen Innenwände von $W^3$.*

---

[37]) Man muß hierzu durch zwei beiderseits von $\varepsilon^1$ in $\overline{U}(e^1)$ gelegene Querlinien (entsprechende Feinteilung von $\mathfrak{B}^1$ und $\mathfrak{B}'^1$ gemäß Anm. [36])!) aus $\tilde{\mathfrak{B}}^2$ ein Viereck (als Rechtecksbild auffaßbar) herausspalten, welches nach Verweisung ins Innere von $\overline{U}(e^1)$ die simultane Angleichung der beiden angrenzenden Restvierecke (Reste der an $\varepsilon^1$ stoßenden $\tilde{\varepsilon}^2$) erlaubt.

IV 4.41. *Das Modell.* Nach der Konstruktion IV 4.3 zerfällt das Bild von $W^3$ in zwei Polkappen und eine Reihe von Raumringen, entsprechend den Breitekreiszonen. Ein solcher Raumring $P^3$ wird von zwei benachbarten Ringstreifen $B_1^2$ und $B_2^2$ und je einer Zone von $\Sigma^2$ bzw. $\Sigma'^2$ berandet. Zum Abschluß der gleichmäßigen Approximation der in IV 4.1 beschriebenen $W^3$ muß nun noch jedes $P^3$ durch eine Reihe von Innenwänden $\varepsilon^2$ in Elementarzellen zerlegt werden. Die Ränder $\varkappa_i^1$ dieser Wände sind bereits festgelegt, sie bestehen aus je einer „Querlinie“ $\varepsilon_1^1$ bzw. $\varepsilon_2^1$ zwischen den Rändern des Streifens $B_1^2$ bzw. $B_2^2$, sowie aus je einer Strecke $\alpha^1$ bzw. $'\alpha^1$ (IV 4.1) von $\Sigma^2$ bzw. $\Sigma'^2$. Dabei sind $\alpha^1$ und $'\alpha^1$ Bilder von Längenkreisstrecken, die ganze Wandzelle ist Bild eines in einer Meridianebene gelegenen „Rechtecks“ $e^2$. Den berandenden Torus von $P^3$ nennen wir $T^2$; die vorgegebenen Ränder $\varkappa_i^1$ sind auf $T^2$ und im Äußeren von $P^3$ irreduzibel, zueinander fremd und auf $T^2$ homotop.

IV 4.42. *Einspannen irgendeiner Elementarfläche in einen vorgegebenen Rand* $\varkappa_i^1$.[38]). Schneide $T^2$ mit einer $M_g$-Sphäre $\Sigma_0^2$, welche sowohl im Innern als auch im Äußeren wenigstens einen zu ihr fremden Viereckrand $\varkappa_i^1$ enthält. $\Sigma_0^2$ kann z. B. die $M_g$-Approximation einer Meridianebene sein, die man sich außerhalb $\Sigma'^2$ zur $M_l$-Sphäre geschlossen denken mag. $\Sigma_0^2$ soll mit $T^2$ lauter getrennte, einfache Schnittpolygone haben — dann sind unter diesen wenigstens zwei, eines davon heiße $\bar{\varkappa}^1$, welche auf $T^2$ homotop zu den $\varkappa_i^1$ sind, denn zwei irreduzible, zueinander fremde $\varkappa_i^1$ (zu beiden Seiten von $\Sigma_0^2$) können nur durch wenigstens zwei solche einfache Polygone auf $T^2$ getrennt werden. $\bar{\varkappa}^1$ berande auf $\Sigma_0^2$ eine Elementarfläche $\eta^2$, ferner auf $T^2$ zusammen mit einem der zu ihm fremden $\varkappa_i^1$, z. B. mit $\varkappa_1^1$, den Ringstreifen $\varrho^2$. Dann ist $\varrho^2 + \eta^2$ ein von $\varkappa_1^1$ berandetes, längs $\varkappa_1^1$ singularitätenfreies Bild einer Elementarfläche, aus welchem wir nach dem Dehnschen Lemma eine Elementarfläche gewinnen.

IV 4.43. *Verweisung und Angleichung dieser Elementarfläche.* Von jetzt ab setzen wir ein solches $U$- bzw. $\overline{U}$-Umgebungssystem voraus, welches auch für die in IV 4.41 beschriebenen Rechtecke $e^2$ je eine Umgebung definiert: $U(e^2) \succ \overline{U}(e^2)$. Wir verweisen dann die in IV 4.42 vorläufig in den Rand $\varkappa_i^1$ eingespannte Elementarfläche gemäß II 6 ins Innere des zugehörigen $\overline{U}(e^2)$, ohne daß die Elementarfläche damit auch schon ins Innere von $T^2$ käme — der Schnitt verläuft aber in einer gewissen Entfernung von $\varkappa_i^1$. Würde dieser Schnitt sich auf einen $\varkappa_i^1$ bedeckenden

[38]) Diese Überlegung könnte durch andere Reihenfolge der Operationen erspart werden: Einspannung *eines* Streifens $B^2$ zerlegt die Schale in zwei Elementarräume; von da ab könnte man durch fortwährende elementare Unterteilung (vermittels von Wänden, welche auf Längen- oder Breitenkreisen radial aufstehen) weiter kommen; die Darstellung würde jedoch weniger einfach.

Streifen von $\mathsf{T}^2$ beschränken, der ganz innerhalb von $U(e^2)$ liegt, so könnten wir durch eine Angleichung (II 5.41) diesen Schnitt beseitigen, ohne dabei mit der Elementarfläche die Umgebung $U(e^2)$ zu verlassen — wir wären am Ziel.

Einen solchen Streifen auf $\mathsf{T}^2$ können wir uns bei geeigneter Approximation der Sphären und Breitenkreisstreifen $B^2 \ldots$ sichern. Über den Strecken $\alpha^1$ und $'\alpha^1$ (s. IV 4.41) ist eine absorbierende Flächenumgebung in Gestalt von $\Upsilon(\alpha^1)$ und $\Upsilon('\alpha^1)$ bereits vorhanden, über den Strecken $\varepsilon_1^1$ bzw. $\varepsilon_2^1$ (auf $\mathsf{B}_1^2$ bezw. $\mathsf{B}_2^2$) fehlt eine solche.

Wir greifen deshalb auf die „Bemerkung" zu IV 4.3 zurück und denken uns die gleichmäßige Approximation der Streifen $B_i^2$ $(i = 1, 2)$ auf Grund einer verfeinerten Unterteilung durchgeführt: Es soll auf $\mathsf{B}_i^2$ zwischen zwei geeigneten (beiderseits von $\varepsilon_i^1$ auf $\mathsf{B}_i^2$ von einem Rand zum andern laufenden[36]) Querlinien eine $\varepsilon_i^1$ bedeckende Elementarfläche $\mathsf{E}(\varepsilon_i^1)$ liegen, welche in $U(e_i^1)$ verbleibt und alle zu $\overline{U}(e_i^1)$ gehörenden Punkte von $\mathsf{B}_i^2$ absorbiert[36]). Die beiden $\mathsf{E}(\varepsilon_i^1)$ zusammen mit $\Upsilon(\alpha^1)$ und $\Upsilon('\alpha^1)$ enthalten dann einen Ringstreifen der verlangten Art.

## V. Der Schalensatz.

„Gegeben sei eine $M_l$-Sphäre $S^2$ und innerhalb $S^2$ eine $M_g$-Sphäre $\Sigma^2$. *Das von $S^2$ und $\Sigma^2$ berandete, abgeschlossene Raumstück ist eine sphärische Schale.*"

V 1. Daß das zwischen $S^2$ und $\Sigma^2$ liegende *Gebiet* einschließlich *einer* Randsphäre homöomorph ist zu der Punktmenge $1 \leqq x^2 + y^2 + z^2 < 2$, folgt leicht aus „S. S." Satz IV b, wenn wir eine Folge von fremden, sich hintereinander enthaltenden $M_g$-Sphären im Zwischenraum $[\Sigma^2, S^2]$ gegen $S^2$ häufen und II 4.3 benützen. Der Beweis des „inkl. *beider* Randsphären" ausgesprochenen Satzes erfordert die Benutzung der *gleichmäßigen* Approximation.

V 2. *Das Modell.* $S^2$ sei im Sinn von $M_l$ eine Kugelfläche. Lege zwischen $\Sigma^2$ und $S^2$ eine Folge von fremden, konzentrischen Kugelflächen[39]) $S_1^2, \ldots, S_n^2, \ldots$ mit $\lim\limits_{n=\infty} S_n^2 = S^2$. Die sphärische Schale $W_n^3$ zwischen $S_n^2$ und $S_{n+1}^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sei versehen mit einem Schema von der Art, wie in IV 4.1 beschrieben wird, und zwar soll das auf $S_n^2$ durch die Teilung von $W_{n-1}^3$ ($S_n^2$ als Außenrand) erzeugte Schema beibehalten werden, wenn wir die Teilung von $W_n^3$ ($S_n^2$ als Innenrand) wählen. Die Verfeinerung der Sphärenteilung von $S_{n+1}^2$ gegenüber $S_n^2$ lasse bei wachsendem $n$ für alle Zellen von $W_n^3$ den Durchmesser unter jede Größe sinken. — Für diesen

[39]) Wäre $S^2$ beliebig polyedral, so diente hier Satz IV b von „S. S.".

(von innen nach außen zu konstruierenden) unendlichen Komplex konstruiere (s. Einleitung) ebenfalls von innen nach außen einen in $W^3$ verbleibenden $U$-Umgebungskomplex.

V 3. *Die gleichmäßige Approximation* des aus der Folge von Schalen $W_n$ bestehenden Komplexes in dem $U$-Umgebungskomplex ist nach IV 4 möglich: Wir hatten dort zuerst die zwei Randsphären gleichmäßig approximiert und dann die Zellen der Zwischenwände. Dabei war freilich eine nachträgliche Verfeinerung der Randsphärenschemata nötig geworden, aber diese Verfeinerung war (kombinatorisch betrachtet) nur abhängig von dem Schema der Zwischenwände, d. h. also von dem Schema der *inneren*, gröber geteilten Randsphäre, so daß eine sukzessive gleichmäßige Approximation des unendlichen Schalenkomplexes von innen nach außen fortschreitend möglich ist.

V 4. *Die Abbildung.* Ist $\Sigma_n^3$ das so entstehende Bild von $S_n^2$, so kann $W_n^3$ auf die zwischen $\Sigma_n^3$ und $\Sigma_{n+1}^2$ gelegene Schale derart gebildet werden, daß jede Zelle jeder Dimension in die sie approximierende übergeht. Dabei entsteht eine topologische Abbildung der zwischen $\Sigma^2$ und $S_n^2$ bzw. zwischen $\Sigma^2$ und $\Sigma_n^2$ gelegenen Räume, welche bei $n \to \infty$ am Rand $S^2$ dann stetig ist, wenn wir die Abbildung des halboffenen Zwischenraumes durch die identische Abbildung von $S^2$ auf sich selbst zu einer Abbildung des abgeschlossenen Zwischenraumes ergänzen: Das Bild $\{\Pi_n\}$ einer gegen den auf $S^2$ gelegenen Punkt $\Pi = P$ konvergierenden Punktfolge $\{P_n\}$ hat einen $\lim \Pi_n$, und zwar im Punkte $P$.

(Eingegangen am 25. Oktober 1929.)

# Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

---

In dieser Arbeit soll folgender Satz bewiesen werden:

„Die Elemente der quadratischen Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}), \qquad \Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}), \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen. Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv |\Omega - \varrho E| = 0, \qquad E = \text{Einheitsmatrix},$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel und besitze eine Wurzel $\varrho_1$, die größer als Eins und der absolute Betrag der andern Wurzeln ist. Für großes $k$ ist dann asymptotisch

$$\Omega^k \sim \varrho_1^k \Gamma, \qquad \Gamma = (c_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Elemente der Matrix $\Gamma$ positiv sind. Bedeuten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $n$ komplexe Veränderliche, so sei mit

$$z^{(k)} = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z_\alpha^{(k)} = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet.

Weiter seien

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ \ldots, \ a_m > 0$$

$m$ algebraische Zahlen und

$$b_1(z) \not\equiv 0, \quad b_2(z) \not\equiv 0, \ \ldots, \ b_m(z) \not\equiv 0$$

$m$ rationale Funktionen in den $z_\alpha$ mit algebraischen Koeffizienten, die für $z_1 = \ldots = z_n = 0$ verschwinden. Die Potenzreihen

$$f_\mu(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_m=0}^{\infty} f_{h_1 \ldots h_m}^{(\mu)} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

sollen den Funktionalgleichungen

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, .., m)$$

genügen und es seien ihre Taylorkoeffizienten gleich algebraischen Zahlen. Ferner bestehe zwischen ihnen keine algebraische Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \,|\, z) \equiv 0,$$

wo das Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1, w_2, \ldots, w_m \,|\, z)$$

nicht identisch verschwindet.

Wenn dann die $m$ algebraischen Zahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ den Ungleichungen

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \cdots \mathfrak{z}_m \neq 0, \qquad \Re\Big(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_\beta\Big) < 0$$

genügen, wenn ferner die Nenner der rationalen Funktionen

$$b_1(z), b_2(z), \ldots, b_m(z)$$

in keinem der Punkte

$$\mathfrak{z}, \Omega\mathfrak{z}, \Omega^2\mathfrak{z}, \ldots$$

gleich Null sind, so sind die $m$ Zahlen

$$f_1(\mathfrak{z}), f_2(\mathfrak{z}), \ldots, f_m(\mathfrak{z})$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen, d. h. es besteht zwischen ihnen keine algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten."

Bei den betrachteten Funktionen herrscht also vollständige Analogie zwischen der funktionentheoretischen und arithmetischen Unabhängigkeit. In der Arbeit wird der genannte Satz kurz als Hauptsatz zitiert.

Das erste und zweite Kapitel bringt zunächst einige funktionentheoretische Entwicklungen über die Unabhängigkeit der Funktionen $f_\mu(z)$; hierfür werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Das dritte, vierte und fünfte Kapitel bringt dann den eigentlichen Beweis für den Hauptsatz, der folgendermaßen verläuft:

Seien mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ endlich viele, etwa genau $\mathfrak{n}$ Parameter bezeichnet, und sei

$$F(z \,|\, t) = \sum_{\alpha} t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} \ldots f_m(z)^{\alpha_m}$$

ein Polynom in den Funktionen $f_\mu(z)$. Alsdann besteht bei beliebigem natürlichen $k$ die Funktionalgleichung

$$F(z \,|\, t) = F(\Omega^k z \,|\, t^{(k)}),$$

und zwar gehen die Werte $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ aus den Werten $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ durch eine homogene lineare Transformation hervor, deren Koeffizienten außer von $k$ noch von den Zahlen $z_\alpha$ abhängen. Es sei $\mathfrak{z}$ ein fester Punkt in $\mathfrak{u}$ und $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$

ein festes System von Zahlen, die nicht alle verschwinden. Dabei ist u die Menge aller Punkte $z$, die den Ungleichungen

$$z_1 z_2 \dots z_n \neq 0, \qquad \Re\Big(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log z_\beta\Big) < 0,$$

$$b_1^*(\Omega^k z) \neq 0, \quad b_2^*(\Omega^k z) \neq 0, \quad \dots, \quad b_m^*(\Omega^k z) \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

genügen und $b_\mu^*(z)$ bedeutet den Nenner der rationalen Funktion $b_\mu(z)$. Mit $t^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ seien die zu $k$ und zu den Werten $\mathfrak{z}_\alpha$ gehörigen linear Transformierten der Zahlen $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ bezeichnet. Ferner werde

$$A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t) \quad \text{oder} \quad A(z|t) \nsim 0\,(\mathfrak{z}|t)$$

geschrieben, je nachdem ob für alle genügend großen $k$

$$A(\Omega^k \mathfrak{z}\,|\,t^{(k)}) = 0$$

ist oder nicht; dabei sei $A(z|t)$ ein beliebiges Polynom. Dieser Äquivalenzbegriff genügt den folgenden Regeln:

a) Aus $A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$, $B(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$ folgt $A(z|t) + B(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$.

b) Aus $A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$, $B(z|t)$ beliebig folgt $A(z|t)\,B(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$.

c) Aus $A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$ folgt $A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}^*|t)$, wenn $\mathfrak{z}^*$ in u liegt.

d) Aus $A(z|t) \nsim 0\,(\mathfrak{z}|t)$, $B(z|t) \nsim 0\,(\mathfrak{z}|t)$ folgt $A(z|t)\,B(z|t) \nsim 0\,(\mathfrak{z}|t)$.

Seien jetzt alle Annahmen des Hauptsatzes erfüllt; in einem geeigneten algebraischen Zahlkörper, etwa $K(s)$ vom Grad $K$, liegen dann gleichzeitig die Werte $\mathfrak{z}_\alpha$, $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, $a_\mu$, die Koeffizienten der Funktionen $b_\mu(z)$, und die der Funktionen $f_\mu(z)$. Vermöge der angegebenen Eigenschaften der „Äquivalenz" läßt sich dann zeigen:

„Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl $p$ gibt es $p+1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_h(z|t) \qquad (h = 0, 1, \dots, p)$$

mit folgenden Eigenschaften:

A. Die Polynome sind in den $z_\alpha$ und den $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ höchstens vom Grad $p$.

B. Ihre Koeffizienten sind Zahlen aus $K(s)$.

C. Es ist

$$\mathfrak{A}_0(z|t) \nsim 0\,(\mathfrak{z}|t).$$

D. Die Potenzreihe

$$\mathfrak{E}(z|t) = \sum_{h=0}^{p} \mathfrak{A}_h(z|t)\,F(z|t)^h = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

besitzt als Koeffizienten Polynome in den $t_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$; für

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leqq 2^{-3-\frac{n}{n}}\, p^{1+\frac{1}{n}} - 1$$

ist

$$\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t).\text{“}$$

Aus diesem Satz folgt weiter durch einfache Abschätzungen:

1. Ungleichung. Ist $p$ eine genügend große natürliche Zahl und durchläuft $k$ eine unendliche von $p$ abhängige Zahlfolge, so ist

$$|\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})| \geqq e^{-c_8 p \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Konstanten $c_8$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt.

2. Ungleichung. Ist $p$ eine genügend große natürliche Zahl und liegt $k$ oberhalb einer von $p$ abhängigen Schranke, so ist

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Konstanten $c_{12}$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt.

Sei jetzt der Hauptsatz falsch; dann gibt es also Werte der Parameter $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ aus $K(s)$, so daß

$$F(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) = F(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}) = \sum_{\alpha} \mathfrak{t}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} f_1(\mathfrak{z})^{\alpha_1} \cdots f_m(\mathfrak{z})^{\alpha_m} = 0$$

ist. Wie auch die natürlichen Zahlen $p$ und $k$ gewählt werden, muß also

$$\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) = \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})$$

sein, und das widerspricht den beiden letzten Ungleichungen. —

Das letzte Kapitel bringt als Anwendung auf die Reihe

$$\sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h,$$

$\omega > 0$ reelle quadratische Irrationalzahl, den Nachweis ihrer funktionentheoretischen Transzendental-Transzendenz.

Wegen des Beweises in dieser Arbeit sei auf meine beiden früheren verwiesen: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen“ und „Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in gewissen Punktfolgen“, beide in den Mathematischen Annalen.

## I.

**1.** Die quadratische Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

besitze folgende Eigenschaften:

a) Die Elemente $o_{\alpha\beta}$ sind nichtnegative ganze rationale Zahlen.

b) Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} o_{11} - \varrho & o_{12} & \cdots & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22} - \varrho & \cdots & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1} & o_{n2} & \cdots & o_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

c) Ihre Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sind sämtlich verschieden und genügen der Ungleichung

$$\varrho_1 > \max(1, |\varrho_2|, |\varrho_3|, \ldots, |\varrho_n|).$$

Unter diesen Annahmen besteht für die $k$-te Potenz

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

von $\Omega$ für großes natürliches $k$ die asymptotische Darstellung

$$\Omega^k \sim \varrho_1^k \Gamma.$$

Die Matrix

$$\Gamma = (c_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

hat dabei lauter positive Elemente und den genauen Rang Eins; die Glieder einer Zeile oder Spalte sind linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen.

Ist $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein Punkt im $n$-dimensionalen Raum mit beliebigen komplexen Koordinaten, so bezeichne

$$z^{(k)} = \Omega^k z$$

den Punkt mit den transformierten Koordinaten

$$z_\alpha^{(k)} = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist

$$\Omega^{k_1}(\Omega^{k_2} z) = \Omega^{k_1+k_2} z.$$

Die Punktmenge

$$\Re(\Lambda) < 0, \qquad z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0, \qquad \Lambda = \sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log z_\beta$$

heiße $\mathfrak{U}$. Nur für die Punkte von $\mathfrak{U}$ strebt mit wachsendem $k$ jede der $n$ Zahlen $z_\alpha^{(k)}$ gegen Null, ohne jedoch je diesen Wert wirklich anzunehmen.

Liegt $z$ in $\mathfrak{U}$, so genügt jedes Potenzprodukt

$$z_1^{(k)h_1} z_2^{(k)h_2} \ldots z_n^{(k)h_n}$$

mit rationalen Exponenten der asymptotischen Gleichung

$$\log(z_1^{(k)h_1} z_2^{(k)h_2} \ldots z_n^{(k)h_n}) \sim \mathsf{H} \Lambda \varrho_1^k, \qquad \mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha,$$

und zu zwei verschiedenen Produkten gehören auch verschiedene Zahlen $\mathsf{H}$ [1]).

2. Die $m$ Funktionen

$$f_\mu(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 h_2 \ldots h_n}^{(\mu)} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

[1]) Siehe das erste Kapitel meiner Arbeit: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen", Math. Annalen **101**, S. 342.

seien gleichzeitig in einer Umgebung des Nullpunktes regulär; die $\mu$-te von ihnen genüge der Funktionalgleichung

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

wobei

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

$m$ Zahlen ungleich Null und

$$b_1(z),\ b_2(z),\ \ldots,\ b_m(z)$$

$m$ rationale nicht identisch verschwindende Funktionen in den $z_\alpha$ sind, die im Nullpunkt $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = 0$ gleich Null sind. Es gebe ein nicht identisch verschwindendes Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z_1 z_2 \ldots z_n) = \mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z)$$

mit endlichen Koeffizienten, so daß die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) | z) \equiv 0$$

besteht.

**3.** Von zwei Produkten

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z)\, w_1^{\bar\alpha_1} w_2^{\bar\alpha_2} \ldots w_m^{\bar\alpha_m},$$

wo $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z) \not\equiv 0$ und $A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m} \not\equiv 0$ Polynome in den $z_\alpha$ und die Exponenten $\alpha_\mu$, $\bar\alpha_\mu$ nichtnegative ganze rationale Zahlen sind, heiße das erste von höherem Rang als das zweite, wenn die erste nichtverschwindende der Differenzen

$$\alpha_1 - \bar\alpha_1,\ \alpha_2 - \bar\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m - \bar\alpha_m$$

positiv ist; sind alle gleich Null, so heißen sie von gleichem Rang.

Ferner heiße ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0$$

von höherem Rang als ein zweites Polynom

$$\overline{\mathfrak{F}}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0,$$

wenn der Summand höchsten Ranges des ersten bei der Entwicklung nach Potenzen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ höheren Rang hat als der entsprechende Summand des zweiten Polynoms; sind beide Summanden von gleichem Rang, so seien auch die Polynome von gleichem Rang genannt.

Eine Folge von Polynomen

$$\mathfrak{F}_1(w_1 w_2 \ldots w_m | z),\quad \mathfrak{F}_2(w_1 w_2 \ldots w_m | z),\ \ldots,$$

in der jedes folgende Glied niedereren Rang hat als das vorhergehende, muß offenbar im Endlichen abbrechen.

**4.** Nach Voraussetzung gibt es ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0$$

mit

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) | z) \equiv 0.$$

Ohne Einschränkung kann der Rang desselben möglichst klein angenommen werden. Offenbar muß es eine der Veränderlichen $w_\mu$ mindestens zur ersten Potenz enthalten.

Neben der Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \,|\, z) \equiv 0$$

besteht die weitere Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(\Omega z), f_2(\Omega z), \ldots, f_m(\Omega z) \,|\, \Omega z)$$
$$\equiv \mathfrak{F}\left(\frac{f_1(z)-b_1(z)}{a_1}, \frac{f_2(z)-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{f_m(z)-b_m(z)}{a_m} \,\middle|\, \Omega z\right) \equiv 0.$$

Das Polynom

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\middle|\, \Omega z\right)$$

hat denselben Rang wie das Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z);$$

es gibt daher eine rationale Funktion

$$\mathfrak{F}^*(z) \not\equiv 0$$

in den Veränderlichen $z_\alpha$ allein, so daß die Differenz

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\middle|\, \Omega z\right) - \mathfrak{F}^*(z)\,\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$$

niedereren Rang hat. Nach der Minimalannahme über $\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$ ist das nur dann möglich, wenn diese Differenz in allen Veränderlichen identisch verschwindet, und somit ist

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\middle|\, \Omega z\right) \equiv \mathfrak{F}^*(z)\,\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z).$$

5. Aus den früheren Annahmen folgt, daß keine der Funktionen $f_\mu(z)$ identisch verschwindet. Da $\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$ eine der Veränderlichen $w_\mu$ von mindestens erstem Grad enthält, so müssen in der Entwicklung

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z) = \sum_\alpha A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}$$

nach Potenzen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ mindestens zwei Summanden

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z)\, w_1^{\bar\alpha_1} w_2^{\bar\alpha_2} \ldots w_m^{\bar\alpha_m}$$

verschiedenen Ranges und mit

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z) \not\equiv 0, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z) \not\equiv 0$$

vorhanden sein. Für sie seien diejenigen vom höchsten und einerhöchsten Rang ausgewählt. Die erste nichtverschwindende der Differenzen

$$\alpha_1 - \bar\alpha_1, \ \alpha_2 - \bar\alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_m - \bar\alpha_m$$

ist positiv; eine von ihnen verschwindet wirklich nicht.

Mit $\alpha$ sei die Summe aller positiven Differenzen $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu$, mit $\bar{\alpha}$ die Summe aller negativen Differenzen $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu$ bezeichnet; offenbar ist

$$\alpha \geqq 1, \quad \bar{\alpha} \leqq 0.$$

6. Es seien drei Fälle unterschieden.

1. Fall. Mindestens eine der Zahlen $\alpha$ und $-\bar{\alpha}$ ist größer als Eins. Sei etwa $\alpha \geqq 2$; ferner möge $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu \geqq 1$ sein. Dann ist

$$\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-1}}{\partial w_1^{\alpha_1} \dots \partial w_\mu^{\alpha_\mu-1} \dots \partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$
$$= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu,$$

da alle anderen Summanden herausfallen. Es besteht die Funktionalgleichung

$$\Phi\left(\frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots, \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

oder ausgeschrieben

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\Omega z)\left(\frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu}\right) \equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu.$$

Diese Gleichung ist aber gewiß falsch, da $b_\mu(z)$ nicht identisch verschwindet. Genau so gelangt man zu einem Widerspruch, wenn $\bar{\alpha} \leqq -2$ ist.

2. Fall. Die beiden Zahlen $\alpha$ und $-\bar{\alpha}$ sind gleich Eins.

In diesem Fall sei etwa

$$\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu = 1, \quad \alpha_\nu - \bar{\alpha}_\nu = -1, \qquad \mu > \nu,$$

während alle anderen Differenzen verschwinden. Dann ist

$$\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-1}}{\partial w_1^{\alpha_1} \dots \partial w_\mu^{\alpha_\mu-1} \dots \partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$
$$= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(z) w_\nu,$$

da die anderen Summanden wieder herausfallen. Es besteht die Gleichung

$$\Phi\left(\frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

oder ausgeschrieben

$$\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\Omega z)\left(\frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu}\right) + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(\Omega z)\left(\frac{w_\nu - b_\nu(z)}{a_\nu}\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z)\left(\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(z)\right.$$

Vergleich der entsprechenden Koeffizienten zeigt, daß erstens

$$R(\Omega z) = \frac{a_\mu}{a_\nu} R(z), \qquad R(z) \equiv \frac{\bar{\alpha}_1! \, \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! \, A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(z)}{\alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_m! \, A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z)}$$

und zweitens

$$R(\Omega z) = \frac{b_\mu(z)}{a_\mu} : \frac{b_\nu(z)}{a_\nu}$$

ist.

Die Funktionalgleichung

$$R(\Omega z) = \frac{a_\mu}{a_\nu} R(z)$$

hat aber nur dann eine rationale und nicht identisch verschwindende Lösung, wenn

$$\frac{a_\mu}{a_\nu} = 1$$

ist; alsdann ist die Lösung gleich einer beliebigen Konstanten $c_1 + 0$. Also ist nach der zweiten obigen Gleichung

$$b_\mu(z) \equiv c_1 \, b_\nu(z)$$

und damit

$$f_\mu(z) \equiv c_1 \, f_\nu(z) + c_2$$

mit einer weiteren Konstanten $c_2$.

3. Fall. Es ist $\alpha = 1$ und $\bar{\alpha} = 0$.

Sei etwa

$$\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu = 1,$$

während die anderen Differenzen verschwinden. Sei ferner

$$\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m - 1}}{\partial w_1^{\alpha_1} \dots \partial w_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots \partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

$$= \alpha_1! \, \alpha_2! \dots \alpha_m! \left( A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) \, w_\mu + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu - 1 \dots \alpha_m}(z) \right);$$

die anderen Summanden sind durch die Differenzierung herausgefallen. Man hat die Funktionalgleichung

$$\Phi\left( \frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots, \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z \right)$$

$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \, \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

oder ausgeschrieben

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\Omega z) \frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu - 1 \dots \alpha_m}(\Omega z)$$

$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \left( A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) \, w_\mu + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu - 1 \dots \alpha_m}(z) \right).$$

Die endliche und nicht identisch verschwindende rationale Funktion

$$R(z) = -\frac{1}{a}\,\frac{A_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu - 1 \dots \alpha_m}(z)}{A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z)}$$

genügt somit der Gleichung

$$R(z) = a_\mu R(\Omega z) + b_\mu(z)$$

und unterscheidet sich nur um eine Konstante von der Funktion $f_\mu(z)$, die also auch rational sein muß.

7. Die letzten Überlegungen haben zu folgendem Satz geführt:

Satz 1. *Zwischen den $m$ Funktionen*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \dots,\ f_m(z)$$

*besteht dann und nur dann eine algebraische Gleichung*

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z) \mid z) = 0, \qquad \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m \mid z) \not\equiv 0,$$

*wenn entweder eine von ihnen eine rationale Funktion ist, oder wenn zwei von ihnen einer Gleichung*

$$f_\mu(z) \equiv c_1 f_\nu(z) + c_2$$

*mit konstanten Koeffizienten $c_1$ und $c_2$ genügen und gleichzeitig*

$$a_\mu = a_\nu$$

*ist.*

## II.

8. Aus dem letzten Satz lassen sich Folgerungen über die Differentialgleichungen erhalten, denen die Funktionen $f_\mu(z)$ genügen.

Mit

$$o_1^{(\lambda)},\ o_2^{(\lambda)},\ \dots,\ o_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

seien die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile von

$$\begin{vmatrix} o_{11} - \varrho_\lambda, & o_{12}, & \dots, & o_{1n} \\ o_{21}, & o_{22} - \varrho_\lambda, & \dots, & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1}, & o_{n2}, & \dots, & o_{nn} - \varrho_\lambda \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} o_1^{(1)}, & o_2^{(1)}, & \dots, & o_n^{(1)} \\ o_1^{(2)}, & o_2^{(2)}, & \dots, & o_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_1^{(n)}, & o_2^{(n)}, & \dots, & o_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, denn sonst gäbe es $n$ Zahlen $o_1, o_2, \ldots, o_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$\sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\alpha = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Die Koeffizienten in diesen Gleichungen sind algebraisch konjugiert; somit wären die Zahlen $o_\alpha$ alle gleich rationalen Zahlen wählbar, und die $n$ Zahlen $o_1^{(\lambda)}, o_2^{(\lambda)}, \ldots, o_n^{(\lambda)}$ wären in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear abhängig; das ist aber falsch [2]).

9. Die $n$ Operatoren

$$\mathfrak{D}_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen keiner homogenen linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten, die nicht alle verschwinden; aus ihnen lassen sich die Ausdrücke

$$z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen. Es ist

$$\mathfrak{D}_\lambda \mathfrak{D}_\mu = \mathfrak{D}_\mu \mathfrak{D}_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\beta^{(\mu)} z_\alpha z_\beta \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\alpha^{(\mu)} z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}.$$

Bedeutet $f(z)$ eine beliebige analytische Funktion in den $z_\alpha$, so ist

$$\mathfrak{D}_\lambda f(z) = \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} f_{(\alpha)}(z), \qquad f_{(\alpha)}(z) = z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} f(z)$$

und

$$\mathfrak{D}_\lambda f(\Omega z) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} o_{\alpha\beta} o_\beta^{(\lambda)} z_\alpha^{(1)} f_{(\alpha)}(\Omega z) = \varrho_\lambda \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} z_\alpha^{(1)} f_\alpha(\Omega z), \qquad z^{(1)} = \Omega z.$$

Allgemeiner besteht die Beziehung

$$\mathfrak{D}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{D}_n^{l_n} f(\Omega^k z) = \varrho_1^{l_1} \ldots \varrho_n^{l_n} \mathfrak{D}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{D}_n^{l_n} f(z) \,|_{\Omega^k z}.$$

Die Operatoren

$$\mathfrak{D}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{D}_n^{l_n}$$

sind also gegenüber der Transformation

$$z \to \Omega^k z$$

bis auf einen konstanten Faktor invariant.

Die einzige im Nullpunkt reguläre Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{D}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{D}_n^{l_n} f(z) \equiv 0$$

ist offenbar eine beliebige Konstante.

---

[2]) Siehe loc. cit. [1]) S. 348.

**10.** Sei

$$f(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 h_2 \dots h_n} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \dots z_n^{h_n}$$

eine beliebige Funktion, die in der Umgebung des Nullpunktes regulär ist; sie genüge der Funktionalgleichung

$$f(z) = a f(\Omega z) + b(z),$$

deren Koeffizienten eine Konstante $a \neq 0$ und eine rationale im Nullpunkt verschwindende Funktion $b(z) \not\equiv 0$ sind. Alsdann sind die abgeleiteten Funktionen

$$f_{l_1 l_2 \dots l_n}(z) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} \dots \mathbf{D}_n^{l_n} f(z) \qquad (l_1, l_2, \dots, l_n = 0, 1, 2, \dots)$$

gleichfalls in der Umgebung des Nullpunktes regulär und genügen der Funktionalgleichung derselben Art

$$f_{l_1 l_2 \dots l_n}(z) = a \varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} \dots \varrho_n^{l_n} f_{l_1 l_2 \dots l_n}(\Omega z) + b_{l_1 l_2 \dots l_n}(z),$$

$$b_{l_1 l_2 \dots l_n}(z) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} \dots \mathbf{D}_n^{l_n} b(z).$$

Man kann daher auf irgend $m$ aus der Reihe der Funktionen $f_{l_1 l_2 \dots l_n}(z)$ ohne weiteres Satz 1 anwenden.

Ein Fall sei besonders angeführt. Wir nehmen an, daß die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ einer Gleichung mit rationalen Exponenten

$$\varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} \dots \varrho_n^{l_n} = 1$$

nur dann genügen, wenn diese Exponenten alle gleichzeitig verschwinden. Ferner sei keine der Funktionen $f_{l_1 l_2 \dots l_n}(z)$ rational. Nach Satz 1 besteht dann zwischen endlich vielen dieser Funktionen keine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in den $z_\alpha$ sind. Nun lassen sich offenbar aus den Ableitungen

$$f_{l_1 l_2 \dots l_n}(z) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} \dots \mathbf{D}_n^{l_n} f(z) \qquad \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n = 0, 1, 2, \dots \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n \leqq l \end{pmatrix}$$

die sämtlichen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{l_1 + l_2 + \dots + l_n} f(z)}{\partial z_1^{l_1} \partial z_2^{l_2} \dots \partial z_n^{l_n}} \qquad \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n = 0, 1, 2, \dots \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n \leqq l \end{pmatrix}$$

linear zusammensetzen, so daß die Koeffizienten rationale Funktionen in den $z_\alpha$ sind. Die Funktion $f(z)$ ist also transzendental-transzendent.

**11.** Von den letzten Ergebnissen seien einige Anwendungen erwähnt.

Im einfachsten Fall $n = 1$ handelt es sich um die Lösungen der $m$ Funktionalgleichungen in der einen Veränderlichen $z$

$$f_\mu(z) = a \varrho^\mu f_\mu(z^\varrho) + b(z) \qquad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

und zwar ist $\varrho$ eine beliebige natürliche Zahl größer als Eins. Sind die sämtlichen Funktionen

$$f_\mu(z) = \mathbf{D}^\mu f(z)$$

irrational, so sind sie nach vorhin auch algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von $z$. Speziell ergibt sich so z. B. die Transzendental-Transzendenz der Funktionen

$$f(z) = \sum_0^\infty z^{2^n} \quad , \qquad f(z) = f(z^2) + z;$$

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^n}}, \qquad f(z) = f(z^2) + \frac{z}{1-z};$$

$$f(z) = \sum_0^\infty q(h) z^h = \frac{1}{1-z} \sum_0^\infty \frac{z^{2^n}}{1 + z^{2^n}}, \qquad ((1-z) f(z)) = ((1-z^2) f(z^2)) + \frac{z}{1+z};$$

$$q(h) = \text{diadischer Quersumme,}$$

denn diese sämtlichen Funktionen sind nicht nur samt den Ableitungen $f_\mu(z)$ irrational, sondern sogar nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.

Für den Fall mehrerer Veränderlichen sei die Reihe

$$f(z) = \sum_0^\infty z_1^{a_h} z_2^{a_h+1} \dots z_n^{a_h+n-1}$$

genannt, wo

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \dots, \quad a_{n-2} = 0, \quad a_{n-1} = 1; \quad a_{k+n} = \sum_{h=1}^{n} c_h a_{k+n-h}$$

ist, die Zahlen

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

alle nichtnegativ und ganz rational sind und die Gleichungswurzeln der irreduziblen Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \varrho^n - c_1 \varrho^{n-1} - c_2 \varrho^{n-2} - \dots - c_n = 0$$

der früheren Bedingung

$$\varrho_1 > \max(1, |\varrho_2|, \dots, |\varrho_n|)$$

genügen. Besteht zwischen den Wurzeln keine Gleichung

$$\varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} \dots \varrho_n^{l_n} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so ist die Funktion $f(z)$ transzendental-transzendent. Denn einerseits genügt diese Funktion der Gleichung

$$f(z) = f(\Omega z) + z_n, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_1 \end{pmatrix},$$

und andererseits ist sie nicht über den Rand des Gebietes

$$\Re(\log z_1 + \varrho_1 \log z_2 + \ldots + \varrho_1^{n-1} \log z_n) < 0$$

fortsetzbar.

Anders ist es dagegen z. B. bei der Reihe

$$f(z_1 z_2) = \sum_0^\infty z_1^{a_h} z_2^{a_{h+1}}, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ \ldots,\ a_{h+1} = a_h + a_{h-1}.$$

Hier ist

$$f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1 z_2) + z_2; \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

die Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} -\varrho & 1 \\ 1 & 1-\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - \varrho - 1 = 0$$

hat die Wurzeln

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \varrho_2 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \qquad (\varrho_1 > 1,\ \varrho_1 > |\varrho_2|).$$

Offenbar ist

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 = 1.$$

Die Funktion

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z_1 z_2)$$

genügt der Gleichung

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} f_{l_1 l_2}(z_2, z_1 z_2) + L_{l_1 l_2} \cdot z_2.$$

Dabei ist $L_{l_1 l_2} \neq 0$ eine reelle Konstante, die allein von $l_1$ und $l_2$ abhängt. Aus dieser Funktionalgleichung ergibt sich die Differentialgleichung

$$f_{22}(z_1 z_2) \equiv L_{22} f_{00}(z_1 z_2), \qquad \text{d. h.} \qquad L_{22} f(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^2 \mathbf{D}_2^2 f(z_1 z_2).$$

Die Funktion $f(z_1, z_2)$ ist also nicht transzendental-transzendent. Dagegen zeigt sich nach Satz 1, daß irgend $m$ Ableitungen

$$f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \quad f_{l_1^{(2)} l_2^{(2)}}(z_1 z_2), \quad \ldots, \quad f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2)$$

dieser Funktion algebraisch unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von $z_1$ und $z_2$, wenn keine zwei der Differenzen

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)}, \quad l_1^{(2)} - l_2^{(2)}, \quad \ldots, \quad l_1^{(m)} - l_2^{(m)}$$

gleich derselben geraden Zahl sind. Speziell sind also die Funktionen

$$\mathbf{D}_1^l f(z_1 z_2), \quad \mathbf{D}_1^l \mathbf{D}_2 f(z_1 z_2), \quad \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^{l+1} f(z_1 z_2), \quad \mathbf{D}_2^{l+1} f(z_1 z_2)$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu beliebig endlich vielen algebraisch unabhängig.

12. Endlich sei noch auf die Reihe

$$f(z) = f(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

eingegangen, in der $\omega$ eine positive quadratische irrationale Zahl ist. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn der Kettenbruch von $\omega$ reinperiodisch und von gerader Periodenlänge angenommen wird. Alsdann ist die Differenz

$$f(z) - f(\Omega z) = b(z)$$

eine rationale Funktion von $z_1$ und $z_2$; $\Omega$ bedeutet die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} p_\nu & q_\nu \\ p_{\nu-1} & q_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

und $p_\nu$, $q_\nu$, $p_{\nu-1}$, $q_{\nu-1}$ sind gewisse Näherungsnenner und -zähler von $\omega$, zwischen welchen die Gleichungen

$$\omega = \frac{q_\nu + q_{\nu-1}\omega}{p_\nu + p_{\nu-1}\omega}, \qquad p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = 1$$

bestehen. Es ist in diesem Fall

$$\varrho_1 = p_\nu + p_{\nu-1}\omega, \qquad \varrho_2 = q_{\nu-1} - p_{\nu-1}\omega \qquad (\varrho_1 > 1,\ \varrho_1 > |\varrho_2|).$$

Die früheren Annahmen sind also erfüllt[3]).

Man hat nun

$$\varrho_1 \varrho_2 = 1.$$

Ferner ist bekanntlich die Funktion $f(z_1, z_2)$ nicht in den ganzen Raum fortsetzbar, also auch keine der Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1, z_2) \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß dieselben sämtlich irrational sind.

Der Formel

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} (o_1^{(1)} h_1 + o_2^{(1)} h_2)^{l_1} (o_1^{(2)} h_1 + o_2^{(2)} h_2)^{l_2} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

entnimmt man, daß keine zwei der Funktionen $f_{l_1 l_2}(z_1, z_2)$ einer linearen Gleichung

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) + c_1 f_{\bar{l}_1 \bar{l}_2}(z_1 z_2) + c_2 \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten genügen; denn dann müßte

$$l_1 - l_2 = \bar{l}_1 - \bar{l}_2$$

und für alle Werte von $h_1$ und $h_2$, über die summiert wird, die Form

$$(o_1^{(1)} h_1 + o_2^{(1)} h_1)(o_1^{(2)} h_1 + o_2^{(2)} h_2)$$

gleich derselben Zahl sein, und das ist falsch.

---

[3]) Siehe loc. cit. [1]), S. 363.

Satz 1 darf also angewandt werden, und man erhält:

„Beliebig endlich viele der Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen. Die Funktion $f(z_1, z_2)$ ist daher transzendental-transzendent."

**13.** Satz 1 macht eine Aussage über die Abhängigkeit von Funktionen in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen in den $z_\alpha$. Wird etwa für eine dieser Veränderlichen ein spezieller Zahlwert eingesetzt, so läßt sich zunächst gar nichts behaupten, z. B. über die Funktion einer Veränderlichen

$$f(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [\omega h] z^h.$$

Später wird sich jedoch als ein Nebenergebnis auch die Transzendental-Transzendenz dieser Funktion herausstellen.

## III.

**14.** Satz 2. *Seien*

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

*$M$ verschiedene positive Zahlen,*

$$A_\tau(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

*$M$ Potenzreihen, die in der Umgebung des Nullpunktes konvergieren und nicht alle identisch verschwinden. Ist $\mathfrak{z}$ ein fester Punkt in $\mathfrak{U}$, so gibt es eine Folge $K$ von ins Unendliche wachsenden natürlichen Zahlen*

$$k_1, k_2, k_3, \ldots,$$

*so daß für alle Zahlen $k$ aus $K$*

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(\Omega^k \mathfrak{z}) \neq 0$$

*ist*[4]).

**15.** Nach 1. lassen sich die Glieder

$$A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n}$$

der Reihen

$$A_\tau(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

auf genau eine Art nach wachsenden Werten der Summe

$$\mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha$$

---

[4]) Zum folgenden Beweis vergleiche man meine Arbeit „Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in gewissen Punktfolgen", die demnächst in den Math. Annalen erscheint.

anordnen; dabei sind alle Glieder auszulassen, deren Koeffizient $A^{(\tau)}_{h_1 \dots h_n}$ verschwindet. Da die $M$ Reihen $A_\tau(z)$ nicht alle identisch verschwinden, so gibt es genau eine kleinste Zahl

$$\mathsf{H}_0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha^0,$$

so daß die $M$ Koeffizienten

$$A^{(\tau)}_{h_1^0 \dots h_n^0} \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M)$$

nicht alle Null sind. Für alle anderen Summanden ist die zugehörige Zahl $\mathsf{H}$ mindestens gleich $\mathsf{H}_0 + \alpha$, wo $\alpha$ eine feste positive Zahl bedeutet.

16. Zuerst werde eine obere Schranke für

$$\Sigma_k = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \sum_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0} A^{(\tau)}_{h_1 \dots h_n} \, \mathfrak{z}_{\mathfrak{d}1}^{(k) h_1} \cdots \mathfrak{z}_{\mathfrak{d}n}^{(k) h_n} \qquad (\mathfrak{z}_{\mathfrak{d}}^{(k)} = \Omega^k \mathfrak{z}_{\mathfrak{d}})$$

bestimmt. Nach bekannten Sätzen gibt es $n+1$ positive Zahlen

$$R_0, R_1, \dots, R_n,$$

so daß für alle Werte der Indizes $h_1, h_2, \dots, h_n, \tau$

$$|A^{(\tau)}_{h_1 \dots h_n}| \leqq R_0 R_1^{h_1} \dots R_n^{h_n}$$

ist. Wird weiter $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt, so ist gleichmäßig in den $h_\alpha$

$$|\mathfrak{z}_{\mathfrak{d}1}^{(k) h_1} \cdots \mathfrak{z}_{\mathfrak{d}n}^{(k) h_n}| \leqq e^{\mathsf{H}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}$$

für großes $k$, wobei

$$\Lambda_0 = \Re\Big(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_{\mathfrak{d}\beta}\Big) < 0$$

gesetzt wurde. Somit hat man

$$|\Sigma_k| < \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \sum_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0} R_0 \Big(R_1 e^{\frac{c_{11}}{c_{11}}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_1} \dots \Big(R_n e^{\frac{c_{n1}}{c_{11}}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_n}.$$

Die Summe $\sum_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0}$ rechts ist bis auf endlich viele Glieder das Produkt von $n$ geometrischen Reihen; für großes $k$ spielen daher die Glieder mit möglichst kleinen $\mathsf{H}$-Werten die Hauptrolle. Durch Verschlechtern der vorigen Abschätzung folgt für großes $k$

$$|\Sigma_k| \leqq e^{-\mathsf{H}_1 \frac{\varepsilon}{2} \Lambda_0 \varrho_1^k} e^{\mathsf{H}_1 \left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Lambda_0 \varrho_1^k} = e^{\mathsf{H}_1 (1-2\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}.$$

$\mathsf{H}_1$ ist dabei die kleinste der Zahlen $\mathsf{H}$, die größer als $\mathsf{H}_0$ ist.

Somit ist nach 15.:

$$|\Sigma_k| \leqq e^{(\mathsf{H}_0+\alpha)(1-2\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}.$$

17. Die Summe

$$\Sigma_k^0 = \Big( \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \dots h_n^0}^{\tau} \Big) \vartheta_1^{(k) h_1^0} \dots \vartheta_n^{(k) h_n^0}$$

der noch fehlenden Summanden läßt sich nach unten abschätzen. Zunächst ist für alle genügend großen natürlichen Zahlen $k$

$$|\vartheta_1^{(k) h_1^0} \dots \vartheta_n^{(k) h_n^0}| \geqq e^{(H_0 + \alpha\varepsilon) \Delta_0 e_1^k}.$$

Weiter gibt es, wie in 18. gezeigt wird, eine Folge $K$ von ins Unendliche wachsenden natürlichen Zahlen

$$k_1, k_2, k_3, \dots$$

und eine positive Zahl $c$, so daß für $k$ in $K$

$$\Big| \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \dots h_n^0}^{(\tau)} \Big| \geqq c^k$$

ist. Erst recht ist in dieser Folge

$$|\Sigma_k^0| \geqq e^{(H_0 + 2\alpha\varepsilon) \Delta_0 e_1^k},$$

und wenn

$$H_0 + 2\alpha\varepsilon < (H_0 + \alpha)(1 - 2\alpha\varepsilon), \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon < \frac{1}{2H_0 + 2\alpha + 2}$$

angenommen wird:

$$\Big| \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau (\Omega^k \vartheta) \Big| \geqq |\Sigma_k^0| - |\Sigma_k| > 0,$$

wie es Satz 2 verlangt.

18. Um die obige Lücke auszufüllen, werde die erzeugende Funktion

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \dots h_n^0}^{(\tau)} \Big) u^k = \sum_{\tau=1}^{M} \frac{A_{h_1^0 \dots h_n^0}^{(\tau)}}{1 - \mathsf{A}_\tau u}$$

benutzt. Als rationale Funktion hat sie einen Sinn in der ganzen $u$-Ebene. Offenbar ist $\varphi(u)$ nicht identisch gleich Null; da ferner $\varphi(\infty) = 0$ ist, so kann die Funktion auch nicht ein Polynom sein. Also besitzt $\varphi(u)$ mindestens einen Pol im Endlichen, so daß die Potenzreihe einen endlichen Konvergenzradius hat. Hieraus folgt bekanntlich die Existenz einer Folge $K$ mit den oben benutzten Eigenschaften.

19. Seien die $m$ Funktionen

$$f_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

Lösungen der Funktionalgleichungen

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m);$$

zwischen ihnen bestehe keine algebraische Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z) \,|\, z) \equiv 0.$$

Die vorigen Funktionalgleichungen führen zu den allgemeineren Beziehungen

$$f_\mu(z) = a_\mu^k f_\mu(\Omega^k z) + b_\mu^{(k)}(z) \qquad (\mu = 1, 2, .., m)$$

mit den rationalen Funktionen

$$b_\mu^{(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h b_\mu(\Omega^h z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

die ihrerseits sich in der geschlossenen Form

$$b_\mu^{(k)}(z) = f_\mu(z) - a_\mu^k f_\mu(\Omega^k z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

darstellen lassen. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ seien von jetzt ab alle positiv angenommen.

Mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ seien endlich viele Parameter bezeichnet; ihre Indizes seien nichtnegative ganze rationale Zahlen, und mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ komme auch $t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}$ vor, wenn

$$0 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_1, \quad 0 \leqq \beta_2 \leqq \alpha_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqq \beta_m \leqq \alpha_m$$

ist. Die Funktion

$$F(z \mid t) = \sum_\alpha t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} f_2(z)^{\alpha_2} \ldots f_m(z)^{\alpha_m}$$

ist dann und nur dann identisch gleich Null, wenn alle Parameter $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ gleichzeitig verschwinden. Dieser Fall sei im folgenden ausgeschlossen.

Setzt man

$$t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_\beta \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} b_1^{(k)}(z)^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots b_m^{(k)}(z)^{\beta_m - \alpha_m} t_{\beta_1 \ldots \beta_m},$$

so besteht die Funktionalgleichung

$$F(z \mid t) = F(\Omega^k z \mid t^{(k)}).$$

Die Funktion $F(z \mid t)$ bleibt also ungeändert, wenn $z$ in $\Omega^k z$ und gleichzeitig $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ in $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ übergeht.

Für keinen Wert von $k$ sind die transformierten Parameter $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ alle gleich Null. Denn ist $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ von Null verschieden und so gewählt, daß es keinen nichtverschwindenden Parameter $t_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ mit

$$\beta_1 \geqq \alpha_1, \quad \beta_2 \geqq \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_m \geqq \alpha_m$$

gibt, so ist auch

$$t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \neq 0.$$

**20.** Sei $z$ ein veränderlicher Punkt, $\zeta$ ein fester im Innern von $\mathfrak{u}$; unter $\mathfrak{u}$ ist dabei die Teilmenge von $\mathfrak{U}$ zu verstehen, für deren Punkte eine der Gleichungen

$$b_\mu^*(\Omega^k z) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

erfüllt ist, wo $b_\mu^*(z)$ den Nenner der rationalen Funktion $b_\mu(z)$ bezeichnet. Seien ferner $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ veränderliche und $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ feste Parameterwerte, die nicht alle gleichzeitig verschwinden.

Definition. Wenn ein Polynom

$$A(z|t)$$

in den $z_\alpha$ und den $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ von einem $k$ ab der Gleichung

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | \mathfrak{t}^{(k)}) = 0$$

genügt, so heiße es äquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$:

$$A(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t}).$$

Gibt es dagegen beliebig große Werte von $k$, für die die vorige Gleichung nicht erfüllt ist, so heiße es nichtäquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$:

$$A(z|t) \not\sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t}).$$

21. Der Begriff der Äquivalenz genügt folgenden einfachen Regeln:

a) *Wenn*

$$A(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t}) \quad \textit{und} \quad B(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$$

*ist, so ist auch*

$$A(z|t) + B(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t}).$$

b) *Wenn*

$$A(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$$

*ist und $B(z|t)$ ein beliebiges Polynom bedeutet, so ist auch*

$$A(z|t) \, B(z|t) \sim 0 \, (\mathfrak{z}|\mathfrak{t}).$$

Der Beweis für beide Eigenschaften ergibt sich unmittelbar aus der vorigen Definition.

22. Das Polynom $A(z|t)$ sei äquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$, also von einem $k$ ab:

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | \mathfrak{t}^{(k)}) = 0.$$

Setzt man für die $\mathfrak{t}^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ ihren Wert

$$\mathfrak{t}^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m})^k \sum_\beta \binom{\beta_1}{\alpha_1} \dots \binom{\beta_m}{\alpha_m} \times$$

$$\times \{f_1(\mathfrak{z}) - a_1^k f_1(\Omega^k \mathfrak{z})\}^{\beta_1 - \alpha_1} \dots \{f_m(\mathfrak{z}) - a_m^k f_m(\Omega^k \mathfrak{z})\}^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\beta_1 \dots \beta_m}$$

als Funktion von $k$ ein, so geht der Ausdruck

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | \mathfrak{t}^{(k)})$$

über in eine Summe

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | \mathfrak{t}^{(k)}) \equiv \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(f_1(\Omega^k \mathfrak{z}) \dots f_m(\Omega^k \mathfrak{z}) | \Omega^k \mathfrak{z}).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_M, \qquad \mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

lauter positive voneinander verschiedene Zahlen, die sich als Produkte der Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

darstellen lassen, und

$$A_\tau(w_1, w_2, \ldots, w_m \,|\, z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ebenso viele Polynome in den $z_\alpha$ und $w_1, w_2, \ldots, w_m$; ihre Koeffizienten hängen noch von den Konstanten $\mathfrak{z}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ ab, nicht aber von $k$. Nach Satz 2 kann nur dann von einem $k$ ab

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(f_1(\Omega^k \mathfrak{z}), \ldots, f_m(\Omega^k z) \,|\, \Omega^k \mathfrak{z}) = 0$$

sein, wenn identisch in den $z_\alpha$

$$A_\tau(f_1(z), \ldots, f_m(z) \,|\, z) \equiv 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ist. Nun sind die Funktionen $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ nach Annahme algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen in den $z_\alpha$. Also verschwindet jedes der $M$ Polynome

$$A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

identisch in den $z_\alpha$ und $w_\mu$.

Hieraus folgt weiter, daß für jede nichtnegative ganze rationale Zahl $k$ auch das Polynom

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \equiv A(z \,|\, T^{(k)});$$

$$T^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} \times$$

$$\times \{f_1(\mathfrak{z}) - a_1^k w_1\}^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots \{f_m(\mathfrak{z}) - a_m^k w_m\}^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

identisch verschwindet, folglich ebenso das Polynom

$$A(z \,|\, \mathfrak{T}^{(k)}),$$

wo

$$\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} w_1^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots w_m^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

gesetzt ist. Umgekehrt ist

$$A(z \,|\, t) \sim 0 \,(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}),$$

wenn für jedes $k$ in den $z_\alpha$ und $w_\mu$

$$A(z \,|\, \mathfrak{T}^{(k)}) \equiv 0$$

ist; die beiden Beziehungen sind somit gleichwertig.

**23.** Das Polynom $A(z \,|\, \mathfrak{T}^{(k)})$ hängt wohl von $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ und $k$ ab, aber nicht mehr von $\mathfrak{z}_\alpha$; es gilt also:

c) *Wenn*

$$A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}|t)$$

*ist, wenn ferner* $\mathfrak{z}^*$ *einen beliebigen anderen Punkt in* $\mathfrak{u}$ *bedeutet, so ist auch*

$$A(z|t) \sim 0\,(\mathfrak{z}^*|t).$$

Der Begriff der Äquivalenz ist also von den Zahlen $\mathfrak{z}_\alpha$ unabhängig, so daß im folgenden einfach

$$A(z|t) \sim 0\,(t) \quad \text{bzw.} \quad A(z|t) \not\sim (t)$$

geschrieben werden darf.

Damit das Polynom $A(z|t)$ äquivalent Null ist, braucht es nur scheinbar unendlich vielen Bedingungen zu genügen. Wenn man nämlich in $A(z|\mathfrak{T}^{(k)})$ den obigen Wert für $\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ einsetzt, so geht das Polynom über in

$$A(z|\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M'} \mathsf{A}_\tau'^{k} A_\tau'(w_1 \dots w_m|z).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau' > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M')$$

$M'$ verschiedene positive Zahlen, die sich als Produkte der Zahlen

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

darstellen lassen,

$$A_\tau'(w_1 \dots w_m|z) \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M')$$

ebenso viele Polynome in $z_\alpha, w_1, w_2, \dots, w_m$, deren Koeffizienten von $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$, aber weder von $k$ noch von den Zahlen $\mathfrak{z}_\alpha$ abhängen. Damit die rechte Seite für jede genügend große natürliche Zahl $k$ identisch verschwindet, müssen also die sämtlichen $M'$ Polynome

$$A_\tau'(w_1 \dots w_m|z) \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M')$$

identisch verschwinden, womit die gesuchten endlich vielen Bedingungen bestimmt sind.

Aus diesem Kriterium folgt insbesondere:

d) *Wenn das Polynom* $A(z|t)$ *die abbrechende Potenzreihe*

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

*hat, so ist dann und nur dann*

$$A(z|t) \sim 0\,(t),$$

*wenn die Äquivalenzen*

$$A_{h_1 \dots h_n}(t) \sim 0\,(t), \qquad (h_1 \dots h_n = 0, 1, \dots)$$

*bestehen.*

**24. Hilfssatz.** Seien

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M)$$

$M$ verschiedene positive Zahlen und

$$\mathfrak{L}_k = \sum_{\tau=1}^{M} \mathfrak{A}_\tau^k A_\tau, \qquad \mathfrak{L}_\tau^* = \sum_{\tau=1}^{M} \mathfrak{A}_\tau^k B_\tau$$

zwei lineare Formen in ihren $k$-ten Potenzen. Wenn für jede genügend große natürliche Zahl $k$ eine der beiden Formen $\mathfrak{L}_k$ und $\mathfrak{L}_k^*$ verschwindet, so verschwindet auch für jedes genügend große $k$ entweder $\mathfrak{L}_k$ oder $\mathfrak{L}_k^*$ allein.

Zum Beweis seien $N$ positive Zahlen

$$\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_N \qquad \bar{\mathfrak{A}}_\sigma > 0$$

eingeführt, zwischen denen keine Gleichung

$$\bar{\mathfrak{A}}_1^{l_1} \bar{\mathfrak{A}}_2^{l_2} \ldots \bar{\mathfrak{A}}_N^{l_N} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten besteht, die nicht alle gleichzeitig verschwinden; in ihnen möge

$$\mathfrak{A}_\tau = \prod_{\sigma=1}^{N} \bar{\mathfrak{A}}_\sigma^{l_{\tau\sigma}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

sein und die Matrix $(l_{\tau\sigma})$ habe ganze rationale Elemente. Offenbar ist $N \leqq M$.

Durch diese Umformung wird

$$\mathfrak{L}_k = \left(\bar{\mathfrak{A}}_1^{-f_1} \ldots \bar{\mathfrak{A}}_N^{-f_N}\right)^k \mathfrak{L}\left(\bar{\mathfrak{A}}_1^k, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_N^k\right); \qquad \mathfrak{L}_k^* = \left(\bar{\mathfrak{A}}_1^{-f_1^*} \ldots \bar{\mathfrak{A}}_N^{-f_N^*}\right)^k \mathfrak{L}^*\left(\bar{\mathfrak{A}}_1^k, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_N^k\right);$$

dabei sind die $f$ nichtnegative ganze rationale Zahlen und

$$\mathfrak{L}(U_1 \ldots U_N), \qquad \mathfrak{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

zwei Polynome in $U_1, U_2, \ldots, U_N$. Das Produktpolynom

$$\mathfrak{L}(U_1 \ldots U_N)\, \mathfrak{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

besitze genau $\mathfrak{L}$ Koeffizienten; die $\mathfrak{L}$ homogenen linearen Gleichungen

$$\mathfrak{L}\left(\bar{\mathfrak{A}}_1^{k+\varkappa} \ldots \bar{\mathfrak{A}}_N^{k+\varkappa}\right) \mathfrak{L}^*\left(\bar{\mathfrak{A}}_1^{k+\varkappa} \ldots \bar{\mathfrak{A}}_N^{k+\varkappa}\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, L)$$

für diese Koeffizienten, die bestehen, wenn $k$ genügend groß ist, haben eine von Null verschiedene Determinante und folglich muß das Produktpolynom identisch verschwinden. Nach einem bekannten Satz aus der Algebra ist das nur dann möglich, wenn mindestens eins der Polynome

$$\mathfrak{L}(U_1 \ldots U_N), \qquad \mathfrak{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

identisch verschwindet; daraus ergibt sich die Behauptung.

**25.** Seien $A(z|t)$ und $B(z|t)$ zwei Polynome; die beiden Ausdrücke

$$A(z|\mathfrak{T}^{(k)}), \qquad B(z|\mathfrak{T}^{(k)})$$

mögen ausgerechnet gleich

$$A(z|\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathfrak{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m|z), \qquad B(z|\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathfrak{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m|z)$$

sein. Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau > 0, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

endlichviele verschiedene positive Zahlen und

$$\begin{matrix} A_\tau(w_1 \ldots w_m | z) \\ B_\tau(w_1 \ldots w_m | z) \end{matrix} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

je ebenso viele Polynome in den $z_\alpha, w_1, w_2, \ldots, w_m$. Wenn weder die Polynome

$$A_\tau(w_1 \ldots w_m | z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M),$$

noch die Polynome

$$B_\tau(w_1 \ldots w_m | z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

alle gleichzeitig identisch verschwinden, so gibt es ein spezielles Wertsystem für die Veränderlichen, so daß mindestens je eins der Polynome in beiden Folgen ungleich Null ist. Die beiden Ausdrücke

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m | z), \qquad \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m | z)$$

verschwinden also nicht für alle großen $k$ in diesem Punkt, nach dem vorigen Hilfssatz auch nicht das Produkt

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m | z) \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m | z).$$

Nach 23. folgt daher:

e) *Wenn die beiden Polynome*

$$A(z|t), \qquad B(z|t)$$

*den Nichtäquivalenzen*

$$A(z|t) \not\sim 0\,(t), \qquad B(z|t) \not\sim 0\,(t)$$

*genügen, so besteht die weitere Nichtäquivalenz*

$$A(z|t)B(z|t) \not\sim 0\,(t).$$ [4a])

26. Um den Begriff der Äquivalenz auf Potenzreihen auszudehnen, werde nicht die Definition, die für Polynome angegeben wurde, einfach übertragen, sondern von der früheren Eigenschaft $d$ ausgegangen:

Definition. Die Potenzreihe

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t) z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes; ihre Koeffizienten seien Polynome in den $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ von beschränktem Grade. Wenn für ein System

[4a]) Anmerkung bei der Korrektur. Der Hilfssatz e) und damit der Hauptsatz bleibt bestehen, wenn die Zahlen $a_\mu$ nicht notwendig mehr reell sind, dafür aber angenommen wird, daß $\Omega^k$ die gleichen Eigenschaften 1. hat, wie $\Omega$ selbst, wenn $k$ alle natürlichen Zahlen durchläuft. In den interessantesten Fällen $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Annahme immer erfüllt.

von festen Parameterwerten $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ alle Äquivalenzen

$$A_{h_1 \dots h_n}(t) \sim 0(t) \qquad (h_1, \dots, h_n = 0, 1, 2, \dots)$$

erfüllt sind, so heiße $A(z|t)$ äquivalent Null gemäß (t):

$$A(z|t) \sim 0(t);$$

ist dagegen auch nur eine dieser Äquivalenzen nicht erfüllt, so heiße $A(z|t)$ nichtäquivalent Null gemäß (t):

$$A(z|t) \not\sim 0(t).$$

Der neue Äquivalenzbegriff ist für Polynome vollständig mit dem früheren gleichwertig, wie aus c) und d) folgt. Bedeutet ferner $\mathfrak{z}$ einen Punkt im Innern von $\mathfrak{u}$, so folgt aus

$$A(z|t) \sim 0(t),$$

daß für alle genügend großen $k$

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | t^{(k)}) = 0$$

ist; die Umkehrung braucht aber nicht zu gelten. Die Eigenschaften a) und b) bleiben unverändert bestehen.

27. Der neue Äquivalenzbegriff besitzt weiter die Eigenschaft e). Zum Beweis dieser Tatsache wird ein weitergehendes Ergebnis gezeigt.

Definition. Die kleinste Zahl $h$, für die die Potenzreihe

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

einen Koeffizienten

$$A_{h_1 \dots h_n}(t) \not\sim 0(t)$$

mit

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = h$$

hat, heiße ihr Index. Der Index ist dann und nur dann endlich, wenn die Reihe nichtäquivalent Null ist.

Sei $h$ der endliche Index der Reihe

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

und $h^*$ der endliche Index der Reihe

$$B(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}.$$

Sei ferner

$$A_h(z|t) = \sum_{\substack{h_1 \geqq 0 \\ h_1 + \dots + h_n = h}}^{\infty} \dots \sum_{h_n \geqq 0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

und

$$B_{h^*}(z|t) = \sum_{\substack{h_1 \geqq 0 \\ h_1 + \dots + h_n = h^*}}^{\infty} \dots \sum_{h_n \geqq 0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

gesetzt; beide Polynome sind nicht äquivalent Null, also auch nicht ihr Produkt

$$A_h(z|t)\,B_{h^*}(z|t).$$

Dieses Produkt enthält die sämtlichen Summanden der Exponentensumme $h+h^*$ von

$$A(z|t)\,B(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} C_{h_1 \dots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

und offenbar kann diese Potenzreihe keine Glieder mit kleinerer Exponentensumme haben, die nicht äquivalent Null sind. Damit ist für endlich-Indizes folgendes Ergebnis bewiesen, das trivial ist, wenn mindestens eine der Indizes unendlich groß ist:

f) *Der Index eines Produktes von Potenzreihen ist gleich der Summe der Indizes der Faktoren.*

## IV.

28. Von jetzt ab bedeute $K(s)$ einen algebraischen Zahlkörper vom Grad $K$ mit der erzeugenden Zahl $s$. Wir nehmen an, daß in ihm gleichzeitig alle folgenden Zahlen liegen:

i: Die Zahlen $\gamma_\alpha$ und $t_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

ii: Die Zahlen $a_\mu$ und die Koeffizienten der rationalen Funktionen $b_\mu(z)$

iii: Die Koeffizienten der Potenzreihen der Funktionen $f_u(z)$.

Ist $A(z|t)$ ein beliebiges Polynom mit Koeffizienten aus $K(s)$, so haben auch die Zahlen

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M$$

und die Koeffizienten der Polynome

$$A_\tau(w_1 \dots w_m|z) \qquad (\tau = 1, 2, \dots, M$$

in der Entwicklung

$$A(z|\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k\, A_\tau(w_1 \dots w_m|z)$$

Zahlwerte aus diesem Zahlkörper.

29. Es bedeute $p$ eine nichtnegative ganze rationale Zahl und $A(p$ die Menge aller Polynome $A(t)$ mit Koeffizienten aus $K(s)$, die in sämtlichen Veränderlichen $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ höchstens vom Grad $p$ sind. Offenbar ist die Anzahl der Koeffizienten gleich

$$(p+1)^n = P(p);$$

dabei ist $n$ die Zahl der auftretenden Parameter $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Die Menge $A(p$ bildet gegenüber der Addition eine Abelsche Gruppe über $K(s)$, die eine Basis aus genau $P(p)$ Elementen besitzt.

Sei $A_0(p)$ die Teilmenge der Polynome $A(t)$ aus $A(p)$, die der Äquivalenz

$$A(t) \sim 0\,(t)$$

genügen. Diese Polynome sind dadurch ausgezeichnet, daß zwischen ihren Koeffizienten endlich viele homogene lineare Gleichungen bestehen. Von diesen möge es etwa $P_0(p)$ linear unabhängige geben. Die Zahl $P_0(p)$ hängt außer vom Körper $K(s)$ nur noch von den Zahlen $t_{\alpha_1 \ldots, \alpha_m}$ und von $p$ ab; sie genügt den Ungleichungen

$$1 \leqq P_0(p) \leqq P(p).$$

Nach früher bilden die Elemente von $A_0(p)$ gleichfalls eine Abelsche Gruppe über $K(s)$ gegenüber der Addition. Dieselbe besitzt eine endliche Basis aus genau $P_1(p) = P(p) - P_0(p)$ Elementen, falls diese Zahl positiv ist; andernfalls enthält $A_0(p)$ überhaupt nur das Element Null.

Seien $A(t)$ und $B(t)$ zwei beliebige Polynome aus $A(p)$; je nachdem ob

$$A(t) - B(t) \sim 0\,(t)$$

oder

$$A(t) - B(t) \nsim 0\,(t),$$

seien beide einander äquivalent oder nichtäquivalent genannt:

$$A(t) \sim B(t)\,(t) \quad \text{bzw.} \quad A(t) \nsim B(t)\,(t).$$

Es bedeute $A_1(p)$ ein vollständiges Repräsentantensystem aller untereinander nicht äquivalenten Polynome $A(t)$ aus $A(p)$. Offenbar bilden die Elemente von $A_1(p)$ eine Abelsche Gruppe gegenüber der Addition, wenn einander äquivalente Polynome als nicht verschieden betrachtet werden; diese Gruppe ist gerade die Faktorgruppe von $A_0(p)$ in bezug auf $A(p)$. Auch $A_1(p)$ besitzt eine endliche Basis, und zwar aus genau $P_0(p)$ Elementen. Das allgemeine Glied von $A_1(p)$ hat die Gestalt

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho Q_\varrho(t).$$

Dabei sind

$$q_1, q_2, \ldots, q_{P_0(p)}$$

beliebige Parameterwerte aus $K(s)$ und

$$Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_{P_0(p)}(t)$$

ebenso viele Polynome aus $A_1(p)$; zwischen denselben besteht keine homogene lineare Äquivalenz

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho^0 Q_\varrho(t) \sim 0\,(t),$$

in der die Zahlen $q_\varrho^0$ in $K(s)$ liegen und nicht alle verschwinden. Hieraus folgt noch, daß das allgemeine Element von $A(p)$ sich in der Gestalt

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho Q_\varrho(t) + Q(t)$$

schreiben läßt, wobei $Q(t)$ irgendein Polynom aus $A_0(p)$ bedeutet.

**30.** Die Zahl $P_0(p)$ genügt für $p \geqq 1$ der Ungleichung

$$P_0(2p) \leqq 2^n P_0(p).$$

Denn offenbar läßt sich jedes Polynom aus $A(2p)$ in der Gestalt

$$A(t) = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} \Big( \prod_{\alpha} t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{(\varkappa)}} \Big)^p A_\varkappa(t)$$

schreiben. Dabei durchlaufen in dem Produkt

$$\prod_{\alpha} t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{(\varkappa)}}$$

über die $n$ Parameter $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ die Exponentensysteme

$$(\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{(\varkappa)}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, 2^n)$$

alle $2^n$ möglichen Fälle, daß ihre Glieder einzeln Null oder Eins sind. Ferner sind die $A_\varkappa(t)$ einzeln gleich beliebigen voneinander unabhängigen Polynomen aus $A(p)$. Damit eins dieser Polynome äquivalent Null ist, sind $P_0(p)$ unabhängige homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten zu erfüllen. Damit sie alle äquivalent Null sind, genügt es also, gerade

$$2^n P_0(p)$$

unabhängige homogene lineare Gleichungen für sämtliche Koeffizienten zu erfüllen. Alsdann ist aber gewiß auch die Summe

$$A(t) = \sum_{\varkappa=1}^{2^n} \Big( \prod_{\alpha} t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{(\varkappa)}} \Big)^p A_\varkappa(t)$$

äquivalent Null, und daraus folgt unmittelbar die obige Ungleichung.

**31.** Die Koeffizienten der Potenzreihe

$$F(z \mid t) = \sum_{\alpha} t_{\alpha_1 \dots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} \dots f_m(z)^{\alpha_m} = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} F_{h_1 \dots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

sind Linearformen in den $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Der Index $h$ ist endlich, denn für keine Zahl $k$ ist die Funktion $F(z \mid t^{(k)})$ identisch in den $z_\alpha$ gleich Null. Entsprechend sind die Koeffizienten in der Potenzreihe

$$F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} F_{h_1 \dots h_n}^{(l)}(t)\, z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

Formen der Dimension $l$ in den Parametern $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$; die Reihe hat den genauen Index $hl$.

Sei $p$ eine große natürliche Zahl und seien

$$A_l(z\,|\,t) = \sum_{h_1=0}^{p} \cdots \sum_{h_n=0}^{p} A^{(l)}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

$p+1$ Polynome, die in bezug auf die Veränderlichen $z_\alpha$ und die Parameter $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ einzeln vom Grad $p$ sind. Insgesamt treten also

$$(p+1)^{n+1}$$

Polynome

$$A^{(l)}_{h_1 \ldots h_n}(t) \qquad (l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p)$$

auf. Dieselben seien sämtlich in $A_1(p)$ gelegen, sind also durch zusammen

$$(p+1)^{n+1} P_0(p)$$

unabhängige Parameter mit Werten aus $K(s)$ bestimmt. Sind dieselben etwa gleich

$$q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix},$$

so ist

$$A^{(l)}_{h_1 \ldots h_n}(t) = \sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n} Q_\varrho(t) \qquad (l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p).$$

In der Entwicklung

$$E(z\,|\,t) = \sum_{l=0}^{p} A_l(z\,|\,t)\, F(z\,|\,t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} E_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

sind die Koeffizienten

$$E_{h_1 \ldots h_n}(t) \qquad (h_1, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Polynome aus der Menge $A(2p)$; sie hängen von den Zahlen

$$q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix}$$

homogen und linear ab. Damit irgendeiner der Koeffizienten $E_{h_1 \ldots h_n}$ äquivalent Null ist, sind von den Zahlen $q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n}$ höchstens $P_0(2p)$ homogene lineare Gleichungen zu erfüllen. Damit $E(z\,|\,t)$ vom Index

$$H > c\, p^{1+\frac{1}{n}}$$

ist, wo $c$ eine positive Zahl bedeutet, sind also höchstens

$$(c\, p^{1+\frac{1}{n}} + 1)^n P_0(2p) \leqq 2^{n+n} c^n (p+1)^{n+1} P_0(p)$$

homogene lineare Gleichungen von den

$$(p+1)^{n+1} P_0(p)$$

Zahlen

$$q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix}$$

zu erfüllen. Nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen ist das stets möglich, ohne daß die Zahlen $q_{h_1 \dots h_n}^{(e,l)}$ alle gleichzeitig verschwinden, wenn

$$(p+1)^{n+1} P_0(p) > c^n \cdot 2^{n+n} (p+1)^{n+1} P_0(p)$$

oder

$$c < 2^{-1-\frac{n}{n}}$$

vorausgesetzt wird, gewiß also für

$$c = 2^{-2-\frac{n}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß es $p+1$ Polynome

$$A_0(z|t), \quad A_1(z|t), \quad \dots, \quad A_p(z|t)$$

mit Zahlkoeffizienten $K(s)$ gibt, die nicht alle äquivalent Null sind und in sämtlichen Veränderlichen $z_\alpha$ und $t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ höchstens den Grad $p$ haben, so daß die Potenzreihe

$$E(z|t) = \sum_{l=0}^{p} A_l(z|t) F(z|t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} E_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

vom Index

$$H > 2^{-2-\frac{n}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}$$

ist.

32. Da die Polynome

$$A_l(z|t) \qquad (l = 0, 1, \dots, p)$$

nicht alle äquivalent Null sind, so gibt es ein erstes von ihnen, das nichtäquivalent Null ist. Sei etwa

$$A_l(z|t) \sim 0\,(t) \quad \text{für} \quad h = 0, 1, \dots, r-1; \quad A_r(z|t) \not\sim 0\,(t).$$

Die Zahl $r$ hängt dabei noch von $p$ ab und genügt der Ungleichung

$$0 \leqq r \leqq p.$$

Man setze

$$\mathfrak{A}_l(z|t) = A_{l+r}(z|t) \qquad (l = 0, 1, \dots, p-r),$$
$$\mathfrak{A}_l(z|t) = 0 \qquad (l = p-r+1, \dots, p)$$

und

$$\mathfrak{E}(z|t) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z|t) F(z|t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} z_n^{h_n}.$$

Der Index von $E(z|t)$ ist gleich $H$, also wegen

$$E(z|t) - F(z|t)^r \mathfrak{E}(z|t) \sim 0\,(t)$$

auch der Index von

$$F(z|t)^r \mathfrak{E}(z|t).$$

Sei ferner $\mathfrak{H}$ der Index von $\mathfrak{E}(z|t)$ und $h$ der Index von $F(z|t)$; letztere Zahl ist nach 31. endlich. Nach der früher bewiesenen Eigenschaft des Index besteht die Gleichung

$$H = \mathfrak{H} + rh,$$

also erst recht die Ungleichung

$$\mathfrak{H} \geqq H - hp \geqq 2^{-2-\frac{n}{n}} p^{1+\frac{1}{n}} - hp$$

und für genügend großes $p$ die weitere Ungleichung

$$\mathfrak{H} \geqq 2^{-3-\frac{n}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl $p$ gibt es $p+1$ Polynome*

$$\mathfrak{A}_0(z|t),\ \mathfrak{A}_1(z|t),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_p(z|t)$$

*mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die Polynome sind in den $z_\alpha$ und $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ höchstens vom Grad $p$.*

b) *Ihre Koeffizienten sind Zahlen aus dem Körper $K(s)$.*

c) *Es ist*

$$\mathfrak{A}_0(z|t) \not\equiv 0\,(t).$$

d) *Die Potenzreihe*

$$\mathfrak{E}(z|t) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z|t)\, F(z|t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

*ist vom Index*

$$\mathfrak{H} \geqq 2^{-3-\frac{n}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}.$$

## V.

**33.** Das Polynom $\mathfrak{A}_0(z|\mathfrak{T}^{(k)})$, wo nach früher

$$\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} w_1^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots w_m^{\beta_m - \alpha_m}\, t_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

ist, läßt sich in folgender Gestalt darstellen:

$$\mathfrak{A}_0(z|\mathfrak{T}^{(k)}) \equiv \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k\, \mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m|z).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

$M$ verschiedene Zahlen aus $K(s)$, die sich als Produkte der $a_\mu$ darstellen lassen, und

$$\mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m|z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ebenso viele Polynome in den $z_\alpha$ und $w_1, w_2, \ldots, w_m$; ihre Koeffizienten liegen in $K(s)$ und hängen noch von $p$, nicht aber von $k$ ab. Offenbar sind diese Polynome in den $z_\alpha$ einzeln höchstens vom Grad $p$; in den Veränderlichen $w_\mu$ dagegen sind sie höchstens vom Grad $\alpha_0 p$; dabei ist $\alpha_0$ eine natürliche Zahl, die weder von $p$ noch von $k$ abhängt und gleich $n$-mal der größten auftretenden Indexsumme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ von $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ gewählt werden darf.

Offenbar ist

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid t^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} A_\tau^k \mathfrak{A}_\tau(b_1^{(k)}(\mathfrak{z}), \ldots, b_m^{(k)}(\mathfrak{z}) \mid \Omega^k \mathfrak{z});$$

es gibt eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $k$, für die

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid t^{(k)}) \neq 0$$

ist.

**34.** Es gibt eine erzeugende gebrochene Zahl $s$ in $K(s)$, so daß gleichzeitig

a) die Zahlen $\mathfrak{z}_\mu$,

b) die Zahlen $a_\mu$ und die Koeffizienten der Polynome $b_\mu^*(z)$, $b_\mu^{**}(z)$,

c) die Zahlen $A_\tau$ und die Koeffizienten der Polynome $\mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z)$

von der Gestalt

$$\sum_{\varkappa=1}^{K} \sigma_\varkappa s^\varkappa$$

mit ganzen rationalen Zahlen $\sigma_\varkappa$ sind. Dabei bedeutet $b_\mu^*(z)$ den Nenner, $b_\mu^{**}(z)$ den Zähler der rationalen Funktion $b_\mu(z)$.

Zur Abkürzung sei folgende Schreibweise eingeführt: Sind

$$\Phi(w_1 \ldots w_m \mid z_1 \ldots z_n \mid s), \quad \Psi(w_1 \ldots w_m \mid z_1 \ldots z_n \mid s)$$

zwei Polynome in $w_1, w_2, \ldots, w_m$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und $s$, von denen das erste ganze rationale und das zweite nichtnegative Koeffizienten hat, und wenn der absolute Betrag eines Koeffizienten des ersten Polynoms höchstens gleich dem entsprechenden Koeffizienten des zweiten ist, so werde

$$\Phi(w \mid z \mid s) \ll \Psi(w \mid z \mid s)$$

gesetzt und $\Psi(w \mid z \mid s)$ eine Majorante des ersten genannt.

Offenbar gilt folgender Satz:

Ist

$$\Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \Psi_\chi(w \mid z \mid s) \qquad (\chi = 1, 2, \ldots, j),$$

so ist auch

$$\sum_{\chi=1}^{j} \Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \sum_{\chi=1}^{j} \Psi_\chi(w \mid z \mid s), \quad \prod_{\chi=1}^{j} \Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \prod_{\chi=1}^{j} \Psi_\chi(w \mid z \mid s).$$

Nach den Annahmen zu Anfang dieses Paragraphen ergibt sich leicht das Bestehen von Majoranten folgender Art:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\mu &\ll \xi(1+s)^K && (\mu = 1, 2, \ldots, m),\\
a_\mu &\ll \eta(1+s)^K && (\mu = 1, 2, \ldots, m),\\
\mathsf{A}_\tau &\ll \zeta(1+s)^K && (\tau = 1, 2, \ldots, M),\\
b_\mu^*(z) &\ll \Xi(1+s)^K \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^b && (\mu = 1, 2, \ldots, m),\\
b_\mu^{**}(z) &\ll \mathsf{H}(1+s)^K \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^b && (\mu = 1, 2, \ldots, m),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z) \ll \mathsf{Z}(1+s)^K \prod_{\mu=1}^{m}(1+w_\mu)^{\alpha_{\mu p}} \prod_{\alpha=1}^{m}(1+z_\alpha)^p \quad (\tau = 1, 2, \ldots, M).$$

Dabei ist der Exponent $b$ eine feste natürliche Zahl und es sind

$$\xi, \eta, \Xi, \mathsf{H}$$

feste positive Zahlen, die von $p$ und $k$ nicht abhängen, $\zeta$ und $\mathsf{Z}$ feste positive Zahlen, die von $p$, aber nicht von $k$ abhängen.

**35.** Die rationalen Funktionen $b_\mu^{(k)}(z)$ haben den Wert

$$b_\mu^{(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h b_\mu(\Omega^h z)$$

oder

$$b_\mu^{(k)}(z) = \frac{b_\mu^{**(k)}(z)}{b_\mu^{*(k)}(z)},$$

wenn

$$b_\mu^{*(k)}(z) = \prod_{h=0}^{k-1} b_\mu^*(\Omega^h z),$$

$$b_\mu^{**(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h b_\mu^*(z) \ldots b_\mu^*(\Omega^{h-1} z)\, b_\mu^{**}(\Omega^h z)\, b_\mu^*(\Omega^{h+1} z) \ldots b_\mu^*(\Omega^{k-1} z)$$

gesetzt wird. Mit einer positiven Konstanten $c_1 \geqq 1$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt, ist ferner[5])

$$\prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha^{(k)}) \ll \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^{[c_1 \varrho_1^k]} \qquad (z^{(k)} = \Omega^k z).$$

Also gelangen wir für die beiden letzten Polynome zu folgenden Majoranten:

$$\begin{aligned}
b_\mu^{*(k)}(z) &\ll \Xi^k(1+s)^{kK} \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^{b e_k},\\
b_\mu^{**(k)}(z) &\ll ((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^k (1+s)^{(2k-1)K} \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^{b e_k}
\end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Dabei bedeutet $e_k$ die Zahl

$$e_k = \sum_{h=0}^{k-1} [c_1 \varrho_1^k].$$

[5]) Zu den folgenden Abschätzungen vergleiche auch loc. cit. [1]), S. 354.

36. Auch das Produkt

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(z) = \prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(z)^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_\tau(b_1^{(k)}(z), \ldots, b_m^{(k)}(z) \mid \Omega^k z)$$

ist ein Polynom in den $z_\alpha$ und in $s$; es hat ferner ganze rationale Koeffizienten. Die Majoranten in 34. und 35. führen zu folgender Majorante für dasselbe:

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(z) \ll \mathsf{Z}((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^{m\alpha_0 pk}(1+s)^{K+K\alpha_0 mp(2k-1)} \times \\ \times \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^{b\alpha_0 mpe_k + [c_1 \varrho_1^k]p}$$

Schließlich werde auch noch von der Darstellung der $\mathfrak{z}_{0\alpha}$ durch die Zahl $s$ Gebrauch gemacht; dann ergeben sich folgende Formeln:

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \ll \Xi^{m\alpha_0 pk}(1+\xi)^{mn\alpha_0 pe_k}(1+s)^{Km\alpha_0 pk + Kmn\alpha_0 pe_k},$$

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(\mathfrak{z}) \ll \mathsf{Z}((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^{m\alpha_0 pk}(1+\xi)^{b\alpha_0 mnpe_k + n[c_1\varrho_1^k]p} \times \\ \times (1+s)^{K+K\alpha_0 mp(2k-1)+K\alpha_0 mnpe_k + Kn[c_1\varrho_1^k]p}$$

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \mathfrak{A}_\tau^{(k)}(\mathfrak{z}) \ll M\mathsf{Z}\zeta^k((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^{m\alpha_0 pk}(1+\xi)^{b\alpha_0 mnpe_k + n[c\varrho_1^k]p} \times \\ \times (1+s)^{K+K\alpha_0 mp(2k-1)+K\alpha_0 mnpe_k + Kn[c_1\varrho_1^k]p + Kk}$$

Damit ist bewiesen, daß es vier positive Zahlen $c_2, c_3, c_4, c_5$ gibt, die von $p$ und $k$ nicht abhängen, so daß für $p \geqq p_0$ und $k \geqq k_0(p)$

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \ll e^{c_2 p \varrho_1^k}(1+s)^{p[c_3\varrho_1^k]} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) \ll e^{c_4 p \varrho_1^k}(1+s)^{p[c_5\varrho_1^k]} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Nach 20. verschwinden die Zahlen

$$b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z}) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \mu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

alle nicht, da der Punkt $\mathfrak{z}$ in der Punktmenge $\mathfrak{u}$ liegt. Nach Satz 3 ist ferner

$$\mathfrak{A}_0(z \mid t) \not\equiv 0(\mathfrak{t});$$

es gibt also eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $k$, für die auch

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})$$

und folglich

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})$$

nicht verschwindet.

**37.** Wenn eine Zahl aus $K(s)$ die Majorante

$$o \ll \omega \sum_{\varkappa=0}^{O} s^{\varkappa}$$

besitzt, so ist sie absolut höchstens gleich

$$|o| \leqq \omega \sum_{\varkappa=0}^{O} |s|^{\varkappa} \leqq \omega (1+|s|)^{O}.$$

Wenn dieselbe Zahl ferner von Null verschieden ist, so gestattet ihr absoluter Betrag folgende Abschätzung nach unten[6]):

$$|o| \geqq \frac{1}{S^{KO}} \cdot \frac{1}{\omega^{K-1} \prod_{f=2}^{K} (1+|s_f|)^{O}}.$$

Dabei bedeuten

$$s_1 = s, s_2, \ldots, s^K$$

die $K$ zu $s$ konjugierten Zahlen, und $S$ den Nenner dieser Zahlen.

Aus den Majoranten zu Ende des vorigen Paragraphen folgt also, daß

$$\left| \prod_{\mu=1}^{m} \mathfrak{b}_{\mu}^{*(k)}(\mathfrak{z}) \right| \leqq e^{c_6 p \varrho_1^k}$$

und

$$\left| \prod_{\mu=1}^{m} \mathfrak{b}_{\mu}^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, t^{(k)}) \right| \geqq e^{-c_7 p \varrho_1^k}$$

ist, wenn $p$ genügend groß ist und $k$ bei der ersten Ungleichung oberhalb einer von $p$ abhängigen Schranke liegt, bei der zweiten eine von $p$ abhängige unendliche Folge durchläuft. $c_6$ und $c_7$ bedeuten dabei zwei positive Zahlen, die von $p$ und $k$ nicht abhängen.

Mittels dieser beiden Abschätzungen gelangt man zur

1. Ungleichung. Ist $p$ eine genügend große natürliche Zahl, durchläuft ferner die natürliche Zahl $k$ eine gewisse von $p$ abhängige unendliche Zahlfolge, so besteht die Ungleichung

$$|\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, t^{(k)})| \geqq e^{-c_8 p \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Zahl $c_8$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt.

**38.** In der Potenzreihe

$$\mathfrak{E}(z \,|\, t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t) z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

sind nach Satz 3 alle Koeffizienten $\mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ mit

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n < 2^{-3-\frac{n}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}$$

---

[6]) Siehe loc. cit. [1]), S. 359.

äquivalent Null. Die sämtlichen Koeffizienten $\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t)$ sind Polynome in den Zahlen $t_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ und in jeder davon höchstens vom Grad $2p$. Es ist

$$t^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \dots \binom{\beta_m}{\alpha_m} \times$$

$$\times (f_1(\mathfrak{z}) - a_1^k f_1(\Omega^k \mathfrak{z}))^{\beta_1 - \alpha_1} \dots (f_m(\mathfrak{z}) - a_m^k f_m(\Omega^k \mathfrak{z}))^{\beta_m - \alpha_m} t_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

Die Zahlen $f_\mu(\mathfrak{z})$ sind alle endlich; denn für genügend großes $k$ existiert die endliche Zahl $f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z})$ und in der Gleichung

$$f_\mu(\mathfrak{z}) = a_\mu^k f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z}) + b_\mu^{(k)}(\mathfrak{z})$$

ist $b_\mu^{(k)}(\mathfrak{z})$ gleichfalls endlich, da $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{u}$ liegt. Mit wachsendem $k$ strebt der Funktionswert $f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z})$ gegen eine endliche Zahl. Daher gibt es eine positive Konstante $c_9$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt, so daß von einem $k$ ab

$$|t^{(k)}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}| \leqq e^{c_9 k}$$

ist.

Sei

$$\mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha$$

gesetzt und $\mathsf{H}_0$ der kleinste Wert von $\mathsf{H}$, für den ein Polynom $\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t)$ nichtäquivalent Null ist. Offenbar ist

$$\mathsf{H}_0 \geqq c_{10} p^{1 + \frac{1}{n}},$$

und zwar hängt die positive Zahl $c_{10}$ nicht von $p$ und $k$ ab. Alle Polynome $\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t)$ mit $\mathsf{H} < \mathsf{H}_0$ befriedigen für genügend großes $k$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t^{(k)}) = 0.$$

**39.** Da die Potenzreihe

$$\mathfrak{E}(z \mid t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t) z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

in genügender Nähe des Nullpunktes konvergiert, so gibt es $n+1$ positive Zahlen

$$R_0, R_1, \dots, R_n,$$

die von $p$, aber nicht von $k$ abhängen, so daß die Koeffizienten des Polynoms $\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t)$ alle absolut kleiner als

$$R_0 R_1^{h_1} \dots R_n^{h_n}$$

sind und folglich

$$|\mathfrak{E}_{h_1 \dots h_n}(t^{(k)})| \leqq R_0 R_1^{h_1} \dots R_n^{h_n} e^{c_{11} p k}$$

ist, mit einer von $p$ und $k$ unabhängigen positiven Zahl $c_{11}$. Wenn $k$ genügend groß ist, so ist ferner

$$\mathfrak{z}_1^{(k) h_1} \dots \mathfrak{z}_n^{(k) h_n}| \leqq e^{\frac{1}{2} \mathsf{H} \Lambda_0 e_1^k} \qquad (\mathfrak{z}^{(k)} = \Omega^k \mathfrak{z})$$

$\Lambda_0$ bedeutet die negative Zahl

$$\Lambda_0 = \Re\Big(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_{\beta}\Big) < 0.$$

Aus den letzten Formeln folgt die weitere Ungleichung

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq R_0 e^{c_{11} p k} \sum_{\mathsf{H} \geqq \mathsf{H}_0} \Big(R_1 e^{\frac{1}{2}\frac{c_{11}}{c_{11}} \Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_1} \cdots \Big(R_n e^{\frac{1}{2}\frac{c_{n1}}{c_{11}} \Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_n}.$$

Die Summe $\sum_{\mathsf{H} \geqq \mathsf{H}_0}$ ist bis auf endlich viele fehlenden Glieder das Produkt von $n$ geometrischen Reihen; für großes $k$ spielen die Glieder mit möglichst kleinem H-Wert die Hauptrolle. Durch Verschlechtern der Abschätzung folgt, daß von einem $k$ ab

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq e^{c_{11} p k + \frac{\mathsf{H}_0}{4} \Lambda_0 \varrho_1^k}$$

ist, und hieraus folgt die

2. Ungleichung: Ist $p$ eine genügend große natürliche Zahl, und liegt die natürliche Zahl $k$ oberhalb einer von $p$ abhängigen Schranke, so ist

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}| \leqq e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Zahl $c_{12}$, die von $p$ und $k$ nicht abhängt.

**40.** Es kann jetzt der Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen werden.

Die Funktion $f_\mu(z)$ unterscheidet sich von der konvergenten Reihe

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_\mu^h b_\mu(\Omega^h z)$$

höchstens um eine additive Konstante; dieselbe ist eine algebraische Zahl, da die zugehörige Potenzreihe algebraische Koeffizienten hat. Folglich sind die Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihe sogar in einem *endlichen* algebraischen Zahlkörper gelegen, und es gibt hierzu als Oberkörper einen endlichen algebraischen Zahlkörper, in dem außerdem die Zahlen $a_\mu$, die Zahlen $\mathfrak{z}_\mu$ und die Koeffizienten $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ in der zu widerlegenden Gleichung

$$F(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}) \equiv \sum_{\alpha} \mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(\mathfrak{z})^{\alpha_1} \cdots f_m(\mathfrak{z})^{\alpha_m} = 0$$

liegen. Wegen

$$F(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}) = F(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})$$

ist also

$$\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}) = \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})$$

und nach der ersten und zweiten Ungleichung:

$$e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k} \geqq e^{-c_0 p \varrho_1^k},$$

wenn $p$ genügend groß ist und $k$ eine von $p$ abhängige Folge durchläuft. Das ist aber gewiß bereits für $p > \left(\frac{c_2}{c_{12}}\right)^n$ ausgeschlossen, so daß die Behauptung des Hauptsatzes dieser Arbeit damit bewiesen ist.

## VI.

**41.** Der Hauptsatz dieser Arbeit läßt sich unmittelbar auf die Funktionen anwenden, die im Kapitel 2 untersucht wurden. Ein Fall sei hiervon besonders genannt.

Nach früher ist die Funktion

$$f(z) = f(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2},$$

wo $\omega$ eine positive reellquadratische Irrationalzahl bedeutet, transzendental-transzendent. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$f(z) = f(\Omega z) + b(z).$$

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der Nenner der rationalen Funktion $b(z)$ und also auch der der abgeleiteten Funktionen $b_{l_1 l_2}(z)$ allein die Faktoren

$$z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu} - 1 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \nu + 1)$$

besitzt, so daß die Punktmenge u durch die Ungleichungen

$$\mathfrak{z}_{01} \neq 0, \quad \mathfrak{z}_{02} \neq 0, \quad \Re(\log \mathfrak{z}_{01} + \omega \log \mathfrak{z}_{02}) < 0, \quad \mathfrak{z}_{01}^{p_\mu} \mathfrak{z}_{02}^{q_\mu} \neq 1 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestimmt ist; dabei bedeuten $p_\mu$ und $q_\nu$ die sämtlichen Näherungsnenner und -zähler der Zahl $\omega$ [7]). Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind alle erfüllt; es ergibt sich daher:

*„Der Punkt $\mathfrak{z}$ besitze algebraische Koordinaten $\mathfrak{z}_\alpha$ und sei in* u *gelegen. Dann sind beliebig endlich viele Zahlen aus der Menge*

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z)\big|_{\mathfrak{z}}, \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

*oder auch der Menge*

$$\left.\frac{\partial^{l_1+l_2} f(z)}{\partial z_1^{l_1} \partial z_2^{l_2}}\right|_{\mathfrak{z}} \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

*algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen."*

Es besteht also eine arithmetische Eigenschaft der Funktion $f(z)$, die vollkommen der funktionentheoretischen Transzendental-Transzendenz analog ist.

**42.** Die zuletzt bewiesene arithmetische Eigenschaft der Funktion $f(z)$ gestattet eine funktionentheoretische Folgerung:

---

[7]) Siehe loc. cit. [1]), S. 363.

Der Punkt $(\mathfrak{z}, 1)$ liegt in der Punktmenge $\mathfrak{u}$, sobald

$$0 < |\mathfrak{z}| < 1$$

ist. Wenn alsdann die Zahl $\mathfrak{z}$ algebraisch ist, so sind speziell beliebig endlich viele aus der Reihe der Zahlen

$$\left.\frac{\partial^l f(z)}{\partial z_1^l}\right|_{(\mathfrak{z},1)}, \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Sei zur Abkürzung

$$\varphi(z) = f(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [\omega h] z^h; \qquad \varphi^{(l)}(z) = \frac{d^l \varphi(z)}{dz^l}$$

gesetzt: dann gilt folgender

Satz: „*Die Funktion $\varphi(z)$ ist transzendental-transzendent.*“

Denn im entgegengesetzten Fall gäbe es ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1, w_2, \ldots, w_m | z) \not\equiv 0,$$

so daß etwa

$$\mathfrak{F}(\varphi(z), \varphi'(z), \ldots, \varphi^{(m-1)}(z) | z) \equiv 0$$

ist. Dieses Polynom besitze genau $n$ Koeffizienten; dieselben sind nicht alle Null. Werden für die Funktionen $\varphi^{(l)}(\mathfrak{z})$ ihre Potenzreihen eingesetzt und alsdann die Taylorkoeffizienten der entstehenden Entwicklung gleich Null gemacht, so ergeben sich für die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | z)$ unendlich viele homogene lineare Gleichungen mit algebraischen Zahlkoeffizienten. Von diesen Gleichungen sind höchstens $n - 1$ linear unabhängig. Also dürfen die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | z)$ sogar als algebraische Zahlen angenommen werden. Da es gewiß eine algebraische Zahl $\mathfrak{z}$ mit

$$0 < |\mathfrak{z}| < 1$$

gibt, so daß $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | \mathfrak{z})$ nicht identisch verschwindet, so besteht alsdann die nichttriviale Zahlgleichung

$$\mathfrak{F}(\varphi(\mathfrak{z}) \ldots \varphi^{(m-1)}(\mathfrak{z}) | \mathfrak{z}) = 0.$$

Das widerspricht aber der algebraischen Unabhängigkeit der Zahlen $\varphi^{(l)}(\mathfrak{z})$.

**43.** Anstatt auf weitere Anwendungen des Hauptsatzes einzugehen, möge noch ein Zusatz zum ersten Kapitel gemacht werden.

Sei $D$ eine quadratfreie natürliche Zahl und $K(\sqrt{D})$ ein reeller quadratischer Zahlkörper; er besitzt die Diskriminante

$d = D$ für $D \equiv 1 \pmod 4$; $\quad d = 4D$ für $D \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$

und die Basis

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \frac{d + \sqrt{d}}{2}.$$

Durch

$$F(t,t') = \sum_{\alpha > 1} e^{\alpha t + \alpha' t'}$$

wird die *Hecke*sche Geometrische Reihe des Körpers definiert; sie konvergiert für

$$\Re(t) < 0, \quad \Re(t') < 0.$$

Bedeutet $\eta$ eine beliebige totalpositive Einheit des Körpers, so ist

$$F(\eta t, \eta' t') = F(t,t').$$

Um auf gewöhnliche Potenzreihen zu kommen, werde die Funktion

$$f(z_1 z_2) = \sum_{\alpha > 0} z_1^{S(\alpha)} z_2^{S\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{d}}\right)}$$

eingeführt, dabei ist $S(\alpha)$ die Spur von $\alpha$ und das Ideal

$$\mathfrak{m} = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{d}}\right) = \frac{1}{\mathfrak{d}}$$

ist die reziproke Differente von $K(\sqrt{D})$. Es bestehen folgende Gleichungen:

$$f(z_1 z_2) = F(t t'),$$

$$t = \log z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2, \quad t' = \log z_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2;$$

aus ihnen geht hervor, daß die Funktion $f(z_1 z_2)$ im Raumteil

$$\Re\left(\log z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2\right) < 0, \quad \Re\left(\log z_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2\right) < 0$$

existiert.

Nach bekannten Sätzen über die Pellsche Gleichung gibt es zwei natürliche Zahlen $e_1$ und $e_2$, die der Beziehung

$$e_1^2 - 4 d e_2^2 = 1$$

genügen, denn die Zahl $4d$ ist gewiß kein vollständiges Quadrat. Die Zahl

$$\eta = e_1 + 2 e_2 \sqrt{d}$$

stellt eine totalpositive Einheit von $K(\sqrt{D})$ dar, so daß

$$F(\eta t, \eta' t') = F(t t')$$

ist; eine einfache Umrechnung führt zu der analogen Gleichung

$$f\left(z_1^{S\left(\frac{\eta}{2}\right)} z_2^{S\left(\frac{\eta}{4\sqrt{d}}\right)}, \; z_1^{S(\eta\sqrt{d})} z_2^{S\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right) = f(z_1 z_2)$$

für die Funktion $f(z_1 z_2)$. Die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} S\left(\frac{\eta}{2}\right), & S\left(\frac{\eta}{4\sqrt{d}}\right) \\ S(\eta\sqrt{d}), & S\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

besitzt offenbar lauter positive ganze rationale Elemente; die zugehörige charakteristische Gleichung besitzt die beiden Wurzeln

$$\varrho_1 = \eta = e_1 + 2e_2\sqrt{d}\,, \qquad \varrho_2 = \eta' = e_1 - 2e_2\sqrt{d}\,; \qquad \varrho_1 > 1, \quad \varrho_1 > |\varrho_2|,$$

und ist daher im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

**44.** Die Funktion $f(z_1 z_2)$ genügt demnach einer Funktionalgleichung genau von der im ersten Kapitel betrachteten Art; dasselbe gilt von den abgeleiteten Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z_1 z_2) \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ die Operatoren von früher bedeuten. Im Gegensatz zum ersten Kapitel sind jedoch die Exponenten in der Reihe

$$f(z_1 z_2) = \sum_{\alpha \gtrless 0} z_1^{S(\alpha)} z_2^{S\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{d}}\right)}$$

zwar noch ganz rational, aber nicht mehr alle nichtnegativ; es handelt sich um eine Laurentsche Reihe. Trotzdem läßt sich das ganze Beweisverfahren des Satzes 1 unverändert auch auf diesen Fall ausdehnen und man gelangt zu folgendem Ergebnis:

Zwischen den $m$ Funktionen

$$f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \quad f_{l_1^{(2)} l_2^{(2)}}(z_1 z_2), \ldots, f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2)$$

besteht dann und nur dann eine algebraische Gleichung

$$F(f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \ldots, f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2) \,|\, z_1, z_2) \equiv 0\,,$$

wo das Polynom

$$F(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z_1 z_2)$$

nicht identisch verschwindet, wenn mindestens zwei der Differenzen

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)}, \; l_1^{(2)} - l_2^{(2)}, \ldots, l_1^{(m)} - l_2^{(m)}$$

übereinstimmen; wenn

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)} = l_1^{(2)} - l_2^{(2)}$$

ist, so besteht die Differentialgleichung

$$\mathbf{D}_1^{l_1^{(1)}} \mathbf{D}_2^{l_2^{(2)}} f(z_1 z_2) \equiv \text{konst.}\, \mathbf{D}_1^{l_1^{(2)}} \mathbf{D}_2^{l_2^{(2)}} f(z_1 z_3)\,.$$

Krefeld, 2. August 1929.

(Eingegangen am 4. Dezember 1929.)

# Bemerkung zu den Formeln von I. J. Schwatt für die Eulerschen Zahlen[1]).

Von

R. Tambs Lyche in Trondhjem.

In der angeführten Note des Herrn Schwatt bemerkt der Verfasser anfangs, daß er in der Literatur nirgends eine Formel für die Eulerschen Zahlen gefunden habe, welche diese Zahlen als rationale, endliche Operationen bedingende Ausdrücke gebe. Er entwickelt dann einige Formeln dieser Art.

Es sei mir deshalb gestattet darauf aufmerkam zu machen, daß eine derartige Formel vor einigen Jahren in einer kleiner Arbeit[2]) gegeben wurde, nämlich die Formel

$$E_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{P_{2i+1}(n)}{2^{2i}}, \tag{1}$$

wo die $P_{2i+1}(n)$ durch

$$P_{2i+1}(n) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^{i+r} \frac{2r+1}{r+i+1} \binom{2i}{i-r} (2r+1)^{2n} \tag{2}$$

gegeben sind. Die einzelnen Glieder in (1) und (2) sind außerdem ganze Zahlen. Die Formel ist auf völlig „elementare“ Weise durch Lösung des rekurrenten Gleichungssystems

$$E_n = 2\binom{2n}{2} E_{n-1} - 2^3 \binom{2n}{4} E_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{2n-1} E_0 + (-1)^n$$

entwickelt.

Trondhjem, den 28. Januar 1930.

---

[1]) Expressions for the Euler numbers obtained by expanding sec $x$ by means of Maclaurins Theorem. Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 151.

[2]) Sur les coefficients du développement de $\frac{1}{\cos x}$ en série entière. Bull. des Sciences Math. **50** (1926), p. 230.

(Eingegangen am 1. Februar 1930.)

# Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome.

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

---

Die $\nu$-te Ableitung von $e^{-x^2}$ hat die Form

$$\frac{d^\nu e^{-x^2}}{dx^\nu} = H_\nu(x)\, e^{-x^2},$$

wo $H_\nu(x)$ ein Polynom $\nu$-ten Grades, und zwar das $\nu$-te Hermitesche Polynom ist. (Manche Autoren geben diesen Namen einem gewissen Multiplum von $H_\nu$.) Die Hermiteschen Polynome und ihre Ableitungen gehorchen bekannten algebraischen Rekursionsformeln, die man leicht aus der Definitionsgleichung ableitet. Interessanter sind ihre Integraleigenschaften, von denen die wichtigste die Orthogonalitätsrelation

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_\mu(x)\, H_\nu(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \sqrt{\pi}\, 2^\nu \nu! & \text{für } \mu = \nu \end{cases}$$

ist, aus der folgt, daß die Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_\nu(x)}{\sqrt[4]{\pi}\, 2^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\nu!}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Die Gültigkeit der Entwicklung

$$F(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \varphi_\lambda(x)$$

für eine auf der ganzen $x$-Achse definierte Funktion $F(x)$ mit den Koeffizienten

$$c_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \varphi_\lambda(x)\, dx$$

oder, w. d. i., der Entwicklung $[G(x) = e^{\frac{x^2}{2}} F(x)]$

$$(2) \qquad G(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda H_\lambda(x)$$

mit den Koeffizienten

$$(3) \qquad d_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^\lambda \lambda!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} G(x)\, H_\lambda(x)\, dx$$

ist unter mannigfachen Bedingungen sichergestellt[1]). Für unseren späteren Zweck wird das Ergebnis von W. Myller-Lebedeff genügen, das besagt: Die Entwicklung für $G(x)$ konvergiert und stellt $G(x)$ dar, wenn $G(x)$, $G'(x)$ und $G''(x)$ stetig sind und $x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} G(x)$ für $|x| \to \infty$ gegen 0 strebt.

In dieser Arbeit soll eine Reihe von neuen Integralrelationen für die Hermiteschen Polynome mitgeteilt werden, vor allem eine allgemeine Formel (§ 3), die einen Parameter enthält und aus der sich die Orthogonalitätsrelation (1) als spezieller Fall, nämlich für den Parameterwert 1 ergeben wird. Zwei weitere spezielle Fälle dieser allgemeinen Formel, die zunächst (in § 1) zwecks Herausstellung der Methode gesondert behandelt werden, gestatten, die Laplace-Transformationen von gewissen, mit den Hermiteschen Polynomen eng zusammenhängenden Funktionen zu ermitteln, woraus sich für diese zwanglos weitere transzendente Relationen ergeben (§ 2). Die Methode, mit Hilfe deren die speziellen Fälle der allgemeinen Formel und dann diese selbst abgeleitet werden, darf vielleicht ein selbständiges Interesse beanspruchen, da sie sehr verallgemeinerungsfähig ist: Es wird die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der Wärmeleitungsgleichung, in Form einer Reihe, die nach Ableitungen des „Anfangszustandes" fortschreitet, allgemein angesetzt und dies dann auf eine spezielle Funktion, von der man weiß, daß sie der Differentialgleichung genügt, angewandt. Die entstehende Reihe wird als eine Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen erkannt, ihre Koeffizienten müssen sich also durch Formel (3) ausdrücken lassen. Das ergibt eine Relation für ein Integral, unter dem ein Hermitesches Polynom steht. Allgemein kann man so zu einer Funktion, deren Ableitungen ein Orthogonalsystem bilden, eine Differentialgleichung suchen, die von ihr befriedigt wird und deren Lösung sich durch die Ableitungen des Anfangszustandes darstellen läßt (das ist z. B. bei allen Gleichungen der Form $\frac{\partial^\alpha z}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\beta z}{\partial y^\beta}$ in ganz gleicher Form wie bei der Wärmeleitungsgleichung möglich). Die Koeffizientenformel für die Entwicklung nach dem Orthogonalsystem muß dann eine Integralrelation für die Orthogonalfunktionen liefern.

---

[1]) W. Myller-Lebedeff, Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen, Math. Annalen **64** (1907), S. 388–416. H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen, Math. Annalen **66** (1909), S. 273–324. R. von Mises, Über die Grundbegriffe der Kollektivmaßlehre, Jahresber. d. deutsch. Math. Vergg. **21** (1912), S. 9–20. G. Szegö, Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome I, Math. Zeitschrift **25** (1926), S. 87–115. U. Kowallik, Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 498–518.

## § 1.

## Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} H_{2n}(x)\,dx$.

Die Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Phi(x,t) = \Phi_0(x) \quad \text{für} \quad t = t_0$$

wird formal befriedigt durch die Reihe

$$\Phi(x,t) = \Phi_0(x) + \frac{t-t_0}{1!}\frac{d^2\Phi_0(x)}{dx^2} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\frac{d^4\Phi_0(x)}{dx^4} + \cdots. \tag{5}$$

Diese divergiert zwar im allgemeinen[2]), für gewisse $\Phi_0(x)$ aber, die dann notwendigerweise ganze Funktionen sein müssen, konvergiert sie und stellt eine Lösung der Differentialgleichung dar. Einen solchen Fall wollen wir jetzt ins Auge fassen. Die Funktion

$$\chi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{6}$$

die bekanntlich die Temperaturverteilung darstellt, die einer zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ angebrachten „Quelle" entspricht, genügt der Gleichung (4), und für $t = t_0$ ist sie gleich $\chi(x, t_0)$, wenn $t_0 > 0$ ist, was wir von jetzt an voraussetzen wollen. Die Entscheidung darüber, ob und für welche Werte von $x$ und $t$ die Reihe (5) in diesem Falle konvergiert, können wir auf Grund eines Satzes von E. Rothe[3]) treffen, der unter den hier vorliegenden Verhältnissen folgendes besagt: Ist die Funktion $\Phi_0(x)$ der Anfangsbedingung eine ganze Funktion der Ordnung 2 vom Normaltypus $\beta$, d. h. ist $\beta > 0$ die (endliche) untere Grenze der Zahlen $\alpha$, bei denen

$$|\Phi_0(x)| < e^{\alpha |x|^2}$$

für alle komplexen $x$ mit hinreichend großem Absolutbetrag gilt, so konvergiert die Reihe (5) an jeder Stelle $x$ in $-\infty < x < +\infty$ in einem gewissen $t$-Intervall, sie hat nämlich unabhängig von $x$ den genauen Konvergenzradius $\frac{1}{4\beta}$. Die Funktion $\chi(x, t_0)$ ist offenbar eine ganze Funktion der Ordnung 2 vom Normaltypus $\beta = \frac{1}{4t_0}$, also konvergiert die Reihe (5)

---

[2]) Vgl. hierzu G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, III. Mitteilung, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 608–626 [S. 623].

[3]) E. Rothe, Ein Beitrag zum Cauchyschen Problem, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 48–72. Es handelt sich um Satz 3, S. 58. Dort ist $\lambda = 2$, $\mu = 1$, also $\varrho = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 2$ zu setzen.

in unserem Falle für $|t-t_0|<t_0$. Wir können also anschreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{-\frac{x^2}{4t_0}} \quad \text{für} \quad |t-t_0|<t_0,$$

oder, indem wir $\frac{x}{2\sqrt{t_0}}=y$ setzen:

$$e^{-\frac{t_0}{t}y^2}=\sqrt{\frac{t}{t_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\frac{d^{2n}e^{-y^2}}{dy^{2n}}\frac{1}{(2\sqrt{t_0})^{2n}}$$

$$=\sqrt{\frac{t}{t_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n H_{2n}(y)\,e^{-y^2},$$

das heißt

$$e^{\left(1-\frac{t_0}{t}\right)y^2}=\sqrt{\frac{t}{t_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n H_{2n}(y). \tag{7}$$

Wir haben also auf diese Art die Entwicklung der Funktion $G(y)=e^{\left(1-\frac{t_0}{t}\right)y^2}$ nach Hermiteschen Polynomen: $G(y)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}d_\lambda H_\lambda(y)$ gewonnen[4]). Daß diese Reihe für $|t-t_0|<t_0$ konvergiert, hätten wir auch nach dem S. 588 zitierten Ergebnis von W. Myller-Lebedeff feststellen können. Denn dieses garantiert in unserem Falle die Konvergenz für $-\frac{1}{2}+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)<0$, also für $0<t<2t_0$. Allerdings würde danach die Frage offen bleiben, ob die Reihe nicht noch darüber hinaus konvergiert, eine Frage, die nach dem Obigen zu verneinen ist.

Bestimmen wir nun die Koeffizienten $d_\lambda$ nach Formel (3) und vergleichen sie mit den in (7) auftretenden Koeffizienten, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^{2n}(2n)!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{\left(1-\frac{t_0}{t}\right)x^2}H_{2n}(x)\,dx=\sqrt{\frac{t}{t_0}}\frac{1}{n!}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^{2n+1}(2n+1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{\left(1-\frac{t_0}{t}\right)x^2}H_{2n+1}(x)\,dx=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Die zweite Formel ist trivial, da $H_{2n+1}(x)$ eine ungerade Funktion ist. Die erste Formel dagegen ergibt, wenn wir beachten, daß $H_{2n}(x)$ eine

---

[4]) Auf die Tatsache, daß die im allgemeinen divergente Reihe (5) im Falle der Funktion $\chi(x,t)$ auf eine konvergente Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen führt, habe ich bereits hingewiesen in der Arbeit: Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. Zeitschr. f. Physik 49 (1928), S. 705–730 [S. 716]. — Man kann (7) auch als „erzeugende Gleichung" für die $H_{2n}$ ansehen.

gerade Funktion ist, und wenn wir noch $\frac{t_0}{t} = s$ setzen:

$$\textbf{(A)} \qquad \int_0^\infty e^{-sx^2} H_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Diese Formel ist zunächst nur bewiesen für $\frac{t_0}{t} = s > \frac{1}{2}$, sie gilt aber, da die linke Seite offenbar für $s > 0$ konvergiert und eine analytische Funktion darstellt, auch für $s > 0$.

Die linke Seite von **(A)** stellt eine auf $H_{2n}(x)$ ausgeübte lineare Funktionaltransformation $\mathfrak{T}(H_{2n})$ dar, die schon öfter in der Literatur aufgetreten ist[5]) und natürlich in engstem Zusammenhang mit der Laplace-

---

[5]) So haben z. B. Hardy und Ramanujan (siehe G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, S. 382) für gewisse Funktionen $F_1$ und $F_2$, deren Identität schwer nachzuweisen war, leicht $\mathfrak{T}(F_1) = \mathfrak{T}(F_2)$ zeigen können, woraus nach einer Modifikation eines bekannten Satzes von Lerch $F_1 = F_2$ folgte. Das ist genau die gleiche Schlußweise, die ich in früheren Arbeiten (z. B. Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus, Math. Annalen **90** (1923), S. 19–25) unter Verwendung der *Laplace-Transformation* benutzt habe und auch im gegenwärtigen § 2 benutzen werde. Ich ergreife die Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, daß sich auf diesem Wege die fundamentale Integralgleichung (10) für die Hermitesche Orthogonalfunktion $\varphi_n(x)$ in der unter [1]) zitierten Arbeit von U. Kowallik als eine einfache Umformung der bekannten Differentialgleichung

$$(*) \qquad \varphi_n'' + (2n+1-x^2)\,\varphi_n = 0$$

nachweisen läßt. Die Laplace-Transformierte der Gleichung (*) lautet nämlich (vermöge des Gesetzes III in meiner Arbeit: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Annalen **89** (1923), S. 192–207 [S. 198]):

$$s^2\mathfrak{L}\{\varphi_n\} - \varphi_n(0)\,s - \varphi_n'(0) + (2n+1)\,\mathfrak{L}\{\varphi_n\} - \mathfrak{L}\{x^2\varphi_n\} = 0$$

oder nach Multiplikation mit $-\frac{2n+1}{s^2+2n+1}$:

$$-(2n+1)\,\mathfrak{L}\{\varphi_n\} + (2n+1)\,\varphi_n(0)\,\frac{s}{s^2+2n+1} + \sqrt{2n+1}\,\varphi_n'(0)\,\frac{\sqrt{2n+1}}{s^2+2n+1}$$

$$+\sqrt{2n+1}\,\mathfrak{L}\{x^2\varphi_n\}\,\frac{\sqrt{2n+1}}{s^2+2n+1} = 0.$$

Wegen $\frac{s}{s^2+b^2} = \mathfrak{L}\{\cos bt\}$, $\frac{b}{s^2+b^2} = \mathfrak{L}\{\sin bt\}$ folgt unter Beachtung des Gesetzes I (S. 198) meiner eben zitierten Arbeit:

$$-(2n+1)\,\varphi_n(x) + (2n+1)\,\varphi_n(0)\cos(\sqrt{2n+1}\,x) + \sqrt{2n+1}\,\varphi_n'(0)\sin(\sqrt{2n+1}\,x)$$

$$+\sqrt{2n+1}\int_0^x \xi^2\,\varphi_n(\xi)\sin(\sqrt{2n+1}\,(x-\xi))\,d\xi = 0.$$

Das ist die Integralgleichung (10) bei Kowallik.

Transformation

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s)$$

steht (ich nenne $F$ die Oberfunktion, $f$ die Unterfunktion). Wir können **(A)** auf die Form einer Laplace-Transformation bringen, indem wir $x^2 = t$ setzen:

**(B)** $$\int_0^\infty e^{-st} \frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Vermöge der bekannten Rekursionsformel

$$2x\,H_{2n+1}(x) = -H_{2n+2}(x) - 2(2n+1)\,H_{2n}(x)$$

kann man nun sofort eine ähnliche Transformationsformel für Hermitesche Polynome mit ungeradem Index herleiten. Es ist

$$H_{2n+1}(\sqrt{t}) = -\frac{1}{2}\,\frac{H_{2n+2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} - (2n+1)\,\frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}},$$

also, wie man leicht nachrechnet:

**(C)** $$\mathfrak{L}\{H_{2n+1}(\sqrt{t})\} = -\sqrt{\pi}\,\frac{(2n+1)!}{n!}\,\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Da es wegen der Anwendungen der Laplace-Transformation in der Theorie der Differentialgleichungen wertvoll ist, möglichst viele zusammengehörige Ober- und Unterfunktionen zu kennen[6]), so bemerke ich noch, daß man aus **(B)** und **(C)** durch Summation nach $n$ zwei weitere Formeln gewinnen kann, die folgendermaßen lauten:

**(D)** $$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{(2n)!}\right\} = \sqrt{\pi}\,s^{-\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{s}-1}$$

**(E)** $$\mathfrak{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n+1}(\sqrt{t})}{(2n+1)!}\right\} = -\sqrt{\pi}\,s^{-\frac{3}{2}}\,e^{\frac{1}{s}-1}$$

$\left(s > \frac{1}{2}\right)$.

Führen wir in **(B)** statt des Polynoms $H_{2n}(x)$ die Hermitesche Orthogonalfunktion $\varphi_{2n}(x)$ ein, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-\left(s-\frac{1}{2}\right)t}\,\frac{\varphi_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{\sqrt[4]{\pi}\,2^n\sqrt{(2n)!}\,n!}\,\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}$$

---

[6]) Hierzu sei verwiesen auf die Ausführungen in meiner Arbeit: Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung, Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart, Julius Springer 1929, S. 56–78 [S. 61, zweiter Absatz von unten].

oder, indem wir $s - \frac{1}{2}$ wieder durch $s$ ersetzen:

$$\text{(F)} \qquad \mathfrak{L}\left\{\frac{\varphi_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \frac{\left(\frac{1}{2}-s\right)^n}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \left(s > -\frac{1}{2}\right).$$

Der in **(B)** auftretenden Unterfunktion soll noch eine mehr symmetrische Gestalt gegeben werden, wie ich sie in späteren Arbeiten brauchen werde. Wir machen in **(B)** die Substitution $t = (x-y)u$ mit $x > y$ und erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-s(x-y)u} \frac{H_{2n}(\sqrt{(x-y)u})}{\sqrt{(x-y)u}} (x-y)\,du = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}$$

oder, wenn wir $s(x-y) = \sigma - y$ setzen $(\sigma > y)$:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma u + yu} \frac{H_{2n}(\sqrt{(x-y)u})}{\sqrt{u}} \sqrt{x-y}\,du = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\frac{\left(\frac{x-\sigma}{x-y}\right)^n}{\left(\frac{\sigma-y}{x-y}\right)^{n+\frac{1}{2}}},$$

d. h.

$$\text{(G)} \qquad \mathfrak{L}\left\{e^{yt}\frac{H_{2n}(\sqrt{(x-y)t})}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\pi}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{(s-x)^n}{(s-y)^{n+\frac{1}{2}}}$$
$$(x \geqq y,\ s > y).$$

Die Formel war zunächst nur für $x > y$ bewiesen, gilt aber auch noch für $x = y$, denn $H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$ und $\mathfrak{L}\left\{e^{yt}\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{(s-y)^{\frac{1}{2}}}$.

## § 2.

## Transzendente Additionstheoreme für die Hermiteschen Polynome.

Da die Unterfunktionen der $\frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ und $H_{2n+1}(\sqrt{t})$ so einfache Bauart haben, kann man leicht für sie Gesetzmäßigkeiten feststellen und diese dann auf die Oberfunktionen übertragen, wodurch man tiefliegende Relationen erhält. Wir begnügen uns mit folgendem Beispiel. Nach Formel **(B)** ist

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{n_1!}{(2n_1)!}\frac{H_{2n_1}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right\}\cdot\mathfrak{L}\left\{\frac{n_2!}{(2n_2)!}\frac{H_{2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right\} = \pi\frac{(1-s)^{n_1+n_2}}{s^{n_1+n_2+1}}.$$

Die rechte Seite bleibt gleich, wenn $n_1$ und $n_2$ sich so verändern, daß $n_1 + n_2 = n = \text{konst.}$ ist. Da dem Produkt zweier Unterfunktionen $f_1$ und $f_2$ das Faltungsintegral (vgl. das in Anm. [5]) zitierte Gesetz I)

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau$$

ihrer Oberfunktionen $F_1$ und $F_2$ entspricht, so folgt hieraus, daß die Funktion

$$\frac{n_1!\,n_2!}{(2n_1)!\,(2n_2)!}\,\frac{H_{2n_1}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

für $n_1 + n_2 = n$ stets dieselbe ist, unabhängig von der speziellen Wahl von $n_1$ und $n_2$. Sie ist also z. B. gleich $(n_1 = 0,\ n_2 = n)$

$$\frac{n!}{(2n)!}\,\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.$$

Die Formel

$$\frac{H_{2n_1}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\,\frac{(2n_1)!\,(2n_2)!}{(2n_1+2n_2)!}\,\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n_1+2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}},$$

die man vermöge $\frac{(2n)!}{n!} = \frac{4^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ auch in die Gestalt

$$\text{(H)}\qquad \frac{H_{2n_1}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\Gamma\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n_2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n_1+n_2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{H_{2n_1+2n_2}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

setzen kann, stellt ein transzendentes Additionstheorem der Funktion $\frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ hinsichtlich des Parameters $n$ dar, das auf anderem Wege wohl nur sehr mühselig zu beweisen und kaum aufgefunden worden wäre.

Es ist interessant, daß sich diesen Additionstheoremen für die Funktionen $H_\nu(\sqrt{t})$ andere gegenüberstellen lassen, in denen das reziproke Argument vorkommt. Die durch Gleichung (6) definierte Funktion $\chi(x,t)$ hat, wenn man bei konstantem $x$ hinsichtlich $t$ transformiert, die Unterfunktion [7])

$$\mathfrak{L}\{\chi(x,t)\} = s^{-\frac{1}{2}}\,e^{-x\sqrt{s}} \qquad (x \geqq 0).$$

Nun ist einerseits

$$(8)\qquad \frac{\partial^\nu \chi(x,t)}{\partial x^\nu} = \chi_\nu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left[\frac{\partial^\nu e^{-z^2}}{\partial z^\nu}\right]_{z=\frac{x}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,t^{\frac{\nu+1}{2}}}\,H_\nu\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

andererseits

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\,\mathfrak{L}\{\chi\} = (-1)^\nu\,s^{\frac{\nu-1}{2}}\,e^{-x\sqrt{s}} \qquad (\nu \geqq 0).$$

---

[7]) F. Bernstein, Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, zweite Note, Amsterdamer Akademie 1920, S. 759–765.

Da, wie man leicht einsieht, die Differentiation nach $x$ für $x > 0$ mit der Laplace-Transformation vertauschbar, d. h. $\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\mathfrak{L}\{\chi\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^\nu \chi_n}{\partial x^\nu}\right\}$ ist, so ergibt sich:

$$(9) \qquad \mathfrak{L}\{\chi_\nu(x,t)\} = (-1)^\nu s^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-x\sqrt{s}} \qquad (\nu \geqq 0,\ x > 0).$$

Aus

$$\mathfrak{L}\{\chi_m(x,t)\}\cdot\mathfrak{L}\{\chi_n(y,t)\} = (-1)^{m+n} s^{\frac{m+n-2}{2}} e^{-(x+y)\sqrt{s}}$$
$$= -\mathfrak{L}\{\chi_{m+n-1}(x+y,t)\}, \quad \text{wenn } m+n \geqq 1,$$

folgt nun sofort das in der symbolischen Schreibweise sehr elegante Additionstheorem

$$(J) \qquad \chi_m(x,t) * \chi_n(y,t) = -\chi_{m+n-1}(x+y,t)$$
$$(x > 0,\ y > 0,\ m+n \geqq 1),$$

ausführlich geschrieben:

$$\int_0^t e^{-\left(\frac{x^2}{4\tau}+\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right)} \tau^{-\frac{m-1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} H_m\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) H_n\left(\frac{y}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau$$
$$= -2\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} t^{-\frac{m+n}{2}} H_{m+n-1}\left(\frac{x+y}{2\sqrt{t}}\right).$$

Es ist ein Additionstheorem für die Funktion $H_\nu\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ sowohl hinsichtlich des Parameters $x$ als auch $\nu$ und zeigt zugleich, daß

$$\chi_m(x,t) * \chi_n(y,t) = \chi_n(x,t) * \chi_m(y,t)$$

ist.

Setzt man speziell $n = 1$ und, wie in der Theorie der Wärmeleitung üblich, $\chi_1(y,t) = -\psi(y,t)$ ($\psi$ ist die Temperaturverteilung, die einer „Doppelquelle" im Punkte $y = 0$ entspricht), so erhält man:

$$(K) \qquad \chi_m(x,t) * \psi(y,t) = \chi_m(x+y,t) \qquad (x > 0,\ y > 0,\ m \geqq 0).$$

Diese merkwürdige und einfache Formel, deren Spezialfall $m = 1$:

$$\psi(x,t) * \psi(y,t) = \psi(x+y,t)$$

von Cesàro[8]) entdeckt und bereits in einer früheren Arbeit[9]) behandelt wurde, hätte man auch vermöge einer ganz anderen, zuerst von Hadamard

[8]) E. Cesàro, Sur un problème de propagation de la chaleur, Brüsseler Akademie 1902, S. 387–404.

[9]) F. Bernstein und G. Doetsch, Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, vierte Note, Göttinger Nachr. 1922, S. 47–52.

erkannten und als Huyghenssches Prinzip bezeichneten Methode[10]) gewinnen können. Die Funktion $\chi(x,t)$ ist, wie schon S. 589 benutzt, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (4), also auch jede ihrer Ableitungen $\chi_m(x,t)$.[11]) Nun wird bekanntlich[12]), wenn an den Punkt $x$ eines unendlich langen Stabes von der Anfangstemperatur 0 die Temperatur $A(t)$ angelegt wird, die Temperatur an jeder weiter *rechts* gelegenen Stelle $x+y$ $(y>0)$ durch $A(t) * \psi(y,t)$ gegeben. Bei der Temperaturverteilung $\chi_m$, für die der Anfangszustand konstant gleich 0 ist (vgl. Anm. [11])), befindet sich an der Stelle $x$ $(x>0)$ der Temperaturablauf $\chi_m(x,t)$, also nach dem eben Gesagten bei $x+y$ die Temperatur $\chi_m(x,t) * \psi(y,t)$. Andererseits ist diese aber doch gleich $\chi_m(x+y,t)$, woraus sich das Additionstheorem **(K)** ergibt. Natürlich ist diese Folgerung nur schlüssig, wenn die Lösung wirklich eindeutig ist, was ja nach Anm. [11]) hier gerade nicht stimmt. Die Methode der Laplace-Transformation ist also jedenfalls sicherer und leistet auch mehr, da sie die allgemeinere Formel **(J)** liefert, die dem Huyghensschen Prinzip nicht zugänglich ist.

## § 3.

## Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx^2} H_\nu(\sqrt{s}x)\, H_\mu(x)\, dx$.

Wir wollen jetzt dieselbe Methode, vermittels deren wir die Formel **(A)** abgeleitet haben, auf eine andere Funktion anwenden, und zwar wählen wir dazu die durch (8) definierte Funktion $\chi_\nu(x,t)$ $(\nu \geqq 0)$. Sie ist eine Lösung der Differentialgleichung (4), kann also nach (5) in die Reihe

---

[10]) J. J. Hadamard, Sur l'intégrale résiduelle, Bull. soc. math. de France 28 (1900), S. 69–90; Sur un problème mixte aux dérivées partielles, ib. **31** (1903), S. 208–224; Principe de Huyghens et prolongement analytique, ib. **52** (1924), S. 241–278. Die Methode ist in der Tat eine Verallgemeinerung des aus der Physik bekannten Huyghensschen Prinzips, wonach jede von einer Wellenausbreitung getroffene Stelle selbst wieder als Zentrum einer neuen Welle angesehen werden kann. — Ein ähnlicher Gedankengang liegt der gruppentheoretischen Behandlung der Differentialgleichungen zugrunde.

[11]) Die $\chi_m$ gehören zu jenen „singulären Lösungen" (siehe G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, II. Mitteilung, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 293–306 [§ 2 und S. 304]), die in gewissen Gebieten die Differentialgleichung befriedigen und bei senkrechter Annäherung an die Grenzen überall den Randwerten 0 zustreben (wodurch die Eindeutigkeit der Lösung vernichtet wird), und zwar die $\chi_m$ mit geradem Index $2n$, die man auch in der Form $\frac{\partial^n \chi}{\partial t^n}$ schreiben könnte, in der Halbebene $t>0$ die $\chi_m$ mit ungeradem Index $2n+1$, die mit $-\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$ identisch sind, in der Viertelebene $x>0$, $t>0$.

[12]) Vgl. die unter [11]) zitierte Arbeit S. 303.

$$\chi_\nu(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\,\frac{d^{2n}\chi_\nu(x,t_0)}{dx^{2n}}$$

entwickelt werden, die wieder wie bei $\chi_0$ für $|t-t_0|<t_0$ konvergiert ($t_0$ sei $>0$). Nun ist aber

$$\frac{d^{2n}\chi_\nu(x,t_0)}{dx^{2n}}=\frac{d^{\nu+2n}\chi(x,t_0)}{dx^{\nu+2n}}=\chi_{\nu+2n}(x,t_0),$$

also nach (8)

$$\chi_\nu(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}\chi_{\nu+2n}(x,t_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,t_0^{\frac{\nu+1}{2}}\,2^\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n H_{\nu+2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{t_0}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t_0}}$$

oder, wenn wir $\frac{x}{2\sqrt{t_0}}=y$ setzen:

$$H_\nu\left(\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,y\right)e^{\left(1-\frac{t_0}{t}\right)y^2}=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n H_{\nu+2n}(y). \tag{10}$$

Damit haben wir die links stehende Funktion in eine Reihe nach Hermiteschen Polynomen entwickelt[13]), deren Koeffizienten mit den aus (3) sich ergebenden übereinstimmen müssen, woraus folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^\lambda\lambda!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t_0}{t}x^2}H_\nu\left(\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,x\right)H_\lambda(x)\,dx=0\quad(\lambda=0,1,\ldots,\nu-1), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu+2n}(\nu+2n)!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t_0}{t}x^2}H_\nu\left(\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,x\right)H_{\nu+2n}(x)\,dx=\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{t-t_0}{4t_0}\right)^n, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^{\nu+2n+1}(\nu+2n+1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t_0}{t}x^2}H_\nu\left(\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,x\right)H_{\nu+2n+1}(x)\,dx=0 \tag{13}$$

$$(n=0,1,\ldots).$$

Von diesen Formeln ist (13) trivial, da $H_\nu$ und $H_{\nu+2n+1}$ verschiedenen Geradheitscharakter haben, $H_\nu\left(\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,x\right)H_{\nu+2n+1}(x)$ also eine ungerade Funktion ist. Die Formel (11) bringt auch nichts Unbekanntes, sie ist völlig mit dem ersten Teil der Orthogonalitätsrelation (1) äquivalent. Denn einerseits folgt diese aus ihr für $t=t_0$, andererseits kann man auch (11) aus (1) ableiten. Denn wenn man $\sqrt{\frac{t_0}{t}}\,x=u$ setzt, so lautet die linke Seite von (11) bis auf einen Faktor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}H_\nu(u)\,H_\lambda\left(\sqrt{\frac{t}{t_0}}\,u\right)du\quad\text{mit}\quad 0\leqq\lambda<\nu.$$

[13]) Natürlich könnte man (10) auch aus (7) durch $\nu$-malige Differentiation gewinnen.

Nun besagt aber (1), daß $H_\nu(u)$ zu jedem Polynom niedrigeren Grades orthogonal ist, da dieses ja aus $H_0, \ldots, H_{\nu-1}$ linear zusammengesetzt werden kann. $H_\lambda\left(\sqrt{\frac{t}{t_0}}\,u\right)$ ist aber ein solches Polynom. Interesse besitzt für uns also nur Formel (12), die für $\sqrt{\frac{t_0}{t}} = s$ die Form annimmt:

$$\textbf{(L)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx^2} H_\nu(\sqrt{s}\,x)\, H_{\nu+2n}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^\nu \frac{(\nu+2n)!}{n!} \frac{(1-s)^n}{s^{\frac{\nu+1}{2}+n}}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots;\ s > 0).$$

Die Formel **(L)** enthält beide Teile der Orthogonalitätsrelation (1) für $s = 1$, geht aber weit über (1) hinaus.

Wir wollen **(L)** noch auf eine andere Form bringen, indem wir zunächst, da $H_\nu(\sqrt{s}\,x)\, H_{\nu+2n}(x)$ eine gerade Funktion ist, $\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\int_0^\infty$ schreiben und dann $x^2 = t$ setzen. So erhalten wir:

$$\textbf{(M)} \qquad \int_0^\infty e^{-st} \frac{H_\nu(\sqrt{st})\, H_{\nu+2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi}\,2^\nu \frac{(\nu+2n)!}{n!} \frac{(1-s)^n}{s^{\frac{\nu+1}{2}+n}}.$$

Aus **(M)** ergibt sich für $\nu = 0$ wegen $H_0(z) \equiv 1$ die Formel **(B)**, für $\nu = 1$ wegen $H_1(z) = -2z$ die Formel **(C)**. Durch Summation nach $n$ kann man aus **(M)** noch die Gleichung ableiten:

$$\textbf{(N)} \qquad \int_0^\infty e^{-st} \frac{H_\nu(\sqrt{st})}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^\infty \frac{H_{\nu+2n}(\sqrt{t})}{(\nu+2n)!} = \sqrt{\pi}\,2^\nu s^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{\frac{1}{s}-1} \qquad \left(s > \frac{1}{2}\right).$$

Die Formeln **(M)** und **(N)** stellen zwar nicht direkt Laplace-Transformationen dar, können aber auf die Form von solchen gebracht werden. Wir begnügen uns damit, dies für **(M)** und den Fall eines geradzahligen $\nu = 2m$ zu zeigen. $H_{2m}(z)$ hat die Form

$$H_{2m}(z) = \sum_{k=0}^m \alpha_k z^{2k},$$

also ist

$$H_{2m}(\sqrt{st}) = \sum_{k=0}^m \alpha_k s^k t^k.$$

Die linke Seite von **(M)** erscheint dadurch in der Gestalt:

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k s^k \int_0^\infty e^{-st} t^k \frac{H_{2m+2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=0}^m \alpha_k s^k \mathfrak{L}\left\{t^k \frac{H_{2m+2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right\}.$$

Nun ist aber (nach dem in Anm. [5]) zitierten Gesetz III) für $k \geqq 1$

$$s^k \mathfrak{L}\{F\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{d^k F}{dt^k}\right\},$$

wenn $F(0) = F'(0) = \ldots = F^{(k-1)}(0) = 0$ ist. Dies ist aber für

$$F(t) = t^k \frac{H_{2m+2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

erfüllt, denn die niedrigste Potenz in $F(t)$ ist $t^{k-\frac{1}{2}}$, die Ableitungen bis zur $k-1$-ten enthalten also sämtlich den Faktor $t^{\frac{1}{2}}$, verschwinden daher für $t = 0$. Folglich läßt sich **(M)** tatsächlich als Laplace-Transformation schreiben:

$$\textbf{(0)} \qquad \mathfrak{L}\left\{\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}\left[t^{k-\frac{1}{2}} H_{2m+2n}(\sqrt{t})\right]\right\} = \sqrt{\pi}\, 4^m \frac{(2m+2n)!}{n!} \frac{(1-s)^n}{s^{m+n+\frac{1}{2}}},$$

worauf man natürlich analoge Erörterungen wie in § 2 aufbauen könnte.

(Eingegangen am 21. März 1930.)

# Einige Bemerkungen zu der Abhandlung „Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit“ von M. Lagally.

Von

J. Bonder und S. Neumark in Warschau.

In der oben angegebenen Abhandlung[1]) hat Herr Lagally das Problem der Bewegung der Wirbelpunkte in einem begrenzten Gebiet aufgestellt und einige Sonderfälle eingehend untersucht. Das Problem bildet eine Erweiterung der Aufgabe von Helmholtz und Kirchhoff, welche bekanntlich nur die Bewegung einer Anzahl von freien Wirbeln in der unbegrenzten Ebene in Betracht zieht. Der Verfasser stützt sich auf den folgenden Helmholtzschen Grundsatz: die Bewegung eines jeden Wirbelpunktes wird durch alle anderen Wirbel geleitet, durch das von ihm selbst hervorgebrachte Potential aber nicht beeinflußt. Um also die Geschwindigkeit eines Wirbelpunktes zu bestimmen, braucht man nur vom Potential der vollständigen Bewegung dasjenige Glied wegzulassen, das vom eben betrachteten Wirbel herrührt. Dieses Verfahren wurde nun von Herrn Lagally in dem allgemeineren Falle angewendet, nämlich dann, wenn außer den freien Wirbeln noch eine beliebige Zusatzströmung existiert. Diese wird z. B. dann eingeführt, wenn es sich um gewisse Fälle der Bewegung der Wirbelpunkte in begrenzten Gebieten handelt. Gegen diese Verallgemeinerung ist nichts einzuwenden, solange man nur unter dem komplexen Potential eines Wirbels immer den Ausdruck

$$w = -i\mu \lg (z - c) \tag{1}$$

versteht ($\mu$ Wirbelstärke, $c$ komplexe Koordinate des Wirbelpunktes). Unsere Einschränkung ist dadurch begründet, daß der oben angegebene

[1]) Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Math.-physikal. Klasse, Jahrg. 1914, S. 377—432.

Grundsatz sich im wesentlichen auf die vollständige Symmetrie der Bewegung stützt, deren Potential weggelassen wird. Wie bekannt, besitzt die durch (1) bestimmte Bewegung diese Eigenschaft. In der genannten Arbeit wird indessen diese Forderung nicht berücksichtigt und das oben ausgesprochene Prinzip in solcher Weise angewendet, daß in jedem besonderen Falle ein besonderer nicht mit (1) identischer Ausdruck ohne Eigenschaft der Symmetrie als Potential des Wirbels benutzt wird. Dieses kann in allen Sonderfällen festgestellt werden, welche auf den Seiten 397—431 der Arbeit behandelt worden sind[2]). In diesen Fällen wird nämlich die Methode der konformen Abbildung gebraucht, die dazu dient, um eine Halbebene n ein entsprechend ausgewähltes ebenes Gebiet abzubilden. Dabei versteht der Verfasser unter dem Potential des Wirbels in der abgebildeten Ebene denjenigen Ausdruck, welcher entsteht, wenn man die Abbildungsfunktion n das Potential des ursprünglichen Wirbels in der ersten Ebene einsetzt. Solcher Ausdruck stellt aber eine nicht symmetrische Bewegung dar[3]) (abgesehen von dem trivialen Fall einer linearen Abbildungsfunktion). Aus diesem Grunde müssen die Resultate des Verfassers, die sich auf die Bewegung der Wirbelpunkte beziehen, als nicht zutreffend erkannt werden. Dies gilt nämlich für Sätze, welche an den Seiten 392[4]) und 393[5]) angegeben sind, sowie auch für Lösungen des Problems in drei Sonderfällen, die sich auf die Bewegung eines Wirbels in einer geradlinig aufgeschnittenen Ebene beziehen (S. 397—431). Anstatt erwähnter Lösungen erhielten wir mittels direkter Anwendung des Helmholtzschen Grundsatzes folgende Ergebnisse:

---

[2]) Vgl. auch S. 380, wo man ausdrücklich liest: „Von Wichtigkeit ist noch, daß während in der Ebene alle einzelnen Wirbel von gleicher Art sind und sich nur durch drei Konstanten unterscheiden, in einer Riemannschen Fläche mit der Erweiterung des Bereiches der einwertigen Funktionen auch Wirbel besonderer Art möglich sind, eben den Wirbeln der schlichten Ebene."

[3]) Zum Beispiel S. 397, Formel (11) und S. 419, Formel (20).

[4]) „Aus einem Element der Bahnkurve eines Wirbels geht also dann ein Element der Bahnkurve in der Bildebene hervor, wenn die Abbildung eineindeutig und singularitätenfrei ist und wenn der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung in Ruhe bleibt." Dieser Satz ist nur in Anwendung an diejenigen besonderen Punkte richtig, in welchen die zweite Ableitung der Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ verschwindet.

[5]) „Wenn also eine symmetrische Strömung mit zwei Wirbeln durch konforme Abbildung in eine neue symmetrische Strömung übergeführt wird und wenn die früheren Voraussetzungen erfüllt sind, so geht die Wirbelbahn eines jeden der gegebenen Wirbel durch die konforme Abbildung in die des Bildwirbels über". Dieser Satz ist nimmer richtig — mit Ausnahme des Falles, wo $f(\zeta)$ eine lineare Funktion ist.

A) *Ein ins Unendliche reichendes geradliniges Hindernis* (Fig. 1). Herr Lagally findet (S. 405), daß die Bahnkurve des Wirbelpunktes eine Parabel ist. Die wirkliche Bahnkurve hat in Polarkoordinaten die Gleichung:

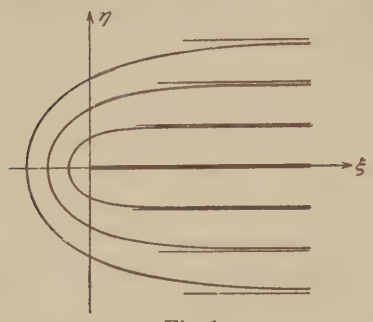


Fig. 1.

$$r \sin \frac{\theta}{2} = \frac{h}{2}, \tag{2}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten entsprechend:

$$\xi = \frac{2\eta^2 - h^2}{2\sqrt{h^2 - \eta^2}}. \tag{2a}$$

Die Kurve besitzt zwei zu dem Hindernisse parallele und von ihm um $h$ entfernte Asymptoten; dabei ist die Entfernung des Scheitels vom Endpunkte des Hindernisses gleich $\frac{h}{2}$.

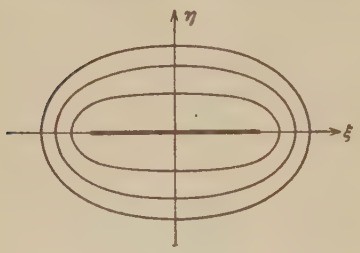


Fig. 2.

B) *Ein geradliniges Hindernis von endlicher Länge* (Fig. 2). Die Bahnkurve des Wirbelpunktes ist keine Ellipse (vgl. S. 422), sondern die ovalartige Kurve mit der Gleichung

$$\xi^2 = a^2 - \eta^2 - \frac{a(2\eta^2 - h^2)}{\sqrt{h^2 - \eta^2}}. \tag{3}$$

Die Konstante $a$ bedeutet die halbe Länge des Hindernisses; $h$ ist ein variabler Parameter. Das Oval schneidet zweimal sowohl die $\xi$-Achse als die $\eta$-Achse. Die auf der $\xi$-Achse sich befindenden Scheitel sind um $\sqrt{a^2 + a\,h}$ vom Koordinatenursprung entfernt.

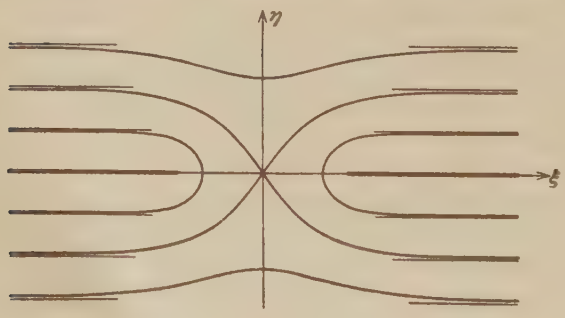


Fig. 3.

C) *Eine Lücke in einem beiderseits ins Unendliche reichenden geradlinigen Hindernisse* (Fig. 3). Die Bahnkurve des Wirbelpunktes ist keine Hyperbel (vgl. S. 421), sondern die Kurve mit der Gleichung

$$\xi^2 = a^2 - \eta^2 + \frac{a(2\eta^2 - h^2)}{\sqrt{h^2 - \eta^2}}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet $a$ die halbe Länge der Lücke. Die Kurve besitzt zwei zu dem Hindernis parallele und von ihm um $h$ entfernte Asymptoten.

Eine nähere Untersuchung der Gleichung (4) zeigt, daß es zwei wesentlich verschiedene Arten der Bahnkurven gibt. Ist nämlich $h < a$, so besteht die Bahnkurve aus zwei getrennten Zügen, von denen jeder zur $\xi$-Achse symmetrisch ist und sie in der Entfernung $\sqrt{a^2 - ah}$ vom Koordinatenursprung schneidet. Ein hinreichend dem Hindernisse benachbarter Wirbelpunkt wird also durch die Lücke sozusagen „hineingezogen" und auf die andere Seite durchgeführt. Ist dagegen $h > a$, so besteht zwar die Kurve auch aus zwei getrennten Zügen, doch schneidet jeder von ihnen die $\eta$-Achse und ist zu derselben symmetrisch; die $\xi$-Achse wird in diesem Falle von der Kurve gar nicht getroffen. Der Einfluß der Lücke auf die Bewegung eines hinreichend entfernten Wirbelpunktes läßt sich also nur durch eine mehr oder weniger deutliche Einbiegung der Bahnkurve bemerken. In dieser Hinsicht sind unsere Resultate von denen des Herrn Lagally besonders verschieden, da nach Herrn Lagally ein beliebig entfernter Wirbelpunkt durch eine beliebig kleine Lücke hineingezogen werden muß.

Die betrachtete Kurvenschar enthält selbstverständlich auch eine Übergangskurve (mit einem Doppelpunkte im Koordinatenursprung), die im Falle $h = a$ erhalten wird. Kommt es vor, daß der Wirbelpunkt sich gerade im Koordinatenursprung befindet, so bleibt er in Ruhe. Nach Herrn Lagally müßte der Wirbelpunkt in solchem Falle auf der $\eta$-Achse sich bewegen

Es ist zu bemerken, daß die Bahnkurven (3) und (4) als Zweige einer einzigen Kurve 6ter Ordnung angesehen werden können.

Die oben von uns besprochene Abhandlung des Herrn Lagally wurde im Jahre 1914 veröffentlicht. Wie weit es uns bekannt ist, hat noch niemand bis jetzt die Resultate dieser Abhandlung in Zweifel gestellt. Dies scheint uns desto sicherer, daß diese Resultate vom Verfasser ohne jede Änderungen in dem Kapitel „Ideale Flüssigkeiten" des Werkes „Handbuch der Physik" (1927) wiederholt wurden[6]). In demselben Kapitel (S. 80) wurde aber ein allgemeines Verfahren von Routh angegeben, mit dem man aus der bekannten Bahn eines einzelnen Wirbels die Bahn des Bildwirbels ableiten kann; dieses Verfahren führt nun in einer besonders einfachen Weise zu unseren Gleichungen (2, 3, 4). In dem Routhschen Handbuch[7])

[6]) Handbuch der Physik 7 (Berlin: Julius Springer 1927), S. 78—80.

[7]) E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper 2 (Leipzig: B. G. Teubner 1898), S. 529—532.

finden wir sogar die effektive Lösung des Falles A; dort wird nämlich die Bewegung eines Wirbelpunktes untersucht, welcher in der Ecke schwimmt, die zwei unter dem Winkel $\pi/n$ gegeneinander geneigte Gerade bilden. Es genügt, in der dort angegebenen Gleichung der Bahnkurve

$$r \sin n\theta = C$$

den Wert $n = \frac{1}{2}$ einzusetzen, um unsere Gleichung (2) zu erhalten.

Warschau, den 12. Dezember 1929.

(Eingegangen am 20. Dezember 1929.)

# Bemerkungen zu vorstehender Note der Herren Bonder und Neumark.

Von

M. Lagally in Dresden.

Die Herren Bonder und Neumark wenden sich gegen eine von mir in einer vor 16 Jahren erschienenen Arbeit vorgenommene Erweiterung der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode zur Bestimmung der Bewegung isolierter Wirbel.

Helmholtz und Kirchhoff untersuchen bekanntlich die Bewegung isolierter Wirbel in der unbegrenzten Ebene und gehen dabei von dem *Grundsatz* aus, daß die Bewegung jedes einzelnen Wirbels in jedem Zeitpunkt nur von der Lage der anderen Wirbel abhängt, durch das eigene Strömungsfeld aber nicht beeinflußt wird.

Wenn man die Bewegung isolierter Wirbel in einer Riemannschen Fläche untersuchen will, so ist das zunächst ein rein mathematisches Problem, auch wenn es bei weiterer Verfolgung zu physikalisch deutbaren Ergebnissen führt. In einer Riemannschen Fläche, die der Einfachheit halber zweiblättrig mit Verzweigungspunkten an den Stellen 0 und $\infty$ angenommen werden soll, sind neben den Wirbeln der einfachen Ebene noch Wirbel besonderer Art möglich mit dem komplexen Potential $-i\mu \lg(\sqrt{z}-\sqrt{\zeta})$.

Ein solcher Wirbel kann zufolge der Identität

$$-i\mu \lg(\sqrt{z}-\sqrt{\zeta}) = -i\mu \lg(z-\zeta) + i\mu \lg(\sqrt{z}+\sqrt{\zeta})$$

durch einen Wirbel der Ebene $-i\mu \lg(z-\zeta)$ in beiden Blättern und einen neuen Wirbel der Fläche $+i\mu \lg(\sqrt{z}+\sqrt{\zeta})$ ersetzt werden. Man kann also zwar einen Wirbel der Fläche in einer Umgebung des singulären Punktes durch einen Wirbel der Ebene und eine Potentialströmung ersetzen, aber man kann das nicht in der ganzen Fläche tun, wenn man nicht zugleich die nun im anderen Blatt neu auftretende Singularität durch Hinzunahme eines neuen Wirbels der Fläche wieder beseitigt.

Es läßt sich also die von mir im ersten Teil meiner Arbeit von 1914 durchgeführte Erweiterung der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode durch Hinzunahme beliebiger Potentialströmungen konsequent auch auf Gebiete einer Riemannschen Fläche anwenden, die nur einem Blatt angehören. Auf diese Weise wird man zu den Ergebnissen der Herren Bonder und Neumark geführt[1]). Anderseits ist aber auch die im zweiten Teil der erwähnten Arbeit eingeführte Übertragung des Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatzes, daß ein Wirbel durch das eigene Strömungsfeld nicht beeinflußt wird, auf Wirbel Riemannscher Flächen mindestens nicht ohne mathematisches Interesse.

Um so mehr, als der Helmholtz-Kirchhoffsche „Grundsatz" selbst meines Wissens noch nicht einwandfrei bewiesen ist und deshalb bis auf weiteres als eine Zusatzannahme zu den hydrodynamischen Grundgleichungen aufgefaßt werden muß. Wenn Bonder und Neumark sagen, daß sich der Helmholtz-Kirchhoffsche Grundsatz im wesentlichen auf die vollständige Symmetrie der Bewegung stützt, so klingt das recht plausibel, hat aber nichts von einem mathematischen Beweis an sich. Aber auch den Erläuterungen, die z. B. Kirchhoff in der 20. Vorlesung seiner Mechanik gibt, wird man keine Beweiskraft zuerkennen. Es ist zwar leicht zu zeigen, daß der Schwerpunkt eines Wirbels von endlichem Querschnitt in Ruhe bleibt, wenn weiter keine Strömung vorhanden ist; aber ebenso ergibt sich, daß er, wenn eine andere Strömung überlagert ist, nicht etwa einer Stromlinie dieser Strömung folgt. Man kann also einen isolierten Wirbel nicht in demselben Sinn mit dem Schwerpunkt eines Wirbels von endlichem Querschnitt identifizieren, wie man etwa in der Dynamik einen Massenpunkt mit dem Schwerpunkt einer Massenverteilung identifizieren kann. Die Abweichung der Schwerpunktsbahn von der Stromlinie nimmt zwar ab, wenn man den Querschnitt des Wirbels abnehmen läßt; aber das gleichzeitige unbegrenzte Anwachsen der Wirbeldichte, verbunden mit der Unsicherheit über die zeitliche Änderung des Querschnitts, macht den Grenzübergang unausführbar. Will man also zu exakten Resultaten gelangen, so bleibt eigentlich nur übrig, Lichtenstein[2]) zu folgen und die permanente Bewegung von Wirbeln endlichen Querschnitts zu untersuchen.

Der innere Grund der Schwierigkeiten liegt in dem wesentlichen Unterschied, der zwischen einem Wirbel von endlichem Querschnitt und einem isolierten Wirbel besteht, da ersterer endliche, letzterer in jeder Umgebung des singulären Punktes unendlich große Bewegungsenergie besitzt und sich deshalb der unmittelbaren Anwendung der Prinzipien der Dynamik ent-

---

[1]) Vgl. auch M. Lagally, Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 231–239.

[2]) L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 450–457.

zieht. Da in der Natur isolierte Wirbel nicht existieren und anderseits die Schwerpunkte von Wirbeln mit endlichem Querschnitt andere als die nach der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode gefundenen Bahnen beschreiben, wird man die physikalische Bedeutung ihrer Ergebnisse nicht zu hoch anschlagen dürfen; es besteht kein Mittel, die erreichte Annäherung zu beurteilen. Anderseits sind durch Beobachtung von Wirbelbahnen schon in einfachen Fällen Abweichungen festzustellen, deren Ursachen nicht mit Sicherheit anzugeben sind. Für die von Bonder und Neumark angegebene Methode spricht jedenfalls die Tatsache, daß bei einigen Beispielen die von ihnen gefundenen Wirbelbahnen größere physikalische Wahrscheinlichkeit besitzen als die von mir seinerzeit berechneten.

(Eingegangen am 11. Februar 1930.)

# Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.

## Vierte Abhandlung.

## Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

---

In zwei in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten[1]) habe ich eine Anzahl Existenzsätze in der Theorie der ideellen, inkompressiblen homogenen oder auch heterogenen Flüssigkeiten bewiesen. Es handelte sich dabei in allen Fällen um eine den Gesamtraum oder ein geschlossenes ruhendes oder in einer bekannten Bewegung begriffenes Gefäß lückenlos erfüllende Flüssigkeitsmasse. Ist das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t_0$ bekannt, so läßt sich, sofern gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind und über das Verhalten im Unendlichen geeignete Annahmen gemacht werden, für alle $t$ innerhalb eines hinreichend kurzen Zeitintervalls $\langle t_0, t\rangle$ die Existenz einer und nur einer den Anfangs- und Grenzbedingungen genügenden Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung erweisen. Neben diesen Existenzsätzen „im kleinen" wird in den obigen Arbeiten die Existenz einer Reihe spezieller permanenter Bewegungen einer homogenen Flüssigkeit dargetan. In der an zweiter Stelle genannten Abhandlung findet sich überdies ein Stetigkeitssatz, ungefähr dahingehend, daß eine kleine Änderung des Anfangszustandes eine ebenfalls kleine Änderung des weiteren Verlaufs der Bewegung zur Folge hat[2]). — Auch dies ist ein Satz im kleinen, da die

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 89—154; S. 309—316. Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 196—323. Zum Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der beiden obigen Abhandlungen nicht erforderlich.

[2]) Vgl. Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 319—323.

ragliche Bewegung als lediglich innerhalb eines hinreichend kleinen Zeitntervalls vor sich gehend gedacht wird.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein neuer, erheblich weiter eichender Stetigkeitssatz bewiesen. Auch jetzt handelt es sich um eine len Gesamtraum erfüllende Masse einer ideellen, inkompressiblen homogenen Flüssigkeit. Es wird aber diesmal angenommen, daß eine den üblichen Stetigkeitsbedingungen genügende Bewegung der Flüssigkeit innerhalb eines *nicht notwendig kurzen* Zeitintervalls von vornherein bekannt sei, und es wird gezeigt, *daß sich diese Bewegung in eine stetige Schar von Bewegungen einbetten läßt, die zu wenig geänderten Anfangs- oder Grenzbedingungen gehören und die in dem ganzen*, wie gesagt, *nicht notwendig kurzen Zeitintervall erklärt sind.* So gibt es beispielsweise Flüssigkeitsbewegungen in der Umgebung der vorhin erwähnten speziellen permanenten Bewegungen, die sich exakt innerhalb „großer" Zeiträume verfolgen lassen [3]).

Als eine Anwendung der den vorstehenden Resultaten zugrunde legenden methodischen Gedanken erscheint die im zweiten Kapitel gegebene Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger, paralleler Wirbelfäden. In der Regel wird mit Kirchhoff das Problem auf die Auflösung eines Systems kanonischer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt, indem jeder einzelne Wirbelfaden als lediglich unter dem Einfluß aller übrigen Fäden stehend betrachtet und von seiner Wirkung auf sich selbst „aus Gründen der Symmetrie" abgesehen wird [4]). Da hierbei die kinetische Energie der Flüssigkeit in der Umgebung eines jeden Wirbelfadens unendlich wird, so läßt sich die fragliche Bewegung natürlich physikalisch nicht realisieren. — In dem zweiten Kapitel wird gezeigt, daß es Flüssigkeitsbewegungen gibt, die, sofern gewisse durch Ungleichheiten ausdrückbare Bedingungen erfüllt sind, sich innerhalb „großer" Zeitintervalle von der Kirchhoffschen Bewegung überall außerhalb einer Zone in der unmittelbaren Nachbarschaft der Wirbelfäden selbst beliebig wenig unterscheiden.

Als mathematisch wesentliches Hilfsmittel erscheinen auch in dieser Arbeit die von mir vor einiger Zeit angegebenen neuen potentialtheoretischen Hilfssätze [5]).

---

[3]) Der Übergang zu einer heterogenen Flüssigkeit oder zu einer ein geschlossenes Gefäß lückenlos erfüllenden Flüssigkeitsmasse würde keinerlei wesentliche Schwierigkeiten bieten.

[4]) Vgl. die beiden vorangehenden Noten von J. Bonder und S. Neumark und von M. Lagally.

[5]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 72—88; II. Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften **78** (1926), S. 147—212; III. S. 213—239.

## Inhaltsübersicht.

Erstes Kapitel. Der Stetigkeitssatz.
§ 1. Problemstellung.
§ 2. Vorbereitende Betrachtungen und Hilfssätze.
§ 3. Sukzessive Näherungen.
§ 4. Eine Verallgemeinerung.
Zweites Kapitel. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffsche Theorie geradliniger Wirbelfäden.

## Erstes Kapitel.

## Der Stetigkeitssatz.

### § 1.

### Problemstellung.

Betrachten wir eine sich allseitig ins Unendliche erstreckende Mass reibungsloser unzusammendrückbarer Flüssigkeit konstanter Dichte $\varrho$, di unter der Wirkung konservativer Kräfte steht. Es sei $U(x, y, z, t)$ da Potential der Einheitskräfte, $U$, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ sind für alle in Betrach kommenden Zeiten und alle $x, y, z$ stetige Funktionen ihrer vier Argu mente. Für $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ konvergiert $U$ gegen einen feste Wert, den wir gleich Null setzen können. Die partiellen Ableitunge $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ verhalten sich im Unendlichen wie $R^{-2}$,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = O(R^{-2}), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = O(R^{-2}), \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = O(R^{-2}).$$ [6])

Wir nehmen an, daß uns in dem *nicht notwendig hinreichend kurze* Zeitintervall $\langle t_0, t\rangle$ eine, unter Zugrundelegung der Lagrangeschen Variable durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = x(a, b, c, t), \qquad y = y(a, b, c, t), \qquad z = z(a, b, c, t)$$

bestimmte Bewegung unserer Flüssigkeit bekannt ist, die folgenden Be dingungen genügt.

Die Funktionen (1) sind für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und für alle endliche $a, b, c$ stetig. Für $t = t_0$ ist $x = a$, $y = b$, $z = c$. Im Innern und au

---

[6]) Das bekannte durch Landau eingebürgerte Symbol $O$ besagt hier, daß be spielsweise $R^2 \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$ für alle hinreichend großen $R$ unterhalb einer festen Schranke lieg

dem Rande eines von einer geschlossenen Fläche $S_0$ der Klasse $Ah$[7]) vom topologischen Typus einer Torusfläche begrenzten Bereiches $T_0 + S_0$ und für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$, kürzer in dem vierdimensionalen Zylinderkörper $\{T_0 + S_0; \langle t_0, t\rangle\}$, haben (1) stetige, der $H$-Bedingung[8]) genügende partielle Ableitungen erster Ordnung

$$(2) \qquad \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}; \frac{\partial y}{\partial a}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial c}.$$

Auch in einem jeden außerhalb von $T_0$ gelegenen beschränkten Bereiche, der Rand allemal eingeschlossen, verhalten sich (2) stetig und erfüllen als Funktionen der Ortsvariablen eine $H$-Bedingung, können aber beim Durchgang durch $S_0$ sprungweise Unstetigkeiten erleiden. Die Komponenten der Geschwindigkeit

$$(3) \qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

sind für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und für alle endlichen $a, b, c$, also auch auf $S_0$, stetig. Im Unendlichen verschwinden $u, v, w$ wie $R_0^{-2}$,

$$(4) \quad u = O(R_0^{-2}), \qquad v = O(R_0^{-2}), \qquad w = O(R_0^{-2}), \qquad R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

und zwar für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ gleichmäßig[9]). Darum ist auch für alle in Betracht kommenden $t$ gleichmäßig

$$(5) \qquad x - a = O(R_0^{-2}), \qquad y - b = O(R_0^{-2}), \qquad z - c = O(R_0^{-2}).$$

Im Unendlichen „ruht" also die Flüssigkeit.

Wie ich an einer anderen Stelle gezeigt habe, ziehen die Relationen (4) im Verein mit den übrigen Voraussetzungen das Bestehen der weiteren Beziehungen

$$(6) \quad u = O(R^{-2}), \qquad v = O(R^{-2}), \qquad w = O(R^{-2}) \qquad (R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

nach sich[10]).

---

[7]) Dies besagt, daß $S_0$ von einer endlichen Anzahl Flächenstücke dachziegelartig überdeckt werden kann, so daß in jedem einzelnen dieser Stücke die Gleichung der Fläche in der Form $z = z(x, y)$ oder $x = x(y, z)$ oder $y = y(x, z)$ geschrieben werden kann, unter $x(y, z)$, $y(x, z)$, $z(x, y)$ Funktionen verstanden, die stetig sind und der Hölderschen Bedingung (kürzer der $H$-Bedingung) genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die zuletzt genannte Bedingung bedeutet aber das Bestehen der Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} z(x+h, y+l) - \frac{\partial}{\partial x} z(x, y)\right| \leqq A(h^2 + k^2)^{\frac{\lambda}{2}}, \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad (A \text{ konstant}).$$

[8]) Vgl. die Schlußbemerkungen der Fußnote [7]).

[9]) Dies besagt, daß für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und alle hinreichend großen $R_0$ beispielsweise

$$|u| \leqq A_1 R_0^{-2} \qquad (A_1 \text{ konstant})$$

gilt.

[10]) Vgl. L. Lichtenstein, Bemerkung über einen Verzerrungssatz bei topologischen Abbildungen in der Hydromechanik, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 321—324.

Sowohl in $\{T_0 + S_0; \langle t_0, t\rangle\}$ als auch in jedem beschränkten Bereich außerhalb von $T_0$ (und alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$) existieren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}, \frac{\partial u}{\partial b}, \cdots, \frac{\partial w}{\partial c}, \tag{7}$$

verhalten sich stetig und erfüllen, als Funktionen der Ortsvariablen, ein $H$-Bedingung.

Durch Vermittlung der Funktionen (1) wird dem Bereiche $T_0 + S$ im Raume $x$-$y$-$z$ als sein Bild ein von einer geschlossenen Fläche $S$ de Klasse $Ah$ begrenzter Bereich $T + S$ umkehrbar eindeutig und steti zugeordnet.

Wie man leicht sieht, haben $u, v, w$, als Funktionen von $x, y, z$, aufgefaßt, für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und alle $(x, y, z)$ in $T + S$, kürzer i $\{T + S; \langle t_0, t\rangle\}$ stetige, der $H$-Bedingung genügende Ableitungen erste Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{8}$$

Das gleiche gilt für jeden beschränkten Bereich des Raumes $x$-$y$-$z$ außer halb von $T$ (und natürlich wiederum für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$).

Wir nehmen darüber hinaus an, daß auch $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ existiere und sich wie $\frac{\partial u}{\partial x}$ verhalten[11]).

Augenscheinlich erfüllen auch die Wirbelkomponenten

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{9}$$

in den soeben betrachteten Bereichen eine $H$-Bedingung. Da es sich un eine inkompressible Flüssigkeit handelt, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Es möge nun

in $T_0 + S_0 \ldots \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 \neq 0$, außerhalb von $T_0$ aber $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ d. h. die Bewegung wirbellos sein. Auf $S_0$ sei

$$\xi_0 \cos(n_0, a) + \eta_0 \cos(n_0, b) + \zeta_0 \cos(n_0, c) = 0, \tag{11}$$

unter $(n_0)$ die Innennormale zu $S_0$, unter $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ die Werte der Wirbel komponenten zur Zeit $t_0$ verstanden. Dies besagt, daß $S_0$ aus laute Wirbellinien besteht. Nach bekannten Sätzen ist

in $T + S \ldots \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, außerhalb von $T$ hingegen $\xi = \eta = \zeta = 0$

---

[11]) Die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ folgt übrigens, wen die Existenz der Ableitungen nach den Ortsvariablen feststeht, aus den Impulssätzen Vgl. L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 392—394.

Es gilt weiter auf $S$

$$\xi\cos(n,x)+\eta\cos(n,y)+\zeta\cos(n,z)=0. \tag{12}$$

Auch $S$ besteht aus lauter Wirbellinien. Dies alles folgt aus den Cauchyschen Relationen

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{\partial x}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial x}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0,\\ \eta&=\frac{\partial y}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial y}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0,\\ \zeta&=\frac{\partial z}{\partial a}\xi_0+\frac{\partial z}{\partial b}\eta_0+\frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0.\end{aligned} \tag{13}$$

Schließlich gelten, wie man weiß, die Formeln

$$\begin{aligned}x&=a+\int_{t_0}^{t}dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T\frac{1}{r}\eta'd\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T\frac{1}{r}\zeta'd\tau'\right\},\\ y&=b+\int_{t_0}^{t}dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T\frac{1}{r}\zeta'd\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T\frac{1}{r}\xi'd\tau'\right\},\\ z&=c+\int_{t_0}^{t}dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T\frac{1}{r}\xi'd\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T\frac{1}{r}\eta'd\tau'\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

[12])

$$(r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,\quad d\tau'=dx'dy'dz').$$

Es mögen jetzt $\dot{\mathfrak{A}}(a,b,c)$, $\dot{\mathfrak{B}}(a,b,c)$, $\dot{\mathfrak{C}}(a,b,c)$ drei in $T_0+S_0$ erklärte stetige Funktionen bedeuten, die stetige, der $H$-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda$ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

Wir bezeichnen zur Vereinfachung mit $\left|\frac{\partial\dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|_\lambda$ den Höchstwert des Quotienten

$$\frac{1}{(h^2+k^2+l^2)^{\frac{\lambda}{2}}}\left|\frac{\partial}{\partial a}\dot{\mathfrak{A}}(a+h,b+k,c+l)-\frac{\partial}{\partial a}\dot{\mathfrak{A}}(a,b,c)\right|$$

---

[12]) Vgl. beispielsweise loc. cit. [11]) XI. und XII. Kapitel. Bei der Ableitung der Formeln (14) wird in der Regel vorausgesetzt, daß $\xi$, $\eta$, $\zeta$ stetige, der Bedingung

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

genügende Ableitungen erster Ordnung haben. Im vorliegenden Falle brauchen die fraglichen Ableitungen nicht notwendig zu existieren. Doch bietet ein Beweis der Formeln (14) keinerlei Schwierigkeiten. Es genügt $u$, $v$, $w$ (und darum nach (9) auch $\xi$, $\eta$, $\zeta$) durch analytische und reguläre Funktionen, $u_n, v_n, w_n$, die sich im Unendlichen wie $u$, $v$, $w$ verhalten, zu approximieren, für die „approximierenden (nicht notwendig das Volumen erhaltenden) Bewegungen" die zu (14) analogen Formeln, die freilich diesmal auch noch Glieder enthalten, die von der Divergenz von $u_n, v_n, w_n$ abhängen, aufzustellen und zur Grenze überzugehen. Wie man auch jetzt noch von (14) zu (9) und von da weiter zu den Euler-Lagrangeschen Gleichungen zurückgelangt, findet sich in der zweiten Abhandlung dieser Serie auf S. 262–269 ausführlich angegeben.

für alle $(a+h, b+k, c+l)$ in $T_0+S_0$ bei festgehaltenem $(a, b, c)$. Augenscheinlich ist $\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|_\lambda$ eine in $T_0+S_0$ erklärte beschränkte Funktion von $(a, b, c)$. Eine analoge Bedeutung haben die Ausdrücke $\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial b}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|_\lambda$.

Nach bekannten Sätzen wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a + \dot{\mathfrak{A}}(a, b, c), \\ \dot{b} &= b + \dot{\mathfrak{B}}(a, b, c), \\ \dot{c} &= c + \dot{\mathfrak{C}}(a, b, c), \end{aligned} \tag{15}$$

wenn, wie wir annehmen wollen, $\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|$ hinreichend klein sind, eine topologische Abbildung des Bereiches $T_0+S_0$ auf einen Bereich $\dot{T}_0+\dot{S}_0$ vermittelt[13]).

Wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{Max}\Big\{ &|\dot{\mathfrak{A}}(a, b, c)|, |\dot{\mathfrak{B}}(a, b, c)|, |\dot{\mathfrak{C}}(a, b, c)|; \\ &\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|; \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right|_\lambda \Big\} = \mathfrak{O}_0. \end{aligned} \tag{16}$$ [13a])

Ist $\mathfrak{O}_0$ hinreichend klein, so lassen sich die Gleichungen (15) nach $a, b, c$ in der Form

$$\begin{aligned} a &= \dot{a} + \mathfrak{A}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}), \\ b &= \dot{b} + \mathfrak{B}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}), \\ c &= \dot{c} + \mathfrak{C}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) \end{aligned} \tag{17}$$

auflösen. Die Funktionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ haben stetige, der $H$-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung, und es gilt

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \dot{a}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \dot{c}}\right|; \left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \dot{a}}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \dot{c}}\right|_\lambda \leqq \alpha_1 \mathfrak{O}_0, \tag{18}$$ [14])

unter $\alpha_1$ eine Konstante verstanden, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$.

Es seien weiter $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$ gewisse in $\dot{T}_0+\dot{S}_0$ erklärte stetige, einer $H$-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda$ genügende Funktionen,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \dot{\xi}_0(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) = \hat{\dot{\xi}}_0(a, b, c), \\ \dot{\eta}_0 &= \dot{\eta}_0(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) = \hat{\dot{\eta}}_0(a, b, c), \\ \dot{\zeta}_0 &= \dot{\zeta}_0(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) = \hat{\dot{\zeta}}_0(a, b, c). \end{aligned} \tag{19}$$

---

[13]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [5]) II, S. 148–151.

[13a]) Hier wie weiter unten (vgl. beispielsweise (20)) hat Max $\{\ \}$ die obere Grenze des Klammerausdruckes zu bezeichnen.

[14]) Die Ausdrücke $\left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \dot{a}}\right|_\lambda, \ldots$ sind in ähnlicher Weise wie $\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|_\lambda, \ldots$ erklärt. Jetzt sind freilich die unabhängigen Veränderlichen $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$.

Wir setzen

$$\text{(20)}\quad \text{Max}\,\{|\hat{\xi}_0-\xi_0|, |\hat{\eta}_0-\eta_0|, |\hat{\zeta}_0-\zeta_0|; |\hat{\xi}_0-\xi_0|_\lambda, |\hat{\eta}_0-\eta_0|_\lambda, |\hat{\zeta}_0-\zeta_0|_\lambda\} = \mathfrak{S}_1.\ ^{15})$$

Offenbar ist

$$\text{(21)}\quad |\dot{\xi}_0|, |\dot{\eta}_0|, |\dot{\zeta}_0| \leqq \alpha_3,$$

$$\text{(22)}\quad |\dot{\xi}_0|_\lambda, |\dot{\eta}_0|_\lambda, |\dot{\zeta}_0|_\lambda \leqq \alpha_3.\ ^{16})$$

Wir behaupten nunmehr, daß es, *wenn* $\mathfrak{S}_0$ *und* $\mathfrak{S}_1$ *hinreichend klein sind, im Raume* $\dot{a}$-$\dot{b}$-$\dot{c}$ *eine und nur eine in dem Zeitintervalle* $\langle t_0, t\rangle$ *erklärte Bewegung einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit,*

$$\text{(23)}\quad \begin{aligned} x &= \dot{x}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t),\\ y &= \dot{y}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t),\\ z &= \dot{z}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t), \end{aligned}$$

*gibt, die folgende Eigenschaften hat.*

*Die Funktionen* (23) *sind, was ihre Stetigkeitseigenschaften, insbesondere das Verhalten im Unendlichen betrifft, ganz wie die Funktionen* (1) *beschaffen, nur tritt für die Unstetigkeitsfläche* $S_0$ *die Fläche* $\dot{S}_0$ *ein. Zur Zeit* $t_0$ *hat der Wirbelvektor in* $\dot{T}_0 + \dot{S}_0$ *zu Komponenten* $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$, *während außerhalb von* $\dot{T}_0$ *die Bewegung wirbellos ist. Sind die Einheitskräfte, wie wir annehmen wollen, auch jetzt noch konservativ, so ist die Bewegung für alle* $t$ *in* $\langle t_0, t\rangle$ *außerhalb des Bildbereiches* $\dot{T} + \dot{S}$ *von* $\dot{T}_0 + \dot{S}_0$ *wirbellos, und es gelten nach Cauchy und Helmholtz die Formeln*

$$\text{(24)}\quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{a} + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\eta}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\zeta}'\,d\dot{\tau}' \right\},\\ \dot{y} &= \dot{b} + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\zeta}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\xi}'\,d\dot{\tau}' \right\},\\ \dot{z} &= \dot{c} + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\xi}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\,\dot{\eta}'\,d\dot{\tau}' \right\} \end{aligned}$$

$$(\dot{r}^2 = (\dot{x}-\dot{x}')^2 + (\dot{y}-\dot{y}')^2 + (\dot{z}-\dot{z}')^2, \quad d\dot{\tau}' = d\dot{x}'\,d\dot{y}'\,d\dot{z}'),$$

---

[15]) Bei der Bildung von $|\hat{\xi}_0-\xi_0|_\lambda, \ldots$ ist zu beachten, daß jetzt $a, b, c$ die unabhängigen Veränderlichen sind.

[16]) Hier sind $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ die unabhängigen Veränderlichen. Es ist übrigens einleuchtend, daß auch $|\hat{\xi}_0|_\lambda, |\hat{\eta}_0|_\lambda, |\hat{\zeta}_0|_\lambda \leqq \alpha_3'$ ($\alpha_3'$ konstant) gilt.

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0,$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \tag{25}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0.$$

Wir schreiben für (24) kürzer

$$\dot{x} - \dot{a} = \int_{t_0}^{t} \dot{\Lambda}\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}\, dt,$$

$$\dot{y} - \dot{b} = \int_{t_0}^{t} \dot{M}\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}\, dt, \tag{24'}$$

$$\dot{z} - \dot{c} = \int_{t_0}^{t} \dot{N}\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}\, dt.$$

*Läßt man $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ gegen Null konvergieren, so konvergieren $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ gegen $x, y, z$, und zwar für alle $a, b, c$ und alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ gleichmäßig.*

Unsere Behauptung besagt offenbar, daß *sich die gegebene Bewegung* (1) *in eine stetige Schar von Flüssigkeitsbewegungen einbetten läßt.* Wesentlich ist dabei, daß es *nicht* nötig ist, vorauszusetzen, daß das Zeitinterval $\langle t_0, t\rangle$, in dem die gegebene Bewegung vor sich geht und in dem zugleich die Existenz benachbarter Bewegungen bewiesen wird, hinreichend klein sei. Unser Satz, der wesentlich weiter reicht, als der in der zweiten Abhandlung bewiesene Stetigkeitssatz[17]) kann noch insofern erweitert werden, als die Forderung, die zu (1) benachbarten Bewegungen möchten sich in allen Stücken wie diese verhalten, aufgegeben werden darf, so daß z. B. in der Umgebung der Ausgangsbewegung *überall* $\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 \neq 0$ ausfallen kann. Man vergleiche hierüber weiter unten die Ausführungen des § 4.

## § 2.

## Vorbereitende Betrachtungen und Hilfssätze.

Betrachten wir vorübergehend ein System in $\{T_0 + S_0; \langle t_0, t\rangle\}$ erklärter stetiger Funktionen

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t), \tag{26}$$

die daselbst stetige, der $H$-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen haben und überdies so beschaffen sind, daß für $t = t_0$

$$x = \dot{a}, \quad y = \dot{b}, \quad z = \dot{c} \tag{27}$$

gilt.

---

[17]) Vgl. loc. cit. [2]).

Wir setzen

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(t) = \operatorname{Max}\left\{|x-x|, |y-y|, |z-z|; \left|\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z-z)\right|; \right.$$
$$\left. \left|\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z-z)\right|_\lambda \right\} \leqq \mathfrak{O}^*. \tag{28}$$

Da für $t = t_0$ natürlich $x = a$, $y = b$, $z = c$ ist, so folgt aus (27), (15), (16), (28) augenscheinlich

$$\mathfrak{O}_0 \leqq \mathfrak{O}^*. \tag{28'}$$

Aus dem, was wir über die Funktionen (1) wissen, folgt augenscheinlich

$$\begin{aligned} |x|, |y|, |z| &\leqq \alpha_4, \\ \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial z}{\partial c}\right| &\leqq \alpha_5, \\ \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial z}{\partial c}\right|_\lambda &\leqq \alpha_6, \end{aligned} \tag{29}$$

ferner

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x}(x-x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(z-z)\right| &\leqq \alpha_7 \mathfrak{O}(t) \leqq \alpha_7 \mathfrak{O}^*, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(x-x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(z-z)\right|_\lambda &\leqq \alpha_8 \mathfrak{O}(t) \leqq \alpha_8 \mathfrak{O}^*. \end{aligned} \tag{30}$$

[18])

Nach bekannten Sätzen wird durch (26), wenn, wie wir annehmen wollen, $\mathfrak{O}^*$ hinreichend klein ist, eine topologische Abbildung des Bereiches $T_0 + S_0$ auf einen (mit $t$ variablen) Bereich $T + S$ vermittelt.

Wir können die Formeln (14) unter sinngemäßer Benutzung der auf S. 616 eingeführten Abkürzungen in der Form

$$\begin{aligned} x - a &= \int_{t_0}^{t} \Lambda\{x, y, z\}\, dt, \\ y - b &= \int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\{x, y, z\}\, dt, \\ z - c &= \int_{t_0}^{t} \mathsf{N}\{x, y, z\}\, dt \end{aligned} \tag{14'}$$

schreiben. Betrachten wir nun die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Lambda\{x, y, z\} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\, d\tau', \\ \mathsf{M}\{x, y, z\} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\xi'\, d\tau', \\ \mathsf{N}\{x, y, z\} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\xi'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\eta'\, d\tau' \end{aligned} \tag{31}$$

$$(r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad d\tau' = dx'\, dy'\, dz')$$

[18]) In (30) werden $x, y, z$ als Funktionen von $x, y, z, t$ aufgefaßt.

mit

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial x}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial x}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0,$$

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial y}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial y}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \tag{32}$$

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial z}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial z}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0.$$

Wir beweisen, daß sich für $\mathbf{\Lambda} - \Lambda$, $\mathbf{M} - M$, $\mathbf{N} - N$ und die partiellen Ableitungen dieser Ausdrücke in bezug auf $a, b, c$ gewisse Ungleichheiten angeben lassen, in denen rechter Hand nur die Schranken $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}(t)$ auftreten.

Diese Ungleichheiten spielen bei dem alsbald anzusetzenden Konvergenzbeweis der sukzessiven Näherungen eine entscheidende Rolle.

Wir beginnen mit einer Abschätzung der Differenz $\xi - \xi$. Nach (32) und (13) ist

$$\xi - \xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)\dot{\xi}_0 + \frac{\partial x}{\partial a}(\dot{\xi}_0 - \xi_0) + \ldots + \left(\frac{\partial x}{\partial \dot{c}} - \frac{\partial x}{\partial c}\right)\dot{\zeta}_0 + \frac{\partial x}{\partial c}(\dot{\zeta}_0 - \zeta_0) \tag{33}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial \dot{a}} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial a}(x - x) + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \dot{a}},$$

darum wegen (18), (28), (29)

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right| \leqq \alpha_9 \mathfrak{O}_0 + \alpha_{10}\mathfrak{O}. \tag{34}$$

Analoge Ungleichheiten gelten für $\left|\frac{\partial x}{\partial \dot{b}} - \frac{\partial x}{\partial b}\right|$ und $\left|\frac{\partial x}{\partial \dot{c}} - \frac{\partial x}{\partial c}\right|$.

Beachtet man (20) und die zu (33) und (34) analogen Beziehungen, die man erhält, wenn man von $\eta - \eta$ und $\zeta - \zeta$ ausgeht, so findet man leicht

$$|\xi - \xi|, |\eta - \eta|, |\zeta - \zeta| = \alpha_{11}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{12}\mathfrak{O}_1 + \alpha_{13}\mathfrak{O}. \tag{35}$$

Es ist weiter, wie man leicht verifiziert,

$$\left|\left(\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)\dot{\xi}_0\right|_\lambda \leqq \left|\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right|_\lambda \mathbf{Max}|\dot{\xi}_0| + |\dot{\xi}_0|_\lambda \mathbf{Max}\left|\frac{\partial x}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right| \quad [19]$$

[19]) Wir fassen hier $\frac{\partial x}{\partial \dot{a}}$ und $\dot{\xi}_0$ als Funktionen von $a, b, c$ auf.

und ferner

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \dot a}-\frac{\partial x}{\partial a}\right|_\lambda=\left|\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial \dot a}-1\right)+\frac{\partial}{\partial a}(x-x)+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \dot a}+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \dot a}\right|_\lambda$$

6)

$$\leqq\left|\frac{\partial x}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial \dot a}-1\right)\right|_\lambda+\left|\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right|_\lambda+\left|\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \dot a}\right|_\lambda+\left|\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \dot a}\right|_\lambda\leqq\alpha_{14}\mathfrak{V}_0+\alpha_{15}\mathfrak{V}\,.\ ^{20})$$

Augenscheinlich genügt $\left|\left(\frac{\partial x}{\partial \dot a}-\frac{\partial x}{\partial a}\right)\dot\xi_0\right|_\lambda$ einer analogen Ungleichheit.

Ferner ist

$$(37)\qquad \left|\frac{\partial x}{\partial a}(\dot\xi_0-\xi_0)\right|_\lambda\leqq|\dot\xi_0-\xi_0|_\lambda\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|+\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|_\lambda\mathrm{Max}\,|\dot\xi_0-\xi_0|\leqq\alpha_{16}\mathfrak{V}_1.$$

Aus (36), (37) und den hierzu analogen Ungleichheiten, die man erhält, wenn man $a$ mit $b$ und $c$, ferner $x$ mit $y$ und $z$ vertauscht, finden wir wegen (33) ohne Schwierigkeit

$$(38)\qquad |\xi-\xi|_\lambda,\ |\eta-\eta|_\lambda,\ |\zeta-\zeta|_\lambda\leqq\alpha'_{17}\mathfrak{V}_0+\alpha'_{18}\mathfrak{V}_1+\alpha'_{19}\mathfrak{V}\,.$$

Bemerkung. Der vorstehenden Ableitung gemäß erscheinen hier $\xi, \xi, \ldots$ zunächst als Funktionen von $a, b, c, t$. Die Beziehung (38) besagt, ausführlich geschrieben, daß beispielsweise

$$|{}_1(\xi-\xi)-{}_2(\xi-\xi)|\leqq(\alpha'_{17}\mathfrak{V}_0+\alpha'_{18}\mathfrak{V}_1+\alpha'_{19}\mathfrak{V})\,\delta_{12}^\lambda$$

ist. Indessen ist gewiß

$$\frac{\delta_{12}}{d_{12}}<\alpha_{20},\qquad d_{12}^2=({}_1x-{}_2x)^2+({}_1y-{}_2y)^2+({}_1z-{}_2z)^2,$$

darum

$$|{}_1(\xi-\xi)-{}_2(\xi-\xi)|\leqq(\alpha_{17}\mathfrak{V}_0+\alpha_{18}\mathfrak{V}_1+\alpha_{19}\mathfrak{V})\,d_{12}^\lambda$$

oder in abgekürzter Schreibweise, indem diesmal $x, y, z, t$ als unabhängige Veränderliche aufgefaßt werden,

$$(39)\qquad |\xi-\xi|_\lambda\leqq\alpha_{17}\mathfrak{V}_0+\alpha_{18}\mathfrak{V}_1+\alpha_{19}\mathfrak{V}\,.$$

Ebenso ist, bei passender Bestimmung der Größen $\alpha_{17}, \alpha_{18}, \alpha_{19}$, zugleich

$$(40)\qquad |\eta-\eta|_\lambda,\ |\zeta-\zeta|_\lambda\leqq\alpha_{17}\mathfrak{V}_0+\alpha_{18}\mathfrak{V}_1+\alpha_{19}\mathfrak{V}\,.$$

---

[20]) Nach (17) und (18) ist beispielsweise

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial a}{\partial \dot a}-1\right)-{}_2\left(\frac{\partial a}{\partial \dot a}-1\right)\right|=|\mathfrak{A}({}_1\dot a,{}_1\dot b,{}_1\dot c)-\mathfrak{A}({}_2\dot a,{}_2\dot b,{}_2\dot c)|\leqq\alpha'_{14}\mathfrak{V}_0\,\dot\delta_{12}^\lambda,$$

$$\left(\dot\delta_{12}^2=({}_1\dot a-{}_2\dot a)^2+({}_1\dot b-{}_2\dot b)^2+({}_1\dot c-{}_2\dot c)^2\right).$$

Doch ist gewiß $\frac{\dot\delta_{12}}{\delta_{12}}<\alpha''_{14}$ $\left(\delta_{12}^2=({}_1a-{}_2a)^2+({}_1b-{}_2b)^2+({}_1c-{}_2c)^2\right)$, darum kann in der vorstehenden Ungleichheit rechter Hand auch $\alpha'''_{14}\mathfrak{V}_0\,\delta_{12}^\lambda$ gesetzt werden.

Es sei nunmehr zur Vereinfachung

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{x} = x + \xi, && \boldsymbol{y} = y + \eta, && \boldsymbol{z} = z + \zeta, \\ &\xi = \xi(x, y, z, t), && \eta = \eta(x, y, z, t), && \zeta = \zeta(x, y, z, t) \end{aligned}$$

gesetzt. Aus (30) folgt

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{Max}\left\{\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_7 \mathfrak{O}(t) \leqq \alpha_7 \mathfrak{O}^*, \\ &\operatorname{Max}\left\{\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|_\lambda\right\} \leqq \alpha_8 \mathfrak{O}(t) \leqq \alpha_8 \mathfrak{O}^*. \end{aligned}$$

Es sei weiter $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$ eine beliebige in $T + S$ erklärte stetige der $H$-Bedingung genügende Funktion, und es sei

$$(43)\qquad \operatorname{Max}\{|\vartheta|, |\vartheta|_\lambda\} = M.$$

Setzt man

$$\Theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, t) = \vartheta(x, y, z, t),$$

so ist gewiß

$$(44)\qquad |\Theta|, |\Theta|_\lambda \leqq \alpha_{30} M.$$

Betrachten wir jetzt die Newtonschen Potentiale

$$(45)\qquad V(x, y, z) = \int_T \vartheta' \frac{1}{r} d\tau', \qquad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \int_T \Theta' \frac{1}{r} d\tau'.$$

Einem von mir vor einiger Zeit angegebenen potentialtheoretischen Hilfssatze gemäß gelten für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und alle den Ungleichheiten (42) genügenden Funktionen $\xi, \eta, \zeta$ Ungleichheiten von der Form

$$(46)\qquad \begin{aligned} &|\boldsymbol{V} - V|, \left|\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}\right|, \ldots; \left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|; \\ &\left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_\lambda \leqq \alpha_{31} M \mathfrak{O}. \text{ [21]} \end{aligned}$$

Es möge $\vartheta_* = \vartheta_*(x, y, z, t)$ eine weitere in $T + S$ erklärte, der $H$-Bedingung genügende Funktion bezeichnen, und es sei

$$(47)\qquad \operatorname{Max}\{|\vartheta_* - \vartheta|, |\vartheta_* - \vartheta|_\lambda\} = \Omega, \qquad \boldsymbol{V}_* = \int_T \vartheta_* \frac{1}{r} d\tau'.$$

---

[21]) Vgl. loc. cit. [5]), I. Dort liegen den Betrachtungen feste Bereiche $T + S$ und $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}$ zugrunde (sie heißen a. a. O. $\dot{T} + \dot{S}$ und $\hat{T} + \hat{S}$). Im vorliegenden Falle hängen $T + S$ und $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}$ von $t$ ab, doch bringt dieser Umstand keinerlei wesentliche Modifikation mit sich.

Den bekannten Sätzen der von O. Hölder, Liapounoff, Korn und anderen ausgebauten Theorie gemäß ist gewiß

$$|V_* - V|, \left|\frac{\partial}{\partial x}(V_* - V)\right|, \ldots; \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V_* - V)\right|, \ldots; \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V_* - V)\right|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{22}\Omega.$$ [22]

Aus (46) und (48) folgt

$$|V_* - V|, \left|\frac{\partial V_*}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 V_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 V_*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_\lambda \leqq \alpha_{21} M\mathcal{O} + \alpha_{22}\Omega.$$ [23]

Es sei schließlich $\dot{\xi} = \dot{\xi}(x, y, z, t)$, $\dot{\mathfrak{y}}$, $\dot{\mathfrak{z}}$ ein weiteres wie $\xi, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ beschaffenes System in $\{T + S; \langle t_0, t\rangle\}$ erklärter Funktionen, und es sei

$$\text{Max}\left\{\left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_7 \mathcal{O}(t) \leqq \alpha_7 \mathcal{O}^*,$$

$$\text{Max}\left\{\left|\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial z}\right|_\lambda\right\} \leqq \alpha_8 \mathcal{O}(t) \leqq \alpha_8 \mathcal{O}^*, \tag{50}$$

$$\text{Max}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi - \dot{\xi})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{z} - \dot{\mathfrak{z}})\right|_\lambda\right\} = D(t). \tag{51}$$

Wir setzen

$$\dot{x} = x + \dot{\xi}, \quad \dot{y} = y + \dot{\mathfrak{y}}, \quad \dot{z} = z + \dot{\mathfrak{z}} \tag{52}$$

und bezeichnen das durch Vermittelung von (52) entworfene Bild des Bereiches $T + S$ im Raume $\dot{x}$-$\dot{y}$-$\dot{z}$ mit $\dot{T} + \dot{S}$. Setzt man

$$\dot{\vartheta}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = \vartheta(x, y, z, t), \qquad \dot{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \int_{\dot{T}} \dot{\vartheta}' \frac{1}{\dot{r}'} d\dot{\tau}', \tag{53}$$

so findet man

$$|\dot{V} - V_*|, \left|\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V_*}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial^2 V_*}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial^2 V_*}{\partial x^2}\right|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{23} M D + \alpha'_{20}\Omega.$$

---

Wir kehren jetzt zu dem eigentlichen Gegenstand unserer Betrachtungen, den Ausdrücken $\mathbf{\Lambda} - \Lambda$, $\mathbf{M} - \mathsf{M}$, $\mathbf{N} - \mathsf{N}$ zurück.

Wie man sich fast unmittelbar überzeugt, wenn man die Beziehungen (35), (39) und (30) beachtet, gelten Ungleichheiten von der Form

$$|\mathbf{\Lambda}(x, y, z) - \Lambda(x, y, z)|, \ |\mathbf{M} - \mathsf{M}|, \ |\mathbf{N} - \mathsf{N}| \leqq \alpha_{24}\mathcal{O}(t) + \alpha_{25}\mathcal{O}_0 + \alpha_{26}\mathcal{O}_1,$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}\right| \leqq \alpha_{27}\mathcal{O}(t) + \alpha_{28}\mathcal{O}_0 + \alpha_{29}\mathcal{O}_1,$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}\right|_\lambda \leqq \alpha_{30}\mathcal{O}(t) + \alpha_{31}\mathcal{O}_0 + \alpha_{32}\mathcal{O}_1. \tag{55}$$ [23]

---

[22] Vgl. beispielsweise meinen Encyklopädieartikel II C 3. Dort findet sich auf S. 199–209 die Literatur angegeben.

[23] Wir fassen hier $x, y, z, t$ als unabhängige Veränderliche auf.

Hieraus folgen leicht die weiteren Ungleichheitsbeziehungen

$$(56)\qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{\Lambda}-\Lambda)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\mathbf{N}-\mathrm{N})\right| \leqq \alpha_{33}\mathfrak{O}(t)+\alpha_{34}\mathfrak{O}_0+\alpha_{35}\mathfrak{O}_1, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{\Lambda}-\Lambda)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\mathbf{N}-\mathrm{N})\right|_\lambda \leqq \alpha_{36}\mathfrak{O}(t)+\alpha_{37}\mathfrak{O}_0+\alpha_{38}\mathfrak{O}_1. \end{aligned}$$

In der Tat ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{\Lambda}-\Lambda) &= \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial \Lambda}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial x}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a}(x-x)+\ldots, \end{aligned}$$

und hieraus folgen mit Rücksicht auf (55), (28) und (29) fast unmittelbar die ersten Beziehungen in den beiden Zeilen von (56).

## § 3.

## Sukzessive Näherungen.

Wir wenden uns nunmehr unserem Hauptproblem zu und versuchen die Gleichungen (24′), (25) durch sukzessive Approximationen aufzulösen. Wir setzen als erste Annäherung die Werte

$$(57)\qquad \dot{x}_1 = x+\dot{a}-a, \qquad \dot{y}_1 = y+\dot{b}-b, \qquad \dot{z}_1 = z+\dot{c}-c,$$

als zweite Approximation

$$(58)\qquad \dot{x}_2 = \dot{a}+\int_{t_0}^{t}\dot{\Lambda}_1\,dt, \qquad \dot{y}_2 = \dot{b}+\int_{t_0}^{t}\dot{\mathrm{M}}_1\,dt, \qquad \dot{z}_2 = \dot{c}+\int_{t_0}^{t}\dot{\mathrm{N}}_1\,dt$$

mit

$$(59)\qquad \begin{aligned} \dot{\Lambda}_1 = \dot{\Lambda}_1(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1) = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{z}_1}\int_{\dot{T}_1}\frac{1}{\dot{r}_1}\dot{\eta}_1'\,d\dot{\tau}_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_1}\int_{\dot{T}_1}\frac{1}{\dot{r}_1}\dot{\zeta}_1'\,d\dot{\tau}_1' \\ &(\dot{r}_1^2 = (\dot{x}_1-\dot{x}_1')^2+(\dot{y}_1-\dot{y}_1')^2+(\dot{z}_1-\dot{z}_1')^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

unter $\dot{T}_1$ das durch (57) in dem Raume $\dot{x}_1$-$\dot{y}_1$-$\dot{z}_1$ entworfene Bild des Gebietes $T$ verstanden. Dabei haben $\dot{\xi}_1$, $\dot{\eta}_1$, $\dot{\zeta}_1$ folgende Bedeutung:

$$(60)\qquad \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0+\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0+\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0+\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0+\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\zeta}_1 &= \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0+\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0+\frac{\partial \dot{z}_1}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0. \end{aligned}$$

Die dritte Näherung bestimmt sich aus den Gleichungen

$$(61)\qquad \dot{x}_3 = \dot{a} + \int_{t_0}^{t} \dot{\Lambda}_2\, dt, \quad \dot{y}_3 = \dot{b} + \int_{t_0}^{t} \dot{M}_2\, dt, \quad \dot{z}_3 = \dot{c} + \int_{t_0}^{t} \dot{N}_2\, dt$$

mit

$$(62)\qquad \dot{\Lambda}_2 = \dot{\Lambda}_2(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\int_{\dot{T}_2} \frac{1}{\dot{r}_2}\,\dot{\eta}_2'\, d\dot{\tau}_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}_2}\int_{\dot{T}_2} \frac{1}{\dot{r}_2}\,\dot{\zeta}_2'\, d\dot{\tau}_2'$$

$$(\dot{r}_2^2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_2')^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_2')^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_2')^2),$$

unter $\dot{T}_2'$ das Bild von $T$ im Raume $\dot{x}_2$-$\dot{y}_2$-$\dot{z}_2$ verstanden. Dabei ist

$$(63)\qquad \begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{a}}\,\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{b}}\,\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{c}}\,\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\eta}_2 &= \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \dot{a}}\,\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \dot{b}}\,\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \dot{c}}\,\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\zeta}_2 &= \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \dot{a}}\,\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \dot{b}}\,\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial \dot{c}}\,\dot{\zeta}_0. \end{aligned}$$

So geht man weiter. Wie wir alsbald zeigen werden, *kann man, wenn man $\mathfrak{O}_0$ und $\mathfrak{O}_1$ hinreichend klein wählt, erreichen, daß alle Approximationen in der durch die Ungleichheiten* (28) *charakterisierten Umgebung der Ausgangslösung der hydrodynamischen Gleichungen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ liegen.*

In der Tat ist zunächst nach (57), (15), (16) und (28′) gewiß

$$(64)\qquad \begin{aligned} &|\dot{x}_1 - x|,\ |\dot{y}_1 - y|,\ |\dot{z}_1 - z|;\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_1 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_1 - z)\right|; \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_1 - x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_1 - z)\right|_\lambda \leqq \mathfrak{O}_0 \leqq \mathfrak{O}^*. \end{aligned}$$

Wir dürfen darum für $x, y, z$ gewiß $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ setzen, indem wir zugleich $\mathfrak{O}(t) = \mathfrak{O}_0$ annehmen[24]). Aus (55) und (56) folgt alsdann

$$\begin{aligned} &|\dot{\Lambda}_1 - \Lambda|,\ |\dot{M}_1 - M|,\ |\dot{N}_1 - N)| \leqq \alpha_{24}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{25}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{26}\mathfrak{O}_1, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_1 - \Lambda)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{N}_1 - N)\right| \leqq \alpha_{33}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{34}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{35}\mathfrak{O}_1, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_1 - \Lambda)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{N}_1 - N)\right|_\lambda \leqq \alpha_{36}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{37}\mathfrak{O}_0 + \alpha_{38}\mathfrak{O}_1, \end{aligned}$$

oder, indem wir zur Vereinfachung

$$\alpha_{39} = \mathrm{Max}\,(\alpha_{24}, \alpha_{25}, \alpha_{26}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{35}, \alpha_{36}, \alpha_{37}, \alpha_{38})$$

setzen,

$$(65)\qquad |\dot{\Lambda}_1 - \Lambda|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_1 - \Lambda)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{N}_1 - N)\right|_\lambda \leqq \alpha_{39}(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1).$$

---

[24]) Man vergleiche die Formel (28).

Aus (58), (14′), (15), (16) folgt

$$|\dot{x}_2 - x|, |\dot{y}_2 - y|, |\dot{z}_2 - z|; \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - z)\right|;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - z)\right|_\lambda \leqq \mathfrak{O}_0 + \alpha_{39}\int_{t_0}^{t}(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\,dt_1. \tag{66}$$

Betrachten wir nunmehr die Integralgleichung

$$U(t) = \mathfrak{O}_0 + \alpha_{39}\int_{t_0}^{t}(U(t_1) + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\,dt_1. \tag{67}$$

Sie ist offenbar der Differentialgleichung

$$\frac{dU}{dt} = \alpha_{39}(U + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)$$

nebst Anfangsbedingung

$$U(t_0) = \mathfrak{O}_0$$

gleichwertig und hat zur Lösung

$$U(t) = (2\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\,e^{\alpha_{39}(t-t_0)} - (\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1). \tag{68}$$

Augenscheinlich kann man $\mathfrak{O}_0$ und $\mathfrak{O}_1$ so klein wählen, daß

$$U(t) \leqq \mathfrak{O}^*$$

wird. Offenbar wird dann für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$

$$U(t) \leqq \mathfrak{O}^* \tag{69}$$

ausfallen. Ferner gilt für $t \geqq t > t_0$

$$U(t) > \mathfrak{O}_0. \tag{70}$$

Aus (66), (70), (67) und (69) folgt

$$\mathrm{Max}\left\{|\dot{x}_2 - x|, \ldots; \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - z)\right|;\right.$$

$$\left.\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - z)\right|_\lambda\right\} < U(t) \leqq \mathfrak{O}^*. \tag{71}$$

Demnach dürfen wir für $x, y, z$ auch $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ setzen, indem wir dabei $\mathfrak{O}(t)$ gleich $U(t)$ annehmen [25]).

Wir erhalten jetzt

$$|\dot{\Lambda}_2 - \Lambda|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_2 - \Lambda)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{\mathsf{N}}_2 - \mathsf{N}_2)\right|_\lambda \leqq \alpha_{39}(U(t) + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1),$$

mithin

$$\mathrm{Max}\left\{|\dot{x}_3 - x|, |\dot{y}_3 - y|, |\dot{z}_3 - z|; \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_3 - x)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_3 - z)\right|;\right.$$

$$\left.\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_3 - x)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_3 - z)\right|_\lambda\right\} \leqq \mathfrak{O}_0 + \alpha_{39}\int_{t_0}^{t}(U(t_1) + \mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\,dt_1 = U(t \tag{72}$$

[25]) Tatsächlich ist diesmal $\mathfrak{O}(t)$ sogar kleiner als $U(t)$, so daß die unmittelbar folgenden Formeln a fortiori gelten.

Augenscheinlich gelten, wie behauptet, ganz analoge Beziehungen für alle Näherungen. Diese liegen also sämtlich in der durch die Ungleichheiten (28) charakterisierten Umgebung der Ausgangslösung der Bewegungsgleichungen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$.

Nun der Konvergenzbeweis. Wir gehen von den Gleichungen

$$\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n = \int_{t_0}^{t} (\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1})\, dt, \quad \dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n = \int_{t_0}^{t} (\dot{\mathsf{M}}_n - \dot{\mathsf{M}}_{n-1})\, dt, \tag{73}$$

$$\dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n = \int_{t_0}^{t} (\dot{\mathsf{N}}_n - \dot{\mathsf{N}}_{n-1})\, dt \qquad (n \geqq 1).$$

mit

$$\dot{\Lambda}_n = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_n} \int_{\dot{T}_n} \frac{1}{\dot{r}_n} \dot{\eta}'_n\, d\dot{\tau}'_n + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_n} \int_{\dot{T}_n} \frac{1}{\dot{r}_n} \dot{\zeta}'_n\, d\dot{\tau}'_n,$$

$$\dot{\Lambda}_{n-1} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_{n-1}} \int_{\dot{T}_{n-1}} \frac{1}{\dot{r}_{n-1}} \dot{\eta}'_{n-1}\, d\dot{\tau}'_{n-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_{n-1}} \int_{\dot{T}_{n-1}} \frac{1}{\dot{r}_{n-1}} \dot{\zeta}'_{n-1}\, d\dot{\tau}'_{n-1}, \tag{74}$$

. . . . . .

aus, indem wir

$$\dot{\Lambda}_0 = \Lambda, \quad \dot{\mathsf{M}}_0 = \mathsf{M}, \quad \dot{\mathsf{N}}_0 = \mathsf{N}$$

annehmen. Dabei ist

$$\dot{\zeta}_n = \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \dot{a}} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \dot{b}} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{z}_n}{\partial \dot{c}} \dot{\zeta}_0, \qquad \dot{\eta}_n = \frac{\partial \dot{y}_n}{\partial \dot{a}} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{y}_n}{\partial \dot{b}} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{y}_n}{\partial \dot{c}} \dot{\zeta}_0, \ldots,$$

$$\dot{\zeta}_{n-1} = \frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial \dot{a}} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial \dot{b}} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{z}_{n-1}}{\partial \dot{c}} \dot{\zeta}_0, \qquad \dot{\eta}_{n-1} = \frac{\partial \dot{y}_{n-1}}{\partial \dot{a}} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{y}_{n-1}}{\partial \dot{b}} \dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{y}_{n-1}}{\partial \dot{c}} \dot{\zeta}_0, \ldots.$$

Es möge nun für einen bestimmten Wert von $n > 1$

$$|\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}|, \quad |\dot{y}_n - \dot{y}_{n-1}|, \quad |\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}|; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|_\lambda \leqq q_n(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq \mathrm{t})$$

sein. Wegen (15) und (16) ist, da doch $\mathfrak{T}_0$ unterhalb einer festen Schranke $\mathfrak{T}^*$ liegt, gewiß

$$-\dot{x}_{n-1})\Big|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{a}}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\right|_\lambda, \ldots,, \left|\frac{\partial}{\partial \dot{c}}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|_\lambda \leqq \alpha_4, q_n(t),$$

darum auch

$$77)\ |\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_{n-1}|, |\dot{\eta}_n - \dot{\eta}_{n-1}|, \ldots; |\dot{\zeta}_n - \dot{\zeta}_{n-1}|_\lambda, |\dot{\eta}_n - \dot{\eta}_{n-1}|_\lambda, \ldots \leqq \alpha_{41} q_n(t).$$

Ferner ist natürlich

$$-\dot{x}_{n-1})\Big|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|; \left|\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})\right|_\lambda \leqq \alpha_{42} q_n(t).$$

Dem auf S. 621 angegebenen Hilfssatze (54) gemäß finden wir

$$(78)\qquad \begin{aligned} &|\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1}|;\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1})\right|: \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1})\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{\Lambda}_n - \dot{\Lambda}_{n-1})\right|_\lambda \leqq \alpha_{43}\, q_n(t), \end{aligned}$$

folglich

$$(79)\qquad \begin{aligned} &|\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n|;\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n)\right|; \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n)\right|_\lambda \leqq \alpha_{43} \int_{t_0}^{t} q_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

Analoge Ungleichheiten mit dem gleichen Ausdruck rechter Hand erhalten wir für $|\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n|, \ldots; |\dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n|, \ldots$ . Es sei nun etwa

$$|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|, |\dot{y}_2 - \dot{y}_1|, |\dot{z}_2 - \dot{z}_1|;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\right|; \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\right|_\lambda \leqq q.$$

Aus (76), (79) folgt sukzessive

$$(80)\qquad \begin{aligned} &|\dot{x}_3 - \dot{x}_2|, \quad \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_3 - \dot{z}_2)\right|_\lambda \leqq \alpha_{43}\, q\,(t - t_0), \\ &|\dot{x}_4 - \dot{x}_3|, \quad \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_4 - \dot{z}_3)\right|_\lambda \leqq \alpha_{43}^2\, q\, \frac{(t-t_0)^2}{2!}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|\dot{x}_{l+1} - \dot{x}_l|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\dot{z}_{l+1} - \dot{z}_l)\right|_\lambda \leqq \alpha_{43}^{l-1}\, q\, \frac{(t-t_0)^{l-1}}{(l-1)!} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die unendlichen Reihen

$$\dot{x}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{x}_l - \dot{x}_{l-1}), \quad \dot{y}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{y}_l - \dot{y}_{l-1}), \quad \dot{z}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{z}_l - \dot{z}_{l-1}),$$

sowie die durch gliedweise Differentiation in bezug auf $a, b, c$ gewonnenen Reihen konvergieren für alle $(a, b, c)$ in $T_0 + S_0$ und alle $t$ in $\langle t, t$ gleichmäßig.

Es sei

$$(81)\qquad \dot{x} = \dot{x}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{x}_l - \dot{x}_{l-1}), \quad \dot{y} = \dot{y}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{y}_l - \dot{y}_{l-1}), \quad \dot{z} = \dot{z}_1 + \sum_{l}^{2\ldots\infty}(\dot{z}_l -$$

Augenscheinlich haben $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ stetige, der $H$-Bedingung genügende partielle Ableitungen in bezug auf $a, b, c$[36]), darum auch in bezug auf $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$

[36]) Dies, weil auch die Reihen

$$\left|\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial a}\right|_\lambda + \sum_{l}^{2\ldots\infty}\left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_l - \dot{x}_{l-1})\right|_\lambda, \ldots$$

konvergieren.

Wir setzen

$$(82) \qquad \dot{x} = \dot{x}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t), \quad \dot{y} = \dot{y}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t), \quad \dot{z} = \dot{z}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t).$$

Geht man in (58) bis (63) und den analogen Gleichungen für $\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ zur Grenze $n \to \infty$ über, so überzeugt man sich, daß die Funktionen (82) die Gleichungen (24) und (25) erfüllen. Also existieren jedenfalls die Ableitungen $\dot{u} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, $\dot{v} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, $\dot{w} = \frac{d\dot{z}}{dt}$, verhalten sich in $\{T_0 + S_0; \langle t_0, t\rangle\}$ stetig und erfüllen die Gleichungen

$$(83) \qquad \begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\eta}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\zeta}'\,d\dot{\tau}', \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\zeta}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\xi}'\,d\dot{\tau}', \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\xi}'\,d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\int_{\dot{T}} \frac{1}{\dot{r}}\dot{\eta}'\,d\dot{\tau}', \end{aligned}$$

$$(83') \qquad \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0, \\ \dot{\zeta} &= \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{a}}\dot{\xi}_0 + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{b}}\dot{\eta}_0 + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{c}}\dot{\zeta}_0. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen und durch die weiteren Beziehungen

$$\dot{x} = \dot{a} + \int_{t_0}^{t} \dot{u}\,dt, \quad \dot{y} = \dot{b} + \int_{t_0}^{t} \dot{v}\,dt, \quad \dot{z} = \dot{c} + \int_{t_0}^{t} \dot{w}\,dt$$

ist die neue Bewegung in dem Gesamtraume der Lagrangeschen Variablen $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}$ definiert.

Aus (83) folgt nach bekannten Sätzen (vgl. die an die Formel (48) sich knüpfenden Bemerkungen, insbesondere die Fußnote [23]), daß $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ in $\{\dot{T} + \dot{S}; \langle t_0, t\rangle\}$ stetige, der $H$-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{x}}, \ldots, \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{z}}$ haben. Daß auch die Beschleunigungskomponenten $\frac{d\dot{u}}{dt}, \frac{d\dot{v}}{dt}, \frac{d\dot{w}}{dt}$ existieren und sich stetig verhalten, daß $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ die Wirbelkomponenten von $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ sind und die Funktionen (82) die hydrodynamischen Gleichungen erfüllen, läßt sich, von den Gleichungen (83) ausgehend, ganz wie in der zweiten Abhandlung (vgl. die Fußnote [12]) zeigen. Damit sind unsere Behauptungen endgültig bewiesen.

## § 4.

## Eine Verallgemeinerung.

Die Ergebnisse der §§ 1—3 lassen sich, wie wir jetzt zeigen wollen, erheblich verallgemeinern, indem über den Anfangszustand der gegebenen Bewegung und damit auch über ihren ganzen Verlauf weitergehende Annahmen gemacht werden.

Wie in § 1 handelt es sich um eine den Gesamtraum der Variablen $x, y, z$ erfüllende Masse einer homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit. Zur Zeit $t_0$ (demnach im Raume $a$-$b$-$c$) sei eine Anzahl geschlossener Flächen der Klasse $Ah$ $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$, die einander weder schneiden noch berühren, und deren Gesamtheit mit $S_0$ bezeichnet werden soll, gegeben. Durch $S_0$ wird der Raum $a$-$b$-$c$ in $n+1$ Teilgebiete $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0,n+1}$, von denen eins den unendlich fernen Punkt enthält, zerlegt. Der Gesamtrand von $T_{0i}$ heiße $S^{0i}$. Die überall stetigen Funktionen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ haben in jedem vierdimensionalen Bereiche $\{T_{0i} + S^{0i}; \langle t_0, t\rangle\}$ stetige, der $H$-Bedingung genügende partielle Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}; \frac{\partial y}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}$ und überall stetige Ableitungen (Geschwindigkeitskomponenten) $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$. Des weiteren sind die Funktionen $\frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \frac{\partial u}{\partial c}; \frac{\partial v}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial c}$ in jedem Bereiche $\{T_{0i} + S^{0i}; \langle t_0, t\rangle\}$ stetig und erfüllen daselbst eine $H$-Bedingung. Durch Vermittlung der Funktionen (1) werden den Flächen $S_0$ im Raume $x$-$y$-$z$ gewisse Flächen $S$ der Klasse $Ah$ zugeordnet. Durch $S$ wird der Raum $x$-$y$-$z$ in $n+1$ Gebiete $T_1, \ldots, T_{n+1}$ zerlegt. Die Gesamtbegrenzung von $T_i$ heiße $S^i$. Wie man sich leicht überzeugt, haben $u, v, w$, als Funktionen von $x, y, z$ und $t$ aufgefaßt, in jedem vierdimensionalen Bereiche $\{T_i + S^i; \langle t_0, t\rangle\}$ stetige, der $H$-Bedingung genügende Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}; \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$. Natürlich ist $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Nun aber das Verhalten im Unendlichen. Wir nehmen an, daß $u, v, w$ sich wie $R_0^{-1}$ verhalten,

$$u = O(R_0^{-1}), \quad v = O(R_0^{-1}), \quad w = O(R_0^{-1}). \tag{84}$$

Aus (84) folgen unmittelbar die weiteren Beziehungen

$$x - a = O(R_0^{-1}), \quad y - b = O(R_0^{-1}), \quad z - c = O(R_0^{-1}). \tag{85}$$

Wir setzen ferner voraus, daß $\frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \frac{\partial u}{\partial c}; \frac{\partial v}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial c}$, darum auch $\frac{\partial}{\partial a}(x-a), \frac{\partial x}{\partial b}, \ldots, \frac{\partial}{\partial c}(z-c)$ sich im Unendlichen wie $R_0^{-2}$ verhalten, in Formeln

$$|u|,\ |v|,\ |w| \leqq \beta_1 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial a}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial b}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial c}\right|; \left|\frac{\partial v}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w}{\partial c}\right| \leqq \beta_2 (1+R_0)^{-2},$$

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right) - {}_2\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right) - {}_2\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)\right| \leqq \beta_3 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, \delta_{12}^{\lambda},$$

$$|x-a|,\ |y-b|,\ |z-c| \leqq \beta_4 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial a} - 1\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial z}{\partial c} - 1\right| \leqq \beta_5 (1+R_0)^{-2},$$

$$\left|{}_1\left(\frac{x}{\partial a}\right) - {}_2\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right) - {}_2\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)\right| \leqq \beta_6 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, \delta_{12}^{\lambda}, \quad [27]$$

$$R_{01}^2 = {}_1a^2 + {}_1b^2 + {}_1c^2, \quad R_{02}^2 = {}_2a^2 + {}_2b^2 + {}_2c^2.$$

$$\delta_{12}^2 = ({}_1a - {}_2a)^2 + ({}_1b - {}_2b)^2 + ({}_1c - {}_2c)^2.$$

Aus (86) und (87) folgt weiter

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|; \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| \leqq \beta_7 (1+R)^{-2}, \tag{88}$$

darum auch

$$|\xi|,\ |\eta|,\ |\zeta| \leqq \beta_7 (1+R)^{-2}. \tag{89}$$

Die Komponenten des Wirbelvektors werden im allgemeinen auf $S$ Sprünge erleiden, doch ändert sich seine Normalkomponente beim Durchgang durch $S$ stetig. Es gelten weiter die Ungleichheitsbeziehungen

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - {}_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) - {}_2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right| \leqq \beta_8 \{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda},$$

$$d_{12}^2 = ({}_1x - {}_2x)^2 + ({}_1y - {}_2y)^2 + ({}_1z - {}_2z)^2,$$

mithin auch

$$|{}_1\xi - {}_2\xi|, \ldots, |{}_1\zeta - {}_2\zeta| \leqq \beta_8 \{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \tag{91}$$

Die Funktionen $\mathfrak{A}(a,b,c)$, $\mathfrak{B}(a,b,c)$, $\mathfrak{C}(a,b,c)$, die den Zusammenhang der beiden Räume $a$-$b$-$c$ und $\dot{a}$-$\dot{b}$-$\dot{c}$ herstellen, sind diesmal in dem Gesamtraume erklärt. Für (16) tritt jetzt die Beziehung

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\Big\{(1+R_0)\,|\dot{\mathfrak{A}}|, \ldots; (1+R_0)^2 \left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right), \ldots; \\ &\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}^{-1} \left|{}_1\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right) - {}_2\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right)\right| \delta_{12}^{-\lambda}, \ldots\Big\} = \mathfrak{O}_0 \end{aligned} \tag{92}$$

[27]) Die Ungleichheiten in der dritten Zeile der Formeln (87) sind gewiß erfüllt, wenn $u$, $v$, $w$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung, die sich im Unendlichen wie $R^{-3}$ verhalten, haben. Vgl. loc. cit. [5]) III, S. 213–215.

ein. Offenbar ist demnach

$$|\dot{\mathfrak{A}}|, |\dot{\mathfrak{B}}|, |\dot{\mathfrak{C}}| \leqq \mathcal{O}_0 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial b}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right| \leqq \mathcal{O}_0 (1+R_0)^{-2}, \tag{93}$$

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right) - {}_2\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{A}}}{\partial a}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right) - {}_2\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{C}}}{\partial c}\right)\right| \leqq \mathcal{O}_0 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-}$$

Der neue Anfangszustand wird den Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$|u_0 - \dot{u}_0|, |v - \dot{v}_0|, |w_0 - \dot{w}_0| \leqq \mathcal{O}_1 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial a} - \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial \dot{a}}\right|, \left|\frac{\partial u_0}{\partial b} - \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial \dot{b}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_0}{\partial c} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{c}}\right| \leqq \mathcal{O}_1 (1+R_0)^{-2}, \tag{94}$$

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial a} - \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial \dot{a}}\right) - {}_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial a} - \frac{\partial \dot{u}_0}{\partial \dot{a}}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial c} - \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \dot{c}}\right) - {}_2\left(\frac{\partial w_0}{\partial c} - \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \dot{c}}\right)\right|$$
$$\leqq \mathcal{O}_1 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\} \delta_1^{\tilde{}}$$

gemäß festgelegt. Aus (94) folgt weiter fast unmittelbar

$$|\xi_0 - \dot{\xi}_0|, |\eta_0 - \dot{\eta}_0|, |\zeta_0 - \dot{\zeta}_0| \leqq \mathcal{O}_1 (1+R_0)^{-2},$$
$$|{}_1(\xi_0 - \dot{\xi}_0) - {}_2(\xi_0 - \dot{\xi}_0)|, \ldots \leqq \mathcal{O}_1 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\} \delta_{12}^{\lambda} \tag{95}$$

Für die Gleichungen (14) und (24) treten jetzt die analogen Formeln

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \eta' \, d\tau' + \frac{1}{2\pi} \int_{\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \zeta' \, d\tau' \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{96}$$
$$\dot{x} = \dot{a} + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty} \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) \dot{\eta}' \, d\dot{\tau}' + \frac{1}{2\pi} \int_{\infty} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{\dot{r}}\right) \dot{\zeta}' \, d\dot{\tau}' \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ein. Und wieder werden zur Bestimmung der Lösungen $\dot{x}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t)$ $\dot{y}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t)$, $\dot{z}(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, t)$ sukzessive Näherungen angewandt. Für (28 schreiben wir jetzt

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(t) = \operatorname{Max}\left\{(1+R)|x-x|, \ldots, (1+R)|z-z|;\right.$$

$$(1+R)^2 \left|\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right|, \ldots, (1+R)^2 \left|\frac{\partial}{\partial c}(z-z)\right|; \tag{97}$$

$$\left.((1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda})^{-1} \left|{}_1\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right) - {}_2\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right)\right| \delta_{12}^{-\lambda}, \ldots\right\}$$

Demnach ist

$$|x-x|, \ldots \leqq \mathcal{O}(t)(1+R)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right|, \ldots \leqq \mathcal{O}(t)(1+R)^{-2}, \tag{98}$$

$$\left|{}_1\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right) - {}_2\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-x)\right)\right|, \ldots \leqq \mathcal{O}(t)\{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-}$$

Da für $t = t_0$ (vgl. S. 614) $x = a,\ y = b,\ z = c$ gilt, so ist wieder $\mathfrak{V}_0 \leqq \mathfrak{V}^*$. Durch Überlegungen, die den auf S. 618—622 durchgeführten ganz und gar analog verlaufen, gewinnen wir die Ungleichheiten (vgl. (35), (38), (55) und (56))[28])

$$|\xi - \xi|,\ |\eta - \eta|,\ |\zeta - \zeta| \leqq (\beta_9 \mathfrak{V}_0 + \beta_{10} \mathfrak{V}_1 + \beta_{11} \mathfrak{V})(1+R)^{-2},$$

$$|_1(\xi - \xi) - {}_2(\xi - \xi)|, \ldots \leqq (\beta_{12} \mathfrak{V}_0 + \beta_{13} \mathfrak{V}_1 + \beta_{14} \mathfrak{V})\{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda}\}$$

$$|\mathbf{\Lambda}(x,y,z) - \Lambda(x,y,z)|, \ldots \leqq (\beta_{15} \mathfrak{V}_0 + \beta_{16} \mathfrak{V}_1 + \beta_{17} \mathfrak{V})(1+R)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{\Lambda} - \Lambda)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(\mathbf{N} - \mathrm{N})\right| \leqq (\beta_{18} \mathfrak{V}_0 + \beta_{19} \mathfrak{V}_1 + \beta_{20} \mathfrak{V})(1+R)^{-2},$$

$$\left|(\mathbf{\Lambda} - \Lambda)\right) - {}_2\left(\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{\Lambda} - \Lambda)\right)\Big|, \ldots \leqq (\beta_{21} \mathfrak{V}_0 + \beta_{22} \mathfrak{V}_1 + \beta_{23} \mathfrak{V})\{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda}\}$$

Der Konvergenzbeweis der sukzessiven Näherungen verläuft wie auf S. 622 bis 627, nur sind beispielsweise die Ungleichheiten (66) zu ersetzen durch

$$|\dot{x}_2 - x|(1+R)^{-1}, \ldots; \left|\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right|(1+R)^{-2}, \ldots;$$

$$(101)\quad \left|{}_1\left(\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right) - {}_2\left(\frac{\partial}{\partial a}(\dot{x}_2 - x)\right)\right|\{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+R_2)^{-2-\lambda}\}^{-1}\delta_{12}^{-\lambda}, \ldots$$

$$\leqq \mathfrak{V}_0 + \beta_{24}\int_{t_0}^{t}(\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1)\,dt_1.$$

Damit ist der auf S. 615 angegebene, sinngemäß modifizierte Stetigkeitssatz bewiesen.

Ein ganz analoger Stetigkeitssatz gilt, wenn es sich um eine in einem geschlossenen ruhenden oder in bekannter Weise ohne Volumänderung bewegten Gefäß, das sich dabei auch deformieren kann, befindliche homogene, inkompressible Flüssigkeit handelt. Ganz ähnliche Resultate erhält man, wenn die Einheitskräfte kein Potential haben oder die nach wie vor unzusammendrückbare Flüssigkeit nichthomogen ist[29]). Daß sich die Ergebnisse auch auf zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen in naheliegender Weise übertragen lassen, liegt auf der Hand. Das Verhalten im Unendlichen ist dabei freilich ein wenig anders[30]).

Wir werden auf die ebenen Bewegungen in einem anderen Zusammenhang anläßlich einer Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie alsbald wieder zurückkommen. Zunächst mögen einige Anwendungen unserer bisherigen Ergebnisse betrachtet werden.

---

[28]) Man vergleiche hierzu die loc. cit. [5]) III bewiesenen potentialtheoretischen Hilfssätze.

[29]) Die in Betracht kommenden Existenzsätze finden sich in der zweiten Abhandlung dieser Reihe bewiesen.

[30]) Man vergleiche L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 441—443, wo sich der zugehörige Existenzsatz findet.

Es steht nichts im Wege, als Ausgangszustand, in dessen Nachbarschaft neue Bewegungen der Flüssigkeit bestimmt werden sollen, den Ruhezustand anzunehmen, demnach

$$(102) \qquad x(a,b,c,t) \equiv a, \quad y(a,b,c,t) \equiv b, \quad z(a,b,c,t) \equiv c$$

zu setzen. Das Zeitintervall $\langle t_0, t\rangle$ kann hierbei einen beliebigen Wert haben. Augenscheinlich darf weiter ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\dot{a} \equiv a$, $\dot{b} \equiv b$, $\dot{c} \equiv c$, demnach $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \equiv 0$ gesetzt werden. Aus (102) folgt $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. Der Einfachheit halber schreiben wir jetzt für $\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0$ kürzer $u_0, v_0, w_0$ und erhalten an Stelle der den neuen Anfangszustand betreffenden Ungleichheiten (94) Beziehungen von der Form

$$(103) \qquad \begin{aligned} &|u_0|, |v_0|, |w_0| \leqq \mathcal{O}_1 (1+R_0)^{-1}, \\ &\left|\frac{\partial u_0}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_0}{\partial c}\right| \leqq \mathcal{O}_1 (1+R_0)^{-2}, \\ &\left|{}_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial a}\right) - {}_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial a}\right)\right|, \ldots, \left|{}_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial c}\right) - {}_2\left(\frac{\partial w_0}{\partial c}\right)\right| \leqq \mathcal{O}_1 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}. \end{aligned}$$

Die auf S. 628 auseinandergesetzten Voraussetzungen bezüglich der Unstetigkeitsflächen $S_0$ gelten natürlich ohne jede Änderung. *Ist nun $\mathcal{O}_1$ hinreichend klein, so gibt es* den Ergebnissen der §§ 1 bis 4 gemäß *in dem ganzen Zeitintervalle $\langle t_0, t\rangle$ eine und nur eine Flüssigkeitsbewegung, die den vorgeschriebenen Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen genügt und insbesondere im Unendlichen das verlangte Verhalten hat.* Es handelt sich diesmal, da $\mathcal{O}_1$ als klein vorausgesetzt wird, um eine *langsame* (freilich nicht unendlich langsame) Bewegung. In den in der ersten und der zweiten Abhandlung dieser Serie angegebenen und bewiesenen Existenzsätzen war demgegenüber der Anfangszustand, wenn von den bekannten Forderungen der Stetigkeit und gegebenenfalls des Verhaltens im Unendlichen abgesehen wird, beliebig. Die Existenz der fraglichen Bewegung stand daher aber auch nur innerhalb eines hinreichend kurzen Zeitintervalls fest.

In der ersten der beiden soeben genannten Abhandlungen sowie in meinem kürzlich erschienenen Buch über Hydromechanik ist im Anschluß an die Untersuchungen von Helmholtz sowie an die bekannten Arbeiten des Herrn von Kármán die Existenz einer Reihe spezieller permanenter Bewegungen bewiesen worden. So kann sich in einer allseits unbegrenzten Masse einer inkompressiblen homogenen Flüssigkeit bei geeigneter Formgebung des Querschnittes ein isolierter Wirbelring mit angenähert kreisförmigem Querschnitt und streng kreisförmiger Leitlinie mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene seiner Leitlinie ohne Formänderung fortbewegen. (Vgl. loc. cit. [1]) I, S. 138—154.) So kann es in einer den Gesamtraum erfüllenden Flüssigkeitsmasse, die auch diesmal als homogen und unzusammendrückbar vorausgesetzt wird, Paare von Wirbelzylindern

mit angenähert kreisförmigem Querschnitt geben, die das gesamte Geschwindigkeitsfeld bestimmen und selber in einer gleichförmigen Rotation ohne Formänderung um ihre gemeinsame Schwerachse begriffen sind (vgl. a. a. O., S. 127—135.) Ich nenne als weitere permanente Bewegungen dieser Art die von Kármánschen Wirbelstraßen, gewisse Wirbelkonfigurationen in ganz oder teilweise geschlossenen Gefäßen (vgl. a. a. O., S. 135—138), sowie einige theoretisch möglichen Wirbelbewegungen, die einer in einer allseitig unbegrenzten Flüssigkeitsmasse ohne Widerstand fortbewegten Kugel entsprechen (vgl. loc. cit.[11]), S. 481).

In der Nachbarschaft aller dieser permanenten Bewegungen gibt es Flüssigkeitsbewegungen, die sich innerhalb eines endlichen, nicht notwendig hinreichend kleinen Zeitintervalls $\langle t_0, t \rangle$ verfolgen lassen.

## Zweites Kapitel.

## Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden.

Wichtiger als diese naheliegenden Ergebnisse ist die Anwendung unserer Methoden auf eine Begründung der bekannten Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie der ebenen Bewegung einer homogenen Flüssigkeitsmasse, in der sich eine Anzahl paralleler unbegrenzter Wirbellinien von allemal endlicher Wirbelstärke befinden. Nach Kirchhoff bestimmt sich die Bewegung eines bestimmten dieser Wirbelfäden durch die Gesamtheit der übrigen Fäden, indem von einer Einwirkung einer Wirbellinie auf sich selbst „aus Gründen der Symmetrie" abgesehen wird. Man gelangt so zur Bestimmung der Lage der Fäden in einer beliebigen Zeit zu einem System Hamiltonscher (kanonischer) Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen nimmt hierbei bei der Annäherung an die Wirbelfäden unendlich hohe Werte an, die betrachtete Konfiguration ist darum natürlich physikalisch nicht realisierbar. Wie in dem Folgenden gezeigt werden wird, gibt es dennoch, wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, Flüssigkeitsbewegungen, die sich von den Helmholtz-Kirchhoffschen in einem alsbald näher zu präzisierenden Sinne innerhalb eines, nicht notwendig kurzen Zeitintervalls $\langle t_0, t \rangle$ nur wenig unterscheiden. Die Helmholtz-Kirchhoffschen Bewegungen erscheinen so, wie zu erwarten war, als erste Näherungen gewisser physikalisch realisierbaren Bewegungen.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung eines Systems von nur zwei Wirbelzylindern. Der Übergang zu komplizierteren Systemen bietet, wie man leicht sehen wird, nicht die geringsten Schwierigkeiten dar. Wir nehmen an, daß es sich um Wirbelzylinder von nahezu kreisförmigem Querschnitt handelt, und bezeichnen die beiden

Kreise in der Ebene $a$-$b$, in deren Nachbarschaft die wahren Randkurven der beiden Zylinderbasen zur Zeit $t_0$ gelegen sind, mit $S_0^{(1)}$ und $S_0^{(2)}$, zusammengenommen kürzer mit $S_0$. Die beiden von $S_0^{(1)}$ und $S_0^{(2)}$ begrenzten Kreisscheiben $T_0^{(1)}$ und $T_0^{(2)}$ heißen zusammengenommen $T_0$, der Abstand ihrer Mittelpunkte heiße $\varrho_0$. Der größere der beiden Kreisdurchmesser $d_1$ und $d_2$ sei mit $d_0$ bezeichnet. Wir nehmen im folgenden an, daß $\frac{d_0}{\varrho_0}$ hinreichend klein ist. Schließlich seien $I^{(1)} \gtrless 0$ und $I^{(2)} \gtrless 0$ die der Übersichtlichkeit halber als konstant vorauszusetzenden Intensitäten der beiden Wirbelkörper.

Es möge nun vorübergehend die Gesamtintensität der beiden Wirbelkörper $J^{(1)} = \pi \frac{d_1^2}{4} I^{(1)}$ und $J^{(2)} = \pi \frac{d_2^2}{4} I^{(2)}$ in ihren Mittellinien konzentriert gedacht werden. Der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gemäß werden die bewegten Mittellinien, als lineare Wirbel endlicher Intensität gedacht, ganz bestimmte Bahnen

$$(1) \qquad \xi_1 = \xi_1(t), \quad \eta_1 = \eta_1(t) \quad \text{bzw.} \quad \xi_2 = \xi_2(t), \quad \eta_2 = \eta_2(t)$$

beschreiben[31]). Es gilt augenscheinlich

$$(2) \qquad \begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_1(0) + \frac{J^{(2)}}{\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \log\left(\frac{1}{\varrho}\right) dt, \qquad \eta_1(t) = \eta_1(0) - \frac{J^{(2)}}{\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \log\left(\frac{1}{\varrho}\right) dt \\ \xi_2(t) &= \xi_2(0) + \frac{J^{(1)}}{\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \log\left(\frac{1}{\varrho}\right) dt, \qquad \eta_2(t) = \eta_2(0) - \frac{J^{(1)}}{\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \log\left(\frac{1}{\varrho}\right) dt \end{aligned}$$

$$(\varrho^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2).$$

Den weiteren Überlegungen wird ein Zeitintervall zugrunde gelegt, innerhalb dessen der Quotient $\frac{d_0}{\varrho(t)}$ immer noch hinreichend klein bleibt. Dieses Zeitintervall selbst braucht darum keinesfalls klein zu sein.

Betrachten wir den Wirbelzylinder konstanter Intensität $I^{(1)}$, dessen Schnitt mit der Ebene $x$-$y$ sich mit $T_0^{(1)} + S_0^{(1)}$ deckt. Die einzelnen $T_0^{(1)} + S_0^{(1)}$ füllenden Teilchen würden, falls, wie wir vorübergehend annehmen wollen, das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit $t_0$ sonst überall wirbellos ist, dauernd um den Mittelpunkt $(\xi_1(0), \eta_1(0))$ von $T_0^{(1)} + S_0^{(1)}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $I^{(1)}$ rotieren. Wir fügen nun zu dieser Bewegung als eine zweite Komponente diejenige fortschreitende Bewegung

---

[31]) Wenn wir im folgenden von der Bewegung, den Bahnen u. dgl. einzelner Wirbellinien oder Wirbelzylinder sprechen, so haben wir dabei stets die Konfiguration in der $x$-$y$-Ebene im Sinne.

des betrachteten Zylinderkörpers hinzu, bei der der Mittelpunkt von $T_0^{(1)}$ die Bahn (1) beschreibt und legen die so gewonnene Gesamtbewegung sowie die analoge Bewegung des zweiten Wirbelzylinders als erste Näherung unseren weiteren Überlegungen zugrunde. Werden die Komponenten der Geschwindigkeit des Teilchens $(a, b)$ in $T_0 + S_0$ zur Zeit $t$ mit $u_1, v_1$, seine Koordinaten mit $(x_1, y_1)$ bezeichnet, so gilt für alle $(a, b)$ in $T_0^{(1)} + S_0^{(1)}$, wie man leicht sieht,

$$(3)\quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{J^{(2)}}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(\log\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{I^{(1)}}{\pi}\int\limits_{T_1^{(1)}} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1', \qquad (d\sigma_1' = dx_1'\,dy_1'), \\ v_1 &= -\frac{J^{(2)}}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\log\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{I^{(1)}}{\pi}\int\limits_{T_1^{(1)}} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1' \quad (r_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2), \end{aligned}$$

unter $T_1^{(1)}$ das Bild von $T_0^{(1)}$ in der Ebene $x_1$-$y_1$ zur Zeit $t$ verstanden. Liegt $(a, b)$ in $T_0^{(2)} + S_0^{(2)}$, so gilt analog

$$(4)\quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{J^{(1)}}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta_2}\left(\log\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{I^{(2)}}{\pi}\int\limits_{T_1^{(2)}} \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1', \\ v_1 &= -\frac{J^{(1)}}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\log\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{I^{(2)}}{\pi}\int\limits_{T_1^{(2)}} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) d\sigma_1'. \end{aligned}$$

Schließlich ist natürlich

$$(5)\quad x_1 = a + \int_{t_0}^{t} u_1\,dt, \qquad y_1 = b + \int_{t_0}^{t} v_1\,dt.$$

In einer zweiten Näherung setzen wir für alle $(a, b)$ in $T_0 + S_0$, mithin in den *beiden* zur Zeit $t_0$ von den Wirbeln besetzten Bereichen der Ebene $a$-$b$

$$(6)\quad \begin{aligned} x_2 &= a + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) I'\,d\sigma_1', \qquad y_2 = b - \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\log\frac{1}{r_1}\right) I'\,d\sigma_1', \\ T_1 &= T_1^{(1)} + T_1^{(2)}, \qquad I = \begin{cases} I^{(1)} \text{ in } T_1^{(1)} \\ I^{(2)} \text{ in } T_1^{(2)}. \end{cases} \end{aligned}$$

In der dritten Näherung setzen wir, unter $T_2$ das Bild von $T_0$ in der Ebene $x_2$-$y_2$ verstanden,

$$(7)\quad \begin{aligned} x_3 &= a + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int\limits_{T_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\log\frac{1}{r_2}\right) I'\,d\sigma_2', \qquad y_3 = b - \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int\limits_{T_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\log\frac{1}{r_2}\right) I'\,d\sigma_2', \\ r_2^2 &= (x_2 - x_2')^2 + (y_2 - y_2')^2, \qquad d\sigma_2' = dx_2'\,dy_2'. \end{aligned}$$

Nach bekannten Sätzen erfüllen die Funktionen $x = x(a, b, t)$, $y = y(a, b, t)$, welche die tatsächlich zustande kommende Bewegung bestimmen, die Beziehungen

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= a + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int_T \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\frac{1}{r}\right) I'\, d\sigma' = a + \int_{t_0}^{t} \Lambda\{x, y\}\, dt, \\ y &= b - \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \int_T \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{r}\right) I'\, d\sigma' = b + \int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\{x, y\}\, dt, \quad d\sigma' = dx'\, dy' \end{aligned}$$

Es mögen nun

$$(9)\qquad x = x(x_1, y_1, t), \qquad y = y(x_1, y_1, t)$$

zwei in $T_1 + S_1$ erklärte stetige Funktionen bezeichnen, die daselbst stetige der $H$-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsveränderlichen haben. Wir setzen

$$(10)\quad \mathcal{O} = \mathcal{O}(t) = \mathrm{Max}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x - x_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y - y_1)\right|; \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x - x_1)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y - y_1)\right.\right.$$

unter $\mathcal{O}_*$ einen hinreichend kleinen Wert verstanden. Im Einklang mit der in den Formeln (8) eingeführten Bezeichnungsweise ist, wenn $T$ das durch (9) entworfene Bild von $T_1$ bezeichnet,

$$(11)\quad \Lambda\{x, y\} = \frac{1}{\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\log\frac{1}{r}\right) I'\, d\sigma', \qquad \mathsf{M}\{x, y\} = -\frac{1}{\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\log\frac{1}{r}\right) I'$$

Aus (11), (3), (4) und (5) ergibt sich, wie wir sogleich zeigen werden,

$$(12)\quad \begin{aligned} &|\Lambda\{x, y\} - u_1| \leqq A_1 + \varkappa_1 \mathcal{O}(t); \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\Lambda\{x, y\} - u_1)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\Lambda\{x, y\} - u_1)\right| \leqq A_2 \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\Lambda\{x, y\} - u_1)\right|_\lambda, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\Lambda\{x, y\} - u_1)\right|_\lambda \leqq A_3 + \varkappa_3 \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

unter $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ Konstante verstanden, unter $A_1$, $A_2$, $A_3$ aber Größen, die für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und alle $(a, b)$ in $T_0 + S_0$ gleichmäßig mit $\frac{d_0}{\varrho_0}$ gegen Null konvergieren. Ebenso ist

$$(13)\quad \begin{aligned} &|\mathsf{M}\{x, y\} - v_1| \leqq A_4 + \varkappa_4 \mathcal{O}(t); \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathsf{M}\{x, y\} - v_1)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathsf{M}\{x, y\} - v_1)\right| \leqq A_5 \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathsf{M}\{x, y\} - v_1)\right|_\lambda, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathsf{M}\{x, y\} - v_1)\right|_\lambda \leqq A_6 + \varkappa_6 \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

Setzt man

$$A = \mathrm{Max}\{A_1, \ldots, A_6\}, \qquad \varkappa = \mathrm{Max}\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6\},$$

so findet man kürzer

$$|\mathbf{x},y\}-u_1|,\ |\mathbf{M}\{x,y\}-v_1|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{\Lambda}\{x,y\}-u_1)\right|,\ldots,\left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathbf{M}\{x,y\}-v_1)\right|_\lambda \leqq A+\varkappa\mathfrak{O}(t).$$

Es möge sich etwa um die Formeln (12) handeln. Wir schreiben für (11) ausführlicher

$$(15)\qquad \mathbf{\Lambda}\{x,y\}=\frac{I^{(2)}}{\pi}\int\limits_{T^{(2)}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\log\frac{1}{r}\right)d\sigma'+\frac{I^{(1)}}{\pi}\int\limits_{T^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\left(\log\frac{1}{r}\right)d\sigma'$$

und stellen, indem wir $(a, b)$ in $T_0^{(1)}+S_0^{(1)}$ annehmen, die beiden Ausdrücke rechts den entsprechenden Ausdrücken der Formel (3) für $u_1$ gegenüber. Für $\frac{d_0}{\varrho_0}\to 0$ gehen die ersten Summanden gleichmäßig gegen Null, für den absoluten Betrag der Differenz der zweiten Summanden erhält man den auf S. 620 angegebenen Hilfssätzen gemäß eine Schranke von der Form $\varkappa_1\mathfrak{O}(t)$, womit gezeigt ist, daß

$$|\mathbf{\Lambda}\{x,y\}-u_1|\leqq A_1+\varkappa_1\mathfrak{O}(t),\qquad A_1\to 0\ \text{ für }\ \frac{d_0}{\varrho_0}\to 0\ \text{ gleichmäßig}$$

gilt. In ähnlicher Weise läßt sich die Richtigkeit aller übrigen Ungleichheiten (12) und (13) erweisen.

Setzt man in (14) speziell $x=x_1$, $y=y_1$, so findet man, da diesmal $\mathfrak{O}(t)=0$ ist, gewiß

$$\{x_1,y_1\}-u_1|,\ |\mathsf{M}_1\{x_1,y_1\}-v_1|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\Lambda_1\{x_1,y_1\}-u_1)\right|,\ldots,\left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathsf{M}_1\{x_1,y_1\}-v_1)\right|_\lambda\leqq A.$$

Betrachten wir nunmehr die Integralgleichung

$$(17)\qquad U(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(A+\varkappa U(t))\,dt.$$

Sie ist offenbar der Differentialgleichung

$$(18)\qquad \frac{dU}{dt}=A+\varkappa U$$

nebst Anfangsbedingung $U(t_0)=0$ gleichwertig und hat

$$(19)\qquad U(t)=\frac{A}{\varkappa}(e^{\varkappa(t-t_0)}-1)$$

zur Lösung. Augenscheinlich kann man $\frac{d_0}{\varrho_0}$ und damit auch $A$ so klein wählen, daß für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$

$$(20)\qquad U(t)\leqq\mathfrak{O}_*$$

gilt. Wegen (5), (6) und (16) ist gewiß

$$(21)\quad |x_2-x_1|, |y_2-y_1|, \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2-x_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_2-y_1)\right|_\lambda \leqq \int_{t_0}^{t} A\,dt \leqq U(t) \leqq U$$

Also darf man in unseren Beziehungen für $x, y$ auch $x_2, y_2$ einführen, was

$$(22)\quad |\Lambda_2\{x_2,y_2\}-u_1|, |\mathsf{M}_2\{x_2,y_2\}-v_1|, \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\Lambda_2\{x_2,y_2\}-u_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(\Lambda_2\{x_2,y_2\}-\right.$$
$$\leqq A+U(t),$$

somit

$$(23)\quad |x_3-x_1|, |y_3-y_1|, \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3-x_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_3-y_1)\right|_\lambda \leqq \int_{t_0}^{t} (A+U(t))\,dt = U(t)$$

ergibt. Man findet so offenbar für alle $n$

$$(24)\quad |x_n-x_1|, |y_n-y_1|, \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_n-x_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_n-y_1)\right|_\lambda \leqq \int_{t_0}^{t} (A+U(t))\,dt = U(t)$$

Nach (6) und (7) und den analogen Formeln für $x_4, y_4$ usw. gilt für $n \geqq 2$

$$(25)\quad \begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \left\{ \int_{T_n} \frac{\partial}{\partial y_n}\left(\log\frac{1}{r_n}\right) I'\,d\sigma_n' - \int_{T_{n-1}} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\left(\log\frac{1}{r_{n-1}}\right) I'\,d\sigma_{n-1}' \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t} (\Lambda_n\{x_n,y_n\} - \Lambda_{n-1}\{x_{n-1},y_{n-1}\})\,dt, \\ y_{n+1}-y_n &= -\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t} dt \left\{ \int_{T_n} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\log\frac{1}{r_n}\right) I'\,d\sigma_n' - \int_{T_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left(\log\frac{1}{r_{n-1}}\right) I'\,d\sigma_{n-1}' \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t} (\mathsf{M}_n\{x_n,y_n\} - \mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-1},y_{n-1}\})\,dt. \end{aligned}$$

Es möge nun für einen bestimmten Wert von $n \geqq 2$

$$(26)\quad \mathrm{Max}\left\{ |x_n-x_{n-1}|, |y_n-y_{n-1}|; \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_n-x_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_n-y_{n-1})\right|; \right.$$
$$\left. \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_n-x_{n-1})\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_n-y_{n-1})\right|_\lambda \right\} = q_n(t)$$

sein. Alsdann ist den Hilfssätzen auf S. 620 zufolge auch

$$(27)\quad |\Lambda_n\{x_n,y_n\} - \Lambda_{n-1}\{x_{n-1},y_{n-1}\}|, |\mathsf{M}_n\{x_n,y_n\} - \mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-1},y_{n-1}\}| \leqq \varkappa_7$$

sowie

$$(28)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\Lambda_n\{x_n,y_n\} - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Lambda_{n-1}\{x_{n-1},y_{n-1}\}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_n}\mathsf{M}_n\{x_n,y_n\} - \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-}\right.$$
$$\leqq \varkappa_8 q_n(t),$$

mithin, wie man wegen (26) leicht sieht, auch

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}\mathsf{M}_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial y_1}\mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right| \leqq \varkappa_9 q_n(t).$$

Des weiteren ist

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Lambda_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Lambda_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_n}\mathsf{M}_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right|_\lambda \leqq \varkappa_{10} q_n(t),$$

darum auch wegen (26)

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}\mathsf{M}_n\{x_n, y_n\} - \frac{\partial}{\partial y_1}\mathsf{M}_{n-1}\{x_{n-1}, y_{n-1}\}\right|_\lambda \leqq \varkappa_{11} q_n(t).$$ [32]

Aus (25), (27), (29), (31) folgt

$$(32)\quad \begin{aligned} &|x_{n+1} - x_n|, |y_{n+1} - y_n|; \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_{n+1} - x_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_{n+1} - y_n)\right|; \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_{n+1} - x_n)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_{n+1} - y_n)\right|_\lambda \leqq \varkappa_{12} \int_{t_0}^{t} q_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

Demnach ist (vgl. (26))

$$(33)\quad q_{n+1}(t) \leqq \varkappa_{13} \int_{t_0}^{t} q_n(t)\, dt.$$

Es möge nun etwa

$$(34)\quad \begin{aligned} \mathrm{Max}\Big\{ &|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|; \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 - x_2)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_3 - y_2)\right|; \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 - x_2)\right|_\lambda, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial y_1}(y_3 - y_2)\right|_\lambda \Big\} \leqq q \qquad (q \text{ konstant}) \end{aligned}$$

sein. Alsdann ist nach (33)

$$(35)\quad \begin{aligned} q_4(t) &\leqq \varkappa_{12} q\,(t - t_0), \\ q_5(t) &\leqq \varkappa_{12}^2 q \frac{(t-t_0)^2}{2!}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_l(t) &\leqq \varkappa_{12}^{l-3} q \frac{(t-t_0)^{l-3}}{(l-3)!}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die unendlichen Reihen

$$x_1 + \sum_{l}^{2..\infty}(x_l - x_{l-1}), \qquad y_1 + \sum_{l}^{2..\infty}(y_l - y_{l-1})$$

---

[32] In (30) und (31) werden bei der Bildung der Ausdrücke $|\ |_\lambda$ die Koordinaten $x_1$, $y_1$ als die unabhängigen Veränderlichen aufgefaßt.

sowie die durch gliedweise Differentiation in bezug auf $x_1$ und $y_1$ ge wonnenen Reihen konvergieren für alle $t$ in $\langle t_0, t\rangle$ und alle $(x_1, y_1)$ in $T$ gleichmäßig. Es sei

$$x = x_1 + \sum_{l}^{2..\infty} (x_l - x_{l-1}), \qquad y = y_1 + \sum_{l}^{2..\infty} (y_l - y_{l-1}).$$

Augenscheinlich haben $x$, $y$ stetige, der $H$-Bedingung genügende partiell Ableitungen erster Ordnung in bezug auf $x_1$ und $y_1$. Daß auch alle anderen in den Euler-Lagrangeschen Gleichungen auftretenden Ableitungen vorhan den und stetig sind und die Funktionen $x = x(a, b, t)$, $y = y(a, b, t)$ die Lösung unseres Problems darstellen, läßt sich durch eine sinngemäße Wieder holung der auf S. 627 angedeuteten Überlegungen beweisen.

Lwów, im März 1930.

(Eingegangen am 22. März 1930.)

# Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems.

Von

Aurel Wintner in Leipzig, z. Z.*) in Kopenhagen.

## Inhalt.

| | | Seite |
|---|---|---|
| | Einleitung | 641 |
| § 1. | Existenzsatz zu dem „stabilen“ Fall | 644 |
| § 2. | Coriolissche Oszillatoren mit einem eigentlichen Minimum der Kräftefunktion | 648 |
| § 3. | Anwendung auf die Strömgrenschen Gruppen d, e | 652 |
| § 4. | Die Stellung der nichtinfinitesimalen Librationen in der Genealogie der Bahngruppen d, e | 656 |
| § 5. | Exkurs über die Realitätsverhältnisse | 661 |
| § 6. | Coriolissche Oszillatoren mit einem eigentlichen Maximum der Kräftefunktion | 662 |
| § 7. | Coriolissche Oszillatoren mit einem Sattelpunkt der Kräftefunktion | 664 |
| § 8. | Anwendung auf die Strömgrenschen Gruppen a, b, c. — Der Hillsche Grenzfall | 667 |

## Einleitung.

Unter $\mu$ und $1-\mu$ die beiden Massen des restringierten Dreikörperproblems verstanden, wobei also die Gesamtmasse zur Masseneinheit gewählt ist und der Massenprozentsatz $\mu \leqq \frac{1}{2}$ angenommen werden kann, können infinitesimale Librationen um die äquilateralen Lagrangeschen Punkte bekanntlich nicht existieren, wenn eine der beiden Massen der anderen gegenüber nicht derart überwiegt, daß $\mu$ kleiner ist als ungefähr $\frac{1}{26}$.[1]) Herr Brown[2]) war der erste, der — durch formale Überlegungen — die Existenz von (freilich nicht infinitesimalen) Librationen auch für $\mu > \frac{1}{26}$, und zwar für

*) Fellow of the Rockefeller Foundation.

[1]) Vgl. z. B. E. Strömgren, Publ. fra Köbenhavns Observ. Nr. 67 (1930).

[2]) E. W. Brown, Monthly Notices 71 (1911), S. 438 ff., 492 ff.

$\frac{1}{26} < \mu < \frac{1}{20}$, plausibel zu machen versucht hat. Darwin[3]) hat dann in diese Gegend des Phasenraumes für $\mu = \frac{1}{11}$ einige Bahnen numerisch berechnet Scheinbar ohne Kenntnis dieser Arbeiten hat Herr Moulton[4]) im Falle $\mu =$ dasselbe getan[5]), die Wiedergabe seiner Rechnungen enthält aber einen Fehler[6] und sie sind auch sonst nicht überzeugend. Die systematische numerisch Untersuchung der nichtinfinitesimalen äquilateralen Librationen im Falle $\mu =$ ist von Herrn Strömgren[7]) vorgenommen worden. — Diese nichtinfinitesimale Bahnen können, nach Definition, nicht aus Lösungen der Variationsgleichunge als „erzeugenden" Lösungen (solutions génératrice[8]) bei Poincaré) gewonne werden, d. h. sie sind durch das Störungsprinzip nicht „erreichbar". Als *woher* kommen sie? Im Rahmen eines „genealogischen" Prinzips, das ic kürzlich auf die Kopenhagener Bahngruppen f, g, h, i, l, m in Verbindung mi dem Problem der Kommensurabilitätslücken angewandt habe[9]), kann di Frage dahin beantwortet werden, daß die Gruppen d, e, das sind die infini tesimalen, also gewiß nur für $\mu < \frac{1}{26}$ existierenden äquilateralen Librationen durch analytische Fortsetzung für $\mu > \frac{1}{26}$ in nichtinfinitesimale Scharen übergehen. — Damit beschäftigt sich aber nur § 4 der vorliegenden Arbeit in den übrigen Paragraphen handelt es sich hingegen um folgendes.

Das analytische Hauptproblem bei einem Existenzbeweis für periodisch Lösungen besteht bei dem heutigen Stande der Dinge bekanntlich in eine Realitätsdiskussion, indem die Existenz von (für reelle $t$) *eventuell* komplex wertigen periodischen Lösungen meist durch allgemeine Theorien, welch sich auf ein dabei auftretendes Konvergenzproblem beziehen, ein für allema geliefert wird, während die Realitätsdiskussion von Fall zu Fall eine müh same explizite Untersuchung von gewissen „Verzweigungsgleichungen" er fordern kann. Herr Moulton[10]) und im Anschluß an ihn die Herren Buck[11] Warren[12]) und Buchanan[13]) haben nun Existenzuntersuchungen angestell

---

[3]) G. H. Darwin, ibid. 72 (1912), S. 642 ff.

[4]) Vgl. F. R. Moulton, Periodic orbits; in collaboration with D. Buchanan, Th. Buck F. L. Griffin, W. R. Longley and W. D. MacMillan. Publ. by the Carnegie Inst. o Washington, 1920.

[5]) F. R. Moulton, a. a. O. [4]), chap. XVI.

[6]) E. Strömgren, Publ. fra Köbenhavns Observ. Nr. 64 (1929), S. 8–9 [vgl. a. a. O. [22])

[7]) E. Strömgren, a. a. O. [1]), [6]) sowie Publ. fra Köbenhavns Observ. Nr. 61 (1929)

[8]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 1 (1892), S. 162

[9]) A. Wintner, Sitzungsber. der sächs. Akad. der Wiss. zu Leipzig, 1930, S. 2 ff.

[10]) F. R. Moulton, a. a. O. [4]), chap. V oder chap. VI.

[11]) Th. Buck, a. a. O. [4]), chap. IX.

[12]) Warren, Amer. Journ. of Math. 38 (1916), S. 221–248; vgl. auch D. Buchanan ibid. 41 (1919), S. 79 ff., wobei übrigens allgemeiner nicht nur zu den kollinearen Librationspunkten, sondern auch zu den angrenzenden periodischen Lösungen asym ptotische Lösungen betrachtet werden.

[13]) D. Buchanan, Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 (1919), S. 309–340.

über periodische Lösungen, die von den fünf Librationspunkten ausgehen, und über asymptotische Lösungen, die für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ in diese Lagrangeschen Gleichgewichtslösungen übergehen. Herr Moulton selbst behandelt die drei kollinearen Librationspunkte (also den Anfang der Kopenhagener Gruppen a, b, c, sofern $\mu = \frac{1}{2}$ ist), Herr Buck mit derselben Methode, aber natürlich nur für $\mu < \frac{1}{26}$, die beiden äquilateralen Librationspunkte (Gruppen d, e), Herr Warren die zu den kollinearen, und Herr Buchanan im Falle $\mu > \frac{1}{26}$ die zu den äquilateralen Librationspunkten asymptotischen Lösungen. — Es zeigt sich nun (§ 5), daß in allen diesen Untersuchungen eben der springende Punkt übersehen wird, indem Herr Moulton und seine Schüler eine von Herrn Moulton angegebene lineare Transformation der nichtlinearen Differentialgleichungen verwenden, die nicht reell ist und gar nicht übersehen läßt (vgl. § 5), ob die so gewonnene Lösung reell oder komplex ist (die Diskussion der Verzweigungsgleichungen — d. i. ein anderes Realitätsproblem — fällt dann nach den Angaben der Herren Moulton und Buck allerdings weg, doch werden auch die Rechnungen nicht immer mitgeteilt, und man findet auch Angaben, die auch falsch sind) — Ich werde nun die (reelle) Existenz der Gruppen a, b, c, d, e auf eine korrekte (und übrigens ziemlich übersichtliche) Weise beweisen, und zwar bei jedem $\mu$, was meines Wissens bisher nicht geschehen ist[14]); genauer steht die Sache allerdings wie folgt.

Ich stütze mich auf eine leider wenig bekannte grundlegende Untersuchung von Herrn Horn[15]), welche sich auf gewisse mehrdimensionale Analogien zu der Poincaréschen Theorie der Zentren[16]) bezieht und für die Zwecke des Dreikörperproblems bisher nicht verwertet worden ist, trotzdem dies bereits aus historischen Gründen nahegelegen hätte. Der Hauptzweck von Herrn Horn besteht nämlich loc. cit. darin, eine Untersuchung von Herrn Painlevé[17]), der die fraglichen Sätze in einer unzulässigen Allgemeinheit ausgesprochen hat, in Ordnung zu bringen. Nun knüpft aber Herr Painlevé loc. cit. eben an eine Stelle des ersten Bandes der Méthodes Nouvelles an, wo Poincaré u. a. behauptet[18]), daß die Realitätsdiskussion für den (einzigen) Librationspunkt des Hillschen Grenzfalles des restringierten Dreikörper-

[14]) Wegen Literatur vgl. Kap. VI der bekannten Schrift von R. Marcolongo, Il problema dei tre corpi da Newton (1686) al nostri giorni, Milano 1919 [Manuali Hoepli Nr. 403—405].

[15]) J. Horn, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **48** (1903), S. 409 ff. [Zusatz bei der Korrektur. Vgl. auch A. Liapounoff, Annales de Toulouse (2) **9** (1907) (russisch bereits 1892).]

[16]) H. Poincaré, Journ. de Math. (4) **1** (1885), S. 172—196.

[17]) P. Painlevé, C. R. **184**, S. 1222 ff.

[18]) H. Poincaré, a. a. O. [9]), S. 160.

problems sich aus den später in dem dritten Bande zu entwickelnden Unter suchungen ergeben wird (was übrigens, soweit ich sehen kann, nicht der Fa ist, so daß in § 8 der Vollständigkeit halber auch der Hillsche Grenzfa besprochen werden soll). — Im übrigen handelt es sich darum, daß Herr Hor nicht eine komplexe, sondern eine reelle lineare Transformation der nicht linearen Differentialgleichungen vornimmt, dadurch freilich die linearen Be standteile nicht auf die Diagonalform, sondern auf andere, aber reelle Normal formen bringt und diese reellen Normalformen einer direkten Untersuchun unterwirft. — Der Scharparameter von Herrn Horn ist ein Anfangswer $(x_n)_{t=0}$; mit Rücksicht auf die astronomische Fragestellung werde ich abe an dessen Stelle — im Gegensatz zu den Arbeiten der Herren Moulto und Buck — natürlich die Jacobische Konstante einführen.

* * *

Herrn Professor E. Strömgren gegenüber fühle ich mich zum aufrich tigen Dank verpflichtet nicht nur für die liebenswürdige Aufnahme in seine Sternwarte und weil er mir sein numerisches Material freundlichst zur Ver fügung gestellt hat, sondern auch für die vielen Gespräche, die ich mi ihm führen durfte, und ohne welche manches in dieser Arbeit fehlen müßte

## § 1.

## Existenzsatz zu dem „stabilen" Fall.

Es seien

$$\Phi_n = \Phi_n(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4$$

fünf reelle, in dem Ursprung

$$x_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

des (reellen) vierdimensionalen Phasenraumes samt ihren partiellen Ab leitungen erster Ordnung verschwindende Potenzreihen, die also in de Umgebung von (1) eine Entwicklung

$$\Phi_n = \sum_{m=2}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

zulassen, wobei $\Phi_n^{(m)}$ eine homogene ganze Funktion vom Grade $m$ bedeute Es seien ferner $\alpha$ und $\beta$ zwei positive Zahlen derart, daß einerseits

$$\frac{\alpha}{\beta} \not\equiv 0 \pmod 1 \tag{3}$$

ist, und daß andererseits das Differentialsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_2 + \Phi_1, \quad & \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 + \Phi_2, \\ \dot{x}_3 &= \beta x_4 + \Phi_3, \quad & \dot{x}_4 &= -\beta x_3 + \Phi_4 \end{aligned} \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right. \tag{4}$$

das Integral

$$\Phi_0 = C \tag{5}$$

besitzt. Nach einem Satze von Herrn Horn[15]) gibt es dann für absolut hinreichend kleine Werte der (reell zu wählenden) Integrationskonstante

$$c_1 = (x_1)_{t=0} \tag{6}$$

eine einparametrige Schar

$$x_n = x_n(t; c_1) \qquad (n = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

von periodischen reellen Lösungen mit der Periode

$$T = T(c_1) = \frac{2\pi}{\beta} + \mathfrak{P}(c_1); \quad \mathfrak{P}(0) = 0, \tag{8}$$

die für $c_1 \to 0$ in die „Gleichgewichtslage" (1) des „anharmonischen Oszillators" (4) übergehen, und zwar geht

(9) in $x_1(t; c_1)$, $x_2(t; c_1)$ nur $c_1$, in $x_3(t; c_1)$, $x_4(t; c_1)$ auch $c_1^2$

auf [unter $\mathfrak{P}(X)$ ist hier und in dem Nachstehenden eine — nicht immer eine und dieselbe — reelle Potenzreihe mit von Null verschiedenem Konvergenzradius zu verstehen]. — Man erkennt sofort, daß der Satz für den Fall, wo (3) nicht gilt, aber

$$\frac{\beta}{\alpha} \not\equiv 0 \pmod 1 \tag{3}'$$

ist, die Existenz einer entsprechenden periodischen Schar

$$x_n = x_n(t; c_3), \quad n = 1, 2, 3, 4; \quad c_3 = (x_3)_{t=0} \tag{7}'$$

mit der Periode

$$T = T(c_3) = \frac{2\pi}{\alpha} + \mathfrak{P}(c_3); \quad \mathfrak{P}(0) = 0 \tag{8}'$$

ergibt, da doch $\alpha$ und $\beta$ in (4) auf eine symmetrische Weise eintreten. Aus demselben Grunde gibt es sogar zwei verschiedene Scharen von periodischen Lösungen der genannten Art, sobald die beiden Bedingungen (8), (8)′ gleichzeitig erfüllt sind, d. h. wenn keine der beiden Zahlen $\alpha$, $\beta$ in dem Modul der anderen liegt; wären nämlich die beiden Scharen identisch, so müßte wegen (8), (8)′ offenbar $\alpha = \beta$ gelten, was den Voraussetzungen (3), (3)′ widerspricht. — Erst wenn keine der beiden Voraussetzungen (3), (3)′ erfüllt ist, d. h. wenn

$$\alpha = \beta \tag{9}$$

ausfällt, ergibt der Satz nicht einmal eine Schar. — Man beachte übrigens, daß zugleich mit $x_n = x_n(t)$ auch $x_n(t - t_0)$ eine Lösung ist, da doch $t$ in (4) nicht explizit vorkommt, daß aber $t_0$, im Gegensatz zu $c_1$ oder $c_3$, kein wesentlicher Parameter ist, so daß wir die beiden Lösungen $x_n = x_n(t)$,

$x_n = x_n(t - t_0)$ voneinander nicht unterscheiden wollen. Der Umstand, daß $t_0$ willkürlich ist, zeigt auch den eigentlichen Inhalt des Satzes an (wir wollen dabei bis auf weiteres stets nur an die Schar (7) denken und (7)′ zunächst beiseite lassen): das Problem, eine periodische Lösung zu bestimmen, ist ein überbestimmtes Problem (vgl. die Poincarésche Theorie der Zentren), da die Forderung, daß alle vier $x_n(t)$ nach Ablauf der Zeit $T$ ihren zu $t = 0$ gehörigen Wert annehmen, die Befriedigung von vier Bedingungsgleichungen erfordert, während nur drei eigentliche Integrationskonstante zur Verfügung stehen. Herr Horn zeigt nun, daß die vierte Bedingungsgleichung mit Rücksicht auf das Integral (5) identisch erfüllt ist, wenn die drei ersten Bedingungsgleichungen befriedigt werden, so daß es also nur drei Bedingungsgleichungen gibt, die durch passende Wahl von drei Integrationskonstanten zu befriedigen sind. Das Problem scheint zunächst noch immer überbestimmt zu sein, da nicht diskrete periodische Lösungen, sondern Kontinuen von solchen gesucht werden. Tatsächlich darf aber die Periode passend gewählt werden, so daß es sich zum Schluß um zwei Bedingungsgleichungen für zwei Unbekannte handelt. Die Bedingung (3) läuft dann darauf hinaus, daß die Jacobische Anfangsdeterminante dieser beiden Bedingungsgleichungen nicht verschwindet. Würde sie verschwinden, d. h. würde (3) nicht erfüllt sein, so wäre eine reelle Schar noch immer denkbar, ihre Existenz oder Nichtexistenz kann aber von Fall zu Fall nur durch Berechnung der höheren Terme entschieden werden („Verzweigungsfall"). Die diesbezüglichen Angaben von Herrn Buck sind also nichtssagend.

Es sei noch erwähnt, daß Herr Horn außer den eingangs erwähnten Voraussetzungen über (4) noch eine weitere macht, indem er ein allgemeineres System behandelt (welchem sich übrigens auch die Theorie der kleinen Librationen um die drei kollinearen Lagrangeschen Punkte, auf die ich weiter unten zurückkomme, unterordnen läßt). Ich habe diese Zusatzbedingung oben nicht erwähnt, weil sie bei unserem Differentialsystem von selbst erfüllt ist. In dem Falle, daß in der Entwicklung (2) des Integrals $\Phi_0$ die quadratische Form $\Phi_0^{(2)}$ nicht identisch verschwindet, besteht die Hornsche Zusatzbedingung darin, daß in $\Phi_0^{(2)}$ der Koeffizient von $x_1^2$ nicht verschwinden soll [sofern es sich um (7) handelt; handelt es sich um (7)′, so hat der Koeffizient von $x_3^2$ in $\Phi_0^{(2)}$ von Null verschieden zu sein]. Nun ist aber in unserem Falle

$$\Phi_0^{(2)}(x_1, x_2, 0, 0) = x_1^2 + x_2^2. \tag{10}$$

Man erkennt dies unmittelbar, wenn man bemerkt, daß die zu der Gleichgewichtslösung

$$x_n(t) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, 3, 4) \tag{1}'$$

gehörigen Variationsgleichungen (Jacobischen Gleichungen) von (4) offenbar einfach durch Streichung der $\Phi_n$ entstehen:

$$\dot{x}_1^* = \alpha x_2^*,\ \dot{x}_2^* = -\alpha x_1^*;\quad \dot{x}_3^* = \beta x_4^*,\ \dot{x}_4^* = -\beta x_3^*, \tag{11}$$

und daher das Integral $(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 = \text{konst.}$ besitzen [und daß anderseits $\Phi_0$ keine linearen Terme enthält]. — Unter Benutzung von (10) können wir übrigens einen für das dynamische Problem wesentlichen Schritt machen, nämlich in (7) an Stelle von (6) die „Energiekonstante“ $C$ des Integrals einführen, das doch in den numerischen Untersuchungen stets der Scharparameter ist, in den diesbezüglichen analytischen Arbeiten aber meines Wissens nicht herangezogen wird. — Setzt man zunächst in (5) $t = 0$:

$$(\Phi_0(x_1, x_2, x_3, x_4))_{t=0} = C;\qquad \Phi_0 = \sum_{m=2}^{\infty} \Phi_0^{(m)}(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{5}'$$

so erscheint $C$ als eine Funktion der Anfangswerte $c_n = (x_n)_{t=0}$. Führt man nun in (5)′ die Schar (7) ein, in welcher alle $c_n$ offenbar Funktionen von $c_1$ sind, so folgt unter Beachtung von (6), (9) und (10)

$$\mathsf{A}\cdot c_1^2 + c_1^3 \mathfrak{P}(c_1) = C \qquad (\mathsf{A} > 0),$$

oder, wenn der zu der Gleichgewichtslösung (1)′ gehörige Wert von $C$ nicht gleich 0, sondern gleich einer willkürlichen absoluten Konstante $C_0$ gesetzt, d. h. $\Phi_0$ nicht in der Gestalt (5)′, sondern als

$$\Phi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_0^{(m)}(x_1, x_2, x_3, x_4);\qquad \Phi_0^{(0)} = C_0,\ \Phi_0^{(1)} \equiv 0 \tag{12}$$

angesetzt wird, allgemeiner

$$\mathsf{A}\cdot c_1^2 + c_1^3 \mathfrak{P}(c_1) = C - C_0 \qquad (\mathsf{A} > 0).$$

Folglich ist die Abweichung $C - C_0$ des „gestörten“ Energiewertes $C$ von dem „ungestörten“ $C_0$ für absolut hinreichend kleine Werte des „störenden“ Parameters $c_1$ positiv, und wegen $\mathsf{A} > 0$ ergibt sich für absolut hinreichend kleine $c_1$, d. h. für hinreichend kleine $C - C_0$, die gesuchte Übergangsformel von $c_1$ zu $C$ in der Gestalt

$$c_1 = \mathfrak{P}(\sqrt{C - C_0}),\ \mathfrak{P}(0) = 0;\qquad C - C_0 = C - \Phi_0^{(0)} > 0. \tag{13}$$

Im Falle (3) folgt daher an Stelle von (7), (8)

$$\begin{aligned} &x_n = x_n(t, \sqrt{C - C_0}) && (n = 1, 2, 3, 4);\\ &T = \frac{2\pi}{\beta} + \mathfrak{P}(\sqrt{C - C_0}),\ \mathfrak{P}(0) = 0; && \frac{\alpha}{\beta} \not\equiv 1 \pmod 1 \end{aligned} \tag{14}$$

und im Falle (3)′ an Stelle von (7)′, (8)′ entsprechend

$$\begin{aligned} &x_n = x_n(t, \sqrt{C - C_0}) && (n = 1, 2, 3, 4);\\ &T = \frac{2\pi}{\alpha} + \mathfrak{P}(\sqrt{C - C_0}),\ \mathfrak{P}(0) = 0; && \frac{\beta}{\alpha} \not\equiv 1 \pmod 1, \end{aligned} \tag{14}'$$

beidemal für hinreichend kleine Werte von $C - C_0 > 0$.

Es sei noch bemerkt, daß die Gleichgewichtslage (1) des Oszillators (4) im Sinne der Theorie der kleinen Schwingungen jedenfalls, d. h. auch dann stabil ist, wenn weder (3) noch (3)′ gilt; die Eigenwerte der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0) \tag{15}$$

von (11), das sind die Wurzeln

$$\omega_1 = \alpha i,\ \omega_2 = -\alpha i,\ \omega_3 = \beta i,\ \omega_4 = -\beta i \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0) \tag{16}$$

der durch den Ansatz

$$x_n^* = K_n e^{\omega t} \qquad (n = 1, 2, 3, 4) \tag{11}'$$

gelieferten Säkulargleichung

$$\left| \begin{matrix} \omega & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \omega \end{matrix} \right| \equiv (\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \beta^2) = 0, \tag{16}'$$

sind nämlich rein imaginär, und säkulare (d. h. in $t$ rationale) Faktoren kann es nicht geben, da die Elementarteiler auch im Falle (9) eines zweifachen Wurzelpaares (16) linear sind.

## § 2.

## Coriolissche Oszillatoren mit einem eigentlichen Minimum der Kräftefunktion.

In der für absolut hinreichend kleine $x, y$ konvergenten reellen Potenzreihe

$$\Omega(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega^{(m)}(x, y), \tag{17}$$

wobei $\Omega^{(m)}$ eine ganze Form vom Grade $m$ bedeutet, also

$$\Omega^{(0)}(x, y) \equiv \Omega(0, 0) = C_0 = \text{konst.}, \tag{18}$$

$$\Omega^{(1)}(x, y) \equiv \Omega_x(0, 0) \cdot x + \Omega_y(0, 0) \cdot y, \tag{19}$$

$$\Omega^{(2)}(x, y) \equiv \Omega_{xx}(0, 0) \cdot x^2 + 2\Omega_{xy}(0, 0) \cdot xy + \Omega_{yy}(0, 0)\, y^2 \tag{20}$$

ist, sei $\Omega^{(1)}(x, y) \equiv 0$, d. h. $|\operatorname{grad} \Omega(0, 0)| = 0$ oder

$$\Omega_x(0, 0) = 0, \quad \Omega_y(0, 0) = 0, \tag{21}$$

so daß der Ursprung

$$x = 0, \quad y = 0 \tag{22}$$

der Ebene $(x, y)$ eine extremale Stelle der Fläche $z = \Omega(x, y)$, d. h.

$$x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0 \tag{23}$$

eine Lösung sowohl von

$$\ddot{x} = \Omega_x(x, y), \quad \ddot{y} = \Omega_y(x, y), \tag{24}_1$$

als auch von

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x(x, y), \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_x(x, y) \tag{24}_2$$

ist. Diese beiden Differentialsysteme, die wir zunächst nebeneinander betrachten wollen, lassen ein und dasselbe Energieintegral

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y) = C \tag{25}$$

zu, indem durch das Multiplikatorsystem $(\dot{x}, \dot{y})$ von $(24)_1$ die „Coriolis-Kräfte" in $(24)_2$ weggehoben werden (Jacobi). Da der Beweis des Dirichletschen Stabilitätssatzes für $(24)_1$, im Gegensatz zu den auf (reellen) asymptotischen Lösungen von $(24)_1$ beruhenden Labilitätsuntersuchungen von Liapounoff[19]) (vgl. weiter unten S. 661) ausschließlich auf (25) beruht, so gilt der Dirichletsche Stabilitätssatz auch für $(24)_2$. Die Prämisse des Dirichletschen Stabilitätssatzes besteht darin, daß die Kräftefunktion (17) in der Gleichgewichtslage (22) ein isoliertes Maximum besitzt, läuft also. sobald die Determinante der Hesseschen Anfangsmatrix

$$\begin{Vmatrix} r & s \\ s & t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Omega_{xx}(0,0) & \Omega_{xy}(0,0) \\ \Omega_{xy}(0,0) & \Omega_{yy}(0,0) \end{Vmatrix} \tag{26}$$

nicht verschwindet, darauf hinaus, daß in (22) bereits (20) ein isoliertes Maximum besitzt, d. h. daß (26) negativ definit ist. Bei der Anwendung auf das restringierte Dreikörperproblem ist nun die Determinante (26) stets von Null verschieden, und (26) ist nie negativ definit, also entweder indefinit oder positiv definit. Und zwar ist (26) nach Herrn Plummer[20]) in allen drei kollinearen Librationspunkten bei jedem Werte des Massenverhältnisses indefinit, die Potentialfläche $z = \Omega(x, y)$ hat also in allen drei kollinearen, d. h. auf der Syzigienachse liegenden Librationspunkten kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt, sie muß also, da das Gesamtpotential für $x^2 + y^2 \to +\infty$ mit Rücksicht auf das Zentrifugalglied unendlich wird. ferner stets positiv ist und in, bezüglich der Syzigienachse, symmetrisch gelegenen Punkten gleiche Werte annimmt, ihr Minimum in den beiden äquilateralen, in bezug auf die Syzigienachse symmetrisch gelegenen Librationspunkten und nur in diesen annehmen, da es doch keine weiteren Librationspunkte gibt und die Librationspunkte durch $|\operatorname{grad} \Omega| = 0$, d. h.

---

[19]) A. Liapounoff, Journ. de Math (5) **3** (1897), S. 81–94.

[20]) H. C. Plummer, Monthly Notices **62** (1902), S. 16–17.

dadurch gekennzeichnet sind, daß, wenn der Librationspunkt zum Ursprung (22) des Achsenkreuzes gewählt wird, die Extremalbedingung (21) erfüllt ist. Da wir nun die kollinearen Librationspunkte erst in §§ 7, 8 betrachten wollen und $\Omega$ in den äquilateralen Librationspunkten bei jedem Werte des Massenverhältnisses ein isoliertes Minimum hat, und zwar derart, daß die Determinante der Matrix (26) nicht verschwindet (vgl. übrigens § 6), so können wir uns, indem wir jetzt wieder zu einem beliebigen Oszillator übergehen, d. h. von der beabsichtigten astronomischen Anwendung zunächst absehen, auf den Fall beschränken, daß bereits (20) ein isoliertes Minimum besitzt, d. h. positiv definit ist:

$$\mathrm{r} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mathrm{r} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{t} \end{vmatrix} > 0 \qquad (\text{also auch } \mathrm{t} > 0), \tag{27}$$

welche Bedingung unter Benutzung der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ von (26) in der symmetrischen Gestalt

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0 \tag{28}$$

geschrieben werden kann, wobei bekanntlich

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{r}\,\mathrm{t}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \mathrm{r}\,\mathrm{t} - \mathrm{s}^2 \tag{29}$$

gilt. Für das Schwingungsproblem sind aber nicht diese beiden Eigenwerte von (26), sondern [vgl. (11)′, S. 648] die vier Eigenwerte

$$\omega_n^{(h)} \qquad (n = 1, 2, 3, 4;\ h = 1 \text{ bzw. } h = 2) \tag{30}$$

der Matrix

$$\|\alpha_{jk}^{(1)}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{r} & \mathrm{s} & 0 & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{t} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ bzw. } \|\alpha_{jk}^{(2)}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{r} & \mathrm{s} & 0 & 2 \\ \mathrm{s} & \mathrm{t} & -2 & 0 \end{Vmatrix} \tag{31}$$

maßgebend, die entsteht, wenn man die zu der Gleichgewichtslösung (23) gehörigen Variationsgleichungen

$$\begin{cases} \ddot{x}^* = \mathrm{r}\,x^* + \mathrm{s}\,y^* \\ \ddot{y}^* = \mathrm{s}\,x^* + \mathrm{t}\,y^* \end{cases} \text{ bzw. } \begin{cases} \ddot{x}^* - 2\dot{y}^* = \mathrm{r}\,x^* + \mathrm{s}\,y^*, \\ \ddot{y}^* + 2\dot{x}^* = \mathrm{s}\,x^* + \mathrm{t}\,y^* \end{cases} \tag{32}$$

nach Einführung der Schreibweise

$$X_1^* = x^*, \ X_2^* = y^*, \ X_3^* = \dot{x}^*, \ X_4^* = \dot{y}^* \tag{33}$$

in der Gestalt

$$\dot{X}_j^* = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{jk}^{(h)} X_n^* \qquad (j = 1, 2, 3, 4;\ h = 1 \text{ bzw. } h = 2) \tag{34}$$

schreibt. Die beiden Säkularpolynome

$$\Delta^{(h)}(\omega) = \det\|\omega\,\delta_{jk} - \alpha_{jk}^{(h)}\| \quad (h = 1 \text{ bzw. } h = 2); \ \|\delta_{jk}\| = \text{Einheitsmatrix} \tag{35}$$

können freilich auch dadurch erhalten werden, daß man in (32)

$$x^* = A e^{\omega t}, \quad y^* = B e^{\omega t} \tag{36}$$

setzt und beachtet, daß die Determinante der sich für die Funktionen (36) ergebenden je zwei homogen-linearen Bedingungsgleichungen mit dem Polynom $\Delta^{(1)}(\omega)$ bzw. $\Delta^{(2)}(\omega)$ offenbar identisch ist. So folgt

$$\Delta^{(1)}(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \omega^2 - r & -s \\ -s & \omega^2 - t \end{vmatrix}, \quad \Delta^{(2)}(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \omega^2 - r & -2\omega - s \\ 2\omega - s & \omega^2 - t \end{vmatrix}, \tag{35)'}$$

d. h. wegen (29)

$$\Delta^{(1)}(\omega) \equiv \omega^4 - (\lambda_1 + \lambda_2)\omega^2 + \lambda_1 \lambda_2, \quad \Delta^{(2)}(\omega) \equiv \Delta^{(1)}(\omega) + 4\omega^2,$$

so daß die Eigenwerte (30), wie es sich von selbst versteht, nur von den Eigenwerten (28) abhängen, und zwar ist

$$\Delta^{(1)}(\omega) \equiv (\omega^2 - \lambda_1)(\omega^2 - \lambda_2), \tag{37}$$

also

$$\omega_1^{(1)} = \sqrt{\lambda_1}, \ \omega_2^{(1)} = -\sqrt{\lambda_1}, \ \omega_3^{(1)} = \sqrt{\lambda_2}, \ \omega_4^{(1)} = -\sqrt{\lambda_2} \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0) \tag{38}$$

(wobei, wie auch später, unter $\sqrt{a}$ für $a \geqq 0$ stets $|\sqrt{a}|$ zu verstehen ist), ferner

$$\Delta^{(2)}(\omega) \equiv \omega^4 - (\lambda_1 + \lambda_2 - 4)\omega^2 + \lambda_1 \lambda_2, \tag{39}$$

also

$$\omega_n^{(2)} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2}\right\}} \tag{40}$$

$$(n = 1, 2, 3, 4; \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0),$$

so daß die Eigenwerte $\omega_n^{(1)}$ stets reell und von Null verschieden, die Eigenwerte $\omega_n^{(2)}$ ebenfalls von Null verschieden, aber eventuell nicht reell sind. Man überzeugt sich leicht, daß, wenn ein $\omega_n^{(2)}$ reell ist, so auch die übrigen drei es sind, und wenn ein $\omega_n^{(2)}$ rein imaginär ist, so auch die übrigen drei es sind, daß ferner, ebenso wie bei den $\omega_n^{(1)}$, zugleich mit $\omega_n^{(2)}$ auch $-\omega_n^{(2)}$ ein reeller Eigenwert ist; da endlich nicht reelle Wurzeln nur in konjugiert komplexen Paaren auftreten können, so sind insgesamt nur die folgenden drei Fälle möglich: entweder ist

$$\omega_1^{(2)} = \gamma, \quad \omega_2^{(2)} = -\gamma, \quad \omega_3^{(2)} = -\delta, \quad \omega_4^{(2)} = -\delta \tag{40)_I}$$

$$(\gamma > 0, \ \delta > 0),$$

oder

$$\omega_1^{(2)} = i\alpha, \quad \omega_2^{(2)} = -i\alpha, \quad \omega_3^{(2)} = i\beta, \quad \omega_4^{(2)} = -i\beta \tag{40)_{II}}$$

$$(\alpha > 0, \ \beta > 0),$$

oder endlich

$$\omega_1^{(2)} = \gamma + i\alpha, \ \omega_2^{(2)} = \gamma - i\alpha, \ \omega_3^{(2)} = \delta + i\beta, \ \omega_4^{(2)} = \delta - i\beta \tag{40)_{III}}$$

$$(\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \gamma \gtrless 0, \ \delta \gtrless 0),$$

und zwar ist, wie man leicht nachrechnet, für $(40)_{\mathrm{I}}$

$$(40)'_{\mathrm{I}} \qquad \lambda_1+\lambda_2 \geqq 4, \qquad |\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}| \geqq 2 \qquad (\lambda_1>0,\ \lambda_2>0),$$

und für $(40)_{\mathrm{II}}$

$$\lambda_1+\lambda_2 \leqq 4, \qquad \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2} \leqq 2 \qquad (\lambda_1>0,\ \lambda_2>0).$$

d. h. einfach

$$(40)'_{\mathrm{II}} \qquad \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2} \leqq 2 \qquad (\lambda_1>0,\ \lambda_2>0),$$

also für $(40)_{\mathrm{III}}$ das Nichterfülltsein von mindestens einer der Bedingungen $(40)'_{\mathrm{I}}$, $(40)'_{\mathrm{II}}$ notwendig und hinreichend. Es sei gleich bemerkt, daß bei den äquilateralen Lagrangeschen Lösungen der Fall $(40)_{\mathrm{I}}$, der eben am einfachsten zu erledigen ist, nie vorliegt, man hat es vielmehr entweder mit dem Falle $(40)_{\mathrm{II}}$ oder mit dem Falle $(40)_{\mathrm{III}}$ zu tun, je nachdem eine der beiden Massen rund fünfundzwanzigmal größer ist als die andere oder nicht (vgl. S. 655).

Um den Existenzsatz von § 1 anwenden zu können, müssen wir uns auf Fall $(40)_{\mathrm{II}}$ beschränken. Die Gleichgewichtslösung (23) ist also im Sinne der Variationsgleichungen, d. h. im Sinne der charakteristischen Exponenten mit Rücksicht auf (36) stabil, indem $\omega = \omega_n^{(2)}$ bei jedem $n$ rein imaginär ist [daß eine Stabilität auch in dem exakten Dirichletschen Sinne vorhanden ist, wird nicht behauptet; (17) hat doch in (22) nach Voraussetzung (S. 650) nicht ein Maximum, sondern ein Minimum, so daß der Dirichletsche Satz nicht angewandt werden kann; ob die lineare Näherung dennoch ein exaktes Ergebnis liefert, d. h. ob die Gleichgewichtslösung in dem Dirichletschen Sinne stabil ist, ist, soweit ich weiß, ein unerledigtes Problem; man hat es bisher wohl gar nicht beachtet, daß es wegen der Coriolis-Kräfte (S. 649) keinen Parallelismus zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen (26), $(31)_2$ gibt].

## § 3.

## Anwendung des Existenzsatzes auf die Strömgrenschen Gruppen d, e.

Wir stellen zunächst einige Formeln zusammen. Die Matrix

$$(41) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx}(0,0) & \Omega_{xy}(0,0) & 0 & 2 \\ \Omega_{xy}(0,0) & \Omega_{yy}(0,0) & -2 & 0 \end{Vmatrix}$$

der zu (23) gehörigen Variationsgleichungen hat die Eigenwerte

$$(42) \qquad \omega_n = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2-4) \pm \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2-4)^2-4\lambda_1\lambda_2}\right\}} \qquad (n=1,2,3,4),$$

die rein imaginär sind:

$$(43)\quad \omega_1 = i\alpha, \quad \omega_2 = -i\alpha, \quad \omega_3 = i\beta, \quad \omega_4 = -i\beta \qquad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

indem

$$(44)\quad \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} \leqq 2 \qquad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$$

vorausgesetzt ist. Damit mindestens eine der beiden Bedingungen (3), (3)′ erfüllt ist, müssen wir annehmen, daß (9) nicht gilt, daß also entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ausfällt, d. h. daß die vier Eigenwerte (43) durchweg verschieden sind. Wir wählen die Bezeichnungen so, daß $\alpha < \beta$ gilt, daß also (3) von selbst erfüllt ist, (3)′ aber wegen (42), (43), (44) dann und nur dann, wenn

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 4 - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4)^2 - 4\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2 - 4 + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4)^2 - 4\lambda_1\lambda_2}} \right|^{\frac{1}{2}} \equiv 0 \pmod 1,$$

d. h. wenn

$$(45)\quad \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left| (\lambda_1 + \lambda_2 - 4) - \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4)^2 - 4\lambda_1\lambda_2} \right| \equiv 0 \pmod 1$$

gilt.

Da die vier Eigenwerte (42) von (41) durchweg verschieden, also die Elementarteiler gewiß linear sind, so kann (41) durch eine passende lineare Transformation in die Diagonalmatrix

$$(15)'\quad \left\| \begin{matrix} i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\beta \end{matrix} \right\|$$

übergeführt werden. Doch wird diese Transformation, da (41) reell und (15)′ komplex ist, notwendigerweise komplex sein. Hingegen gibt es eine reelle Transformation, durch welche (41) in (15) [S. 648] übergeführt wird. Ist $\| a_{jk} \|$ die Matrix dieser reellen Transformation

$$(46)\quad x_j = \sum_{k=1}^{4} a_{jk} X_k \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (\det \| a_{jk} \| \neq 0),$$

wobei

$$(33)'\quad X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = \dot{x}, \quad X_4 = \dot{y}$$

gemeint ist, so können $(24)_2$ bzw. (25) in der Gestalt (4) bzw. (5) geschrieben werden. Mit Rücksicht auf den Existenzsatz von § 1 gilt daher der folgende

Satz. Die in der Umgebung des Punktes $x = y = 0$ der reellen Ebene reguläre und reelle Funktion $\Omega(x, y)$ genüge den Bedingungen

$$\Omega_x(0,0) = 0; \quad \Omega_y(0,0) = 0, \quad \Omega_{xx}(0,0) > 0, \quad \Omega_{yy}(0,0) > 0,$$

$$(47)\quad \begin{vmatrix} \Omega_{xx}(0,0) & \Omega_{xy}(0,0) \\ \Omega_{xy}(0,0) & \Omega_{yy}(0,0) \end{vmatrix} > 0,$$

so daß also $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ eine Lösung von

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x(x, y), \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y(x, y); \tag{48}$$
$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y) = C$$

ist und die zu der Lösung $X(t) \equiv 0$, $Y(t) \equiv 0$ von

$$\ddot{X} = \Omega_X(X, Y), \quad \ddot{Y} = \Omega_Y(X, Y); \quad \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \Omega(X, Y) = C \tag{48}'$$

gehörigen charakteristischen Exponenten reell und von Null verschieden (also durchweg „labil") sind. Die Hessesche (positiv definite) Matrix

$$\begin{Vmatrix} \Omega_{xx}(0,0) & \Omega_{xy}(0,0) \\ \Omega_{yx}(0,0) & \Omega_{yy}(0,0) \end{Vmatrix} \tag{49}$$

sei aber derart, daß die zu $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ gehörigen charakteristischen Exponenten von (48) dennoch rein imaginär (also durchweg „stabil"), mithin von der Form

$$\pm i\alpha, \quad \pm i\beta; \quad 0 < \alpha \leqq \beta$$

sind. Endlich seien sie voneinander verschieden, d. h. es sei $\alpha \neq \beta$. Dann gibt es für hinreichend kleine Werte von

$$C - C_0 > 0; \quad C_0 = \Omega(0, 0) \quad [\text{vgl. (48)}] \tag{50}$$

eine reelle, mit der Periode

$$T_C = \frac{2\pi}{\alpha} + \mathfrak{P}(\sqrt{C - C_0}); \quad \mathfrak{P}(0) = 0 \tag{51}$$

periodische Lösungsschar

$$x = x(t; \sqrt{C - C_0}), \quad y = y(t; \sqrt{C - C_0}) \tag{52}$$

von (48), die für $C \to C_0$ in die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ übergeht, es gibt ferner, sofern $\beta$ kein Multiplum von $\alpha$ ist, eine [von (52) mit Rücksicht auf (51) offenbar verschiedene] zweite ebensolche Schar mit der Periode

$$T_C = \frac{2\pi}{\beta} + \mathfrak{P}(\sqrt{C - C_0}); \quad \mathfrak{P}(0) = 0; \quad \frac{\beta}{\alpha} \not\equiv 0 \pmod 1. \tag{51}'$$

* * *

Um diesen Satz auf das restringierte Dreikörperproblem anzuwenden, legen wir die Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse dadurch fest, daß die Gravitationskonstante, die Drehgeschwindigkeit der Syzigienachse um den Schwerpunkt und die Summe der beiden anziehenden Massen, deren eine mit $\mu$ bezeichnet werden soll, gleich 1 sind, so daß also die andere Masse gleich $1 - \mu$ wird, also $> \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden darf. Wir verstehen ferner unter $\Omega$ die Summe der Gravitations- und Zentrifugalpotentiale,

die also nur in den beiden Massen (und daher in den Librationspunkten gewiß nicht) eine Singularität hat. Wir legen endlich den Ursprung des Achsenkreuzes, dessen $x$-Achse zur Syzigienachse parallel sein soll, in einen Librationspunkt, so daß mit Rücksicht auf die Definition der Librationspunkte $\Omega_x(0,0)=0$, $\Omega_y(0,0)=0$ wird.

Wir betrachten insbesondere einen äquilateralen Librationspunkt. Dann ist bekanntlich[1])

$$\Omega_{xx}(0,0)=\frac{3}{4}>0, \quad \Omega_{xy}(0,0)=\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)>0, \quad \Omega_{yy}(0,0)=\frac{9}{4}>0,$$

also

$$\begin{vmatrix} \Omega_{xx}(0,0) & \Omega_{xy}(0,0) \\ \Omega_{yx}(0,0) & \Omega_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \frac{27}{16}[1-(1-2\mu)^2]>0,$$

da nach der Definition des „Massenprozentsatzes“ $\mu$ (siehe oben)

$$0<\mu\leqq\frac{1}{2} \tag{54}$$

gilt, so daß die Minimumbedingung (47) bei jedem $\mu$ erfüllt ist. Die vier charakteristischen Exponenten, die sich aus (53), (26), (29), (42) zu

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\{-1\pm\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}\}} \tag{55}$$

berechnen und daher, wenn

$$\mu_0=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{27}}}{2}=0{,}0385\ldots\sim 4\,\% \tag{56}$$

gesetzt wird, für $0<\mu\leqq\mu_0$ rein imaginär („stabil“), für $\mu>\mu_0$ durchweg „labil“ (und übrigens auch nicht reell) sind, bilden für $\mu=\mu_0$ ein Paar von reinimaginären Doppelwurzeln. Die Bedingung des Satzes, daß nämlich die vier charakteristischen Exponenten von der Gestalt

$$\pm i\alpha, \quad \pm i\beta; \quad 0<\alpha<\beta \tag{55}'$$

sein sollen, ist also dann und nur dann erfüllt, wenn

$$0<\mu<\mu_0=0{,}0385\ldots \tag{57}$$

ausfällt. — Durch Vergleich von (55) mit (55)′ folgt ferner

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{27\mu(1-\mu)}, \tag{58}'$$

und da diese Funktion von $\mu$ für (57) regulär ist und für $\mu\to 0$, nicht aber für $\mu\to\mu_0$ unendlich wird, so bilden die Werte $\mu$, für welche einerseits (57) erfüllt ist und andererseits (58)′ ganzzahlig wird, eine sich bei $\mu=0$ und nur bei $\mu=0$ häufende Folge

$$\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_n\to 0; \quad \mu_n<\mu_0 \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{58}$$

Gehört also der Massenprozentsatz $\mu$ nicht der Kommensurabilitäts-folge der absoluten Konstanten $\mu_n$ an, und ist die Bedingung (57) erfüllt, so haben wir zwei Scharen (52) von periodischen Lösungen mit den Perioden (51), (51)′; ist aber $\mu = \mu_n$, so fällt die eine, nämlich die zu (51)′ gehörige Schar weg.

## § 4.

## Die Stellung der nichtinfinitesimalen Librationen in der Genealogie der Bahngruppen d, e.

Auf dem Intervalle

$$\frac{1}{2} \geqq \mu > \mu_0 \sim \frac{1}{26} \tag{59}$$

sind alle vier charakteristichen Exponenten der äquilateralen Gleichgewichtslösungen labil, d. h. nicht rein imaginär; sie sind ferner voneinander verschieden, endlich nicht reell, sondern von der Gestalt $A + iB$, wobei $A$ und $B$ reell und von Null verschieden sind, so daß sich die allgemeine Lösung der Variationsgleichungen aus asymptotisch-periodischen Termen

$$e^{At} \frac{\sin}{\cos}(Bt) \qquad (A \gtrless 0,\ B > 0 \tag{60}$$

aufbaut, also wegen $B \neq 0$ keine, für $t \to +\infty$ oder für $t \to -\infty$ rein asymptotische Glieder $e^{At}$ enthalten kann (hierfür wäre notwendig und hinreichend, daß der labile, d. h. nicht rein imaginäre charakteristische Exponent reell ist, wie das bei den kollinearen Librationspunkten für jedes $\mu$ stattfindet); wegen der Verschiedenheit der vier charakteristischen Exponenten gibt es ferner keine säkularen, d. h. Polynome von $t$ als Faktoren enthaltenden Glieder; endlich gibt es wegen $A \neq 0$ auch keine periodischen Glieder.

Da die Variationsgleichungen im Falle (59) keine periodischen Lösungen besitzen und da man gewöhnt ist, die Variationsgleichungen für „infinitesimale“ Bahnen als mit den exakten Bewegungsgleichungen praktisch äquivalente Differentialgleichungen zu betrachten — dies allein würde noch keinen Fehlschluß bedingen —, so war man lange der Ansicht, daß im Falle (59) auch die exakten Bewegungsgleichungen keine periodischen Lösung zulassen. Tatsächlich folgt aber nur, daß es im Falle (59) für die exakten Bewegungsgleichungen keine „*infinitesimalen*“ periodischen Lösungen geben kann, d. h. keine solchen, die periodische Lösungen der Variationsgleichungen zur „erzeugenden Lösung“ [solution génératrice (Poincaré)] haben, und Herrn Strömgrens numerische Untersuchungen haben in der allerletzten Zeit auch im Falle (59) tatsächlich zu geschlossenen Kurven um den äquilateralen Librationspunkt geführt, die also als nichtinfinitesi-

male periodische Lösungen zu bezeichnen sind, indem sie nicht aus periodischen Lösungen der Variationsgleichungen entstehen können und daher, wenn die Jacobische Konstante $C$ bei festem $\mu$ den Scharparameter und $C_0$ den „ungestörten", d. h. (bei demselben Werte von $\mu$) zu der Gleichgewichtslösung gehörigen Wert von $C$ bedeutet, für $C - C_0 \to 0$ nicht auf den äquilateralen Librationspunkt zusammenschrumpfen. Es sei wiederholt, daß dabei $\mu$ der Bedingung (59) gemäß fest gewählt ist und $C - C_0$ die Rolle eines „störenden" kleinen Parameters hat (vgl. § 1). D. h., die Existenz von periodischen Lösungen um die äquilateralen Librationszentra ist im Falle (59) im Rahmen des Störungsprinzips durchaus unverständlich. — *Woher* kommen dann aber diese numerisch gefundenen periodischen Lösungen? Diese Frage will ich hier beantworten.

Bei den analytischen Gesamtheiten von periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems hat man im allgemeinen zwei Parameter, nämlich den Massenprozentsatz $\mu$ und die Jacobische Konstante $C$, welche die Periode sowie die linearen Dimensionen der Bahn, wenn auch nicht für die ganze (bei festem $\mu$ einparametrige) Schar „im großen", so doch wenigstens „im kleinen" eindeutig bestimmt, indem eben $C$ (bei festem $\mu$) der Scharparameter ist. Ich habe kürzlich diese zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von periodischen Lösungen auf die Punkte einer Bildebene $(\xi, \eta)$ eindeutig bezogen, und zwar wie folgt[21]). Es bezeichne $\eta$ (also die „vertikale" „Ordinate") den Wert derjenigen der beiden Parameter $\mu, C$ einer fest gewählten periodischen Bahn aus $\mathfrak{M}$, der als der „störende", „kleine" Parameter aufgefaßt werden soll, so daß also die „horizontale" $\xi$-Achse diejenigen Punkte enthält, welche die Bahnen des „ungestörten", d. h. zu dem Nullwert des Störungsparameters $\eta$ gehörigen Problems darstellen, so daß also $\xi$ der Parameter dieser ungestörten (einparametrigen) Schar von periodischen Lösungen ist.

Das Störungsprinzip besteht nun im folgenden. Man konstruiert bei einem *festen* Werte $\xi_0$ von $\xi$ im Punkte $\xi = \xi_0$ ein „Lot" auf die $\xi$-Achse, indem man für „hinreichend kleine" Werte des Störungsparameters $\eta > 0$ durch eine der verschiedenen analytischen Anschmiegungsmethoden die Existenz eines zu einem und demselben Werte $\xi_0$ von $\xi$ gehörigen, für $\eta \to 0$ in die ungestörte periodische Ausgangslösung $\xi = \xi_0$, $\eta = 0$ übergehenden reellen Schar von periodischen Lösungen beweist (sofern $\xi_0$, wie es sich von selbst versteht, aber einmal ausdrücklich erwähnt werden soll, überhaupt derart ist, daß die genannte Störungsrechnung durchgeführt werden kann, d. h. daß das „Lot" eine von Null verschiedene Länge hat). Macht man das bei jedem $\xi = \xi_0$, so erhält man eine zweidimensionale

[21]) Vgl. A. Wintner, a. a. O. [9]), S. 31—39.

Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ von reellen periodischen Lösungen. Diese Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ ist aber nur eine Teilmenge der oben (S. 657) definierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, die *ganze* Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ läßt sich also nicht bereits im Rahmen des Störungsprinzips konstruieren. Dem Numeriker ist dieser Sachverhalt in einem anderen Gewande seit langem bekannt. Ich bin dazu loc. cit. durch rein theoretische Erwägungen geführt worden und habe dann bei den Strömgrenschen Gruppen f, g, l, m eine vollständige Übereinstimmung gefunden einerseits mit den Prinzipien und andererseits mit den numerischen Ergebnissen der Kopenhagener Rechnungen. Grob gesagt handelt es sich darum, daß man durch die analytische Fortsetzung einer *ein*parametrigen Schar von analytischen Funktionen *einer* Variable die Funktion des Variablen*paares* nicht in ihrem ganzen in Betracht kommenden Existenzbereiche $\mathfrak{M}$ restlos erhalten kann: durch das „vertikale" Fortschreiten, d. h. durch das Störungsprinzip können die Punkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ noch nicht „erreicht" werden. Andererseits hat aber astronomisch nur ein „horizontales" Fortschreiten, d. h. eine „Gruppe" von periodischen Lösungen einen Sinn. Nun kann man unter Umständen jeden Punkt *eines hinreichend kleinen Stückes* $\Sigma$ einer horizontalen Geraden $G$ auch „vertikal", d. h. im Rahmen des Störungsprinzips erreichen, aber die „Gruppe" entwickelt sich dann „horizontal", d. h. entlang $G$, durch analytische Fortsetzung selbständig weiter, und die so gewonnene Verlängerung von $\Sigma$ ragt aus $\mathfrak{N}$ hinaus, bis sie den Rand von $\mathfrak{M}$ erreicht.

Loc. cit. [21]) war der Massenprozentsatz $\mu$ als der störende Parameter aufzufassen ($\mu = \mathfrak{y}$, $C = \mathfrak{x}$), da es sich um die Gruppen f, g, l, m handelte. Bei den fünf Librationsgruppen a, b, c, d, e der Strömgrenschen Gruppeneinteilung ist aber, wie oben (S. 657) betont wurde, die Jacobische Konstante $C$ (oder eigentlich ihre Abweichung $C - C_0$ von ihrem ungestörten Werte $C_0$) der „störende" Parameter ($\mu = \mathfrak{x}$, $C = \mathfrak{y}$); für $\mu = 0$ gibt es übrigens überhaupt keinen Librationspunkt. Der „störende" Parameter $\mathfrak{y} = C - C_0$ von (52) ergibt also über einem passenden Intervall der $\mathfrak{x}$-Achse (d. i. die $\mu$-Achse) ein Stück $\Sigma$ der Geraden $G$, wenn auch die Entfernung $C - C_0$ von $G$ von der $\mathfrak{x}$-Achse passend gewählt wird. Dieses horizontale Stück $\Sigma$ liegt jedenfalls links von der vertikalen Geraden $\mathfrak{x} = \mu_0 = 0{,}0385\ldots$, da eine Störungsrechnung im Falle (59) unmöglich ist (S. 657). Nimmt man aber an, daß $\Sigma$ verlängert werden kann, so daß die Verlängerung die vertikale Grenzgerade $\mathfrak{x} = 0{,}0385\ldots$ der Störungsrechnung durchschneidet und so durch horizontale analytische Fortsetzung, d. h. bei festem $C$ als Funktion von $\mu$ aufgefaßt, in den Streifen (59) hineinragt, so erhält man nichtinfinitesimale, d. h. durch die Störungsrechnung nicht erreichbare periodische Bahnen um den äquilateralen Librationspunkt, deren Existenz also durch die charakteristischen Exponenten nicht angezeigt werden konnte.

die aber dennoch den Gruppen d, e der Strömgrenschen Klassifizierung [22]) angehören, da sie doch analytische Fortsetzungen dieser bisher stets nur für $\mu < \mu_0$ als existierend betrachteten äquilateralen Librationsgruppen sind. Daß dies für *alle* nichtinfinitesimalen Strömgrenschen Bahnen gilt, will ich nicht behaupten; die Figuren würden sogar zulassen, daß es unendlich viele verschiedene nichtinfinitesimale Gruppen gibt, die irgendwie immer höher werdenden Kommensurabilitäten entsprechen. Ebensogut könnten sie aber dennoch ausnahmslos zu den Gruppen d, e gehören, die dann also zu zunächst immer komplizierter werdenden Bahnen führen müßten. — Daß aber z. B. die nichtinfinitesimalen Bahnen, zu denen die beiden Bahnen $\eta_0 = 1{,}74510\ldots$ und $\eta_0 = 1{,}7200\ldots$ von Herrn Strömgren [23]) Grenzbahnen sind, in dem oben festgelegten Sinne der Gruppe d angehören, halte ich für sicher.

Übrigens haben wir bei einem jeden der beiden äquilateralen Librationszentren nicht nur eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$, sondern sogar zwei: $\mathfrak{N}^{[1]}$, $\mathfrak{N}^{[2]}$ [vgl. (50), (51), (51)′, (55)], entsprechend den beiden Perioden

$$(61)\qquad \begin{aligned} T^{[1]} &= \frac{2\pi}{\left|\sqrt{\tfrac{1}{2}\{-1+\sqrt{(1-27\mu(1-\mu))}\}}\right|} + \mathfrak{P}_\mu^{[1]}(\sqrt{C-C_0});\ \mathfrak{P}_\mu^{[1]}(0)=0,\\ T^{[2]} &= \frac{2\pi}{\left|\sqrt{\tfrac{1}{2}\{-1-\sqrt{(1-27\mu(1-\mu))}\}}\right|} + \mathfrak{P}_\mu^{[2]}(\sqrt{C-C_0});\ \mathfrak{P}_\mu^{[2]}(0)=0, \end{aligned}$$

wobei, da es sich um die $\mathfrak{N}$ handelt, (54) natürlich vorausgesetzt werden muß; entsprechend gibt es aber auch zwei vollständige Mannigfaltigkeiten: $\mathfrak{M}^{[1]}$, $\mathfrak{M}^{[2]}$. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}^{[2]}$ ist dabei eventuell (vgl. S. 646) durch die Lote $\mu = \mu_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche in den Kommensurabilitätsstellen (58) auf der $\mu$-Achse senkrecht stehen, in unendlich viele, sich nur an der Ordinatenachse $\mu = 0\,(= \lim \mu_n)$ häufende Stücke zerlegt, so daß die Punkte $\mu_n$ der $\mu$-Achse für $\mathfrak{N}^{[2]}$ (aber nicht für $\mathfrak{N}^{[1]}$) wieder [vgl. loc. cit. [9]) Fig. 1] „Lückenzentra" werden könnten. Tatsächlich steht aber nur so viel fest, daß der Hornsche allgemeine Existenzsatz die Existenz von periodischen Lösungen, die auf den Loten $\mu = \mu_n$ von $\mathfrak{N}^{[2]}$ liegen, nicht ergibt, und bis auf eine mühsame explizite Diskussion der Verzweigungsgleichungen bleibt die Möglichkeit bestehen, daß solche periodische Lösungen dennoch existieren, daß also den Kommensurabilitätsgeraden $\mu = \mu_n$ von $\mathfrak{N}^{[2]}$ keine reale Bedeutung zukommt. So viel ist jedenfalls gewiß, daß die beiden Scharen bei keinem $\mu$ identisch sind. Für $\mu \neq \mu_n$ folgt dies aus einer auf S. 645 gemachten Bemerkung. Andererseits sind die $\mu_n$ dadurch definiert (S. 655), daß, wenn gemäß (61)

$$T^{(\nu)} = T^{(\nu)}(\mu, C) \qquad (\nu = 1, 2)$$

[22]) E. Strömgren, Publ. fra Köbenhavns Observ Nr. 39 (1922).

[23]) E. Strömgren, a. a. O. [1]), Fig. 7—8.

gesetzt ist, der Quotient

$$\frac{T^{[2]}}{T^{[1]}} = \frac{T^{[2]}(\mu; C_0)}{T^{[1]}(\mu; C_0)}, \tag{62}$$

der (wegen $\alpha < \beta$; vgl. S. 655) jedenfalls $> 1$ ist, für $\mu = \mu_n$ gleich eine ganzen Zahl $k_n > 1$ w rd. Auch wenn also beide Scharen auch für $\mu = \mu$ existieren sollten, können sie für $\mu = \mu_n$ nicht zusammenfallen, da $T^{[1]}(\mu; C_0$ jedenfalls die *primitive* erzeugende (d. h. zu $C \to C_0$ gehörige) Periode de *gewiß* existierenden Schar ist. Wäre aber nicht der Quotient (62), sonder sein reziproker Wert gleich $k_n$ (was unmöglich ist. da (62) gewiß $>$ sein muß), so wäre freilich diese Schlußweise nicht anwendbar, da es denk bar wäre, daß die *primitive* erzeugende Periode der *hypothetischen* Scha nicht $\lim_{\mu \to \mu_n} T^{[2]}(\mu; C_0)$, sondern $k_n$-mal kleiner, also gleich $T^{[1]}(\mu; C_0)$ ist

Es sei noch bemerkt, daß, wie man leicht nachrechnet, die beide Potenzreihen $\mathfrak{P}$ in (61) bei keinem $\mu$ identisch verschwinden (so daß di Periode von der Jacobischen Konstante, d. h. von dem Scharparamete nicht unabhängig sein kann), daß also gewisse vergleichende Betrachtunge von Herrn Charlier[24]) auf einem prinzipiellen Mißverständnis beruhen, inde dabei eine Näherungslösung mit einer exakten Lösung verglichen wird.

Es sei noch auf den folgenden Umstand hingewiesen, der in de Literatur nirgends erwähnt ist: Bei den äquilateralen Librationszentre sind die charakteristischen Exponenten für $\mu = \mu_0$ nicht nur einande paarweise gleich, es sind vielmehr auch die Elementarteiler mehrfach, d. h die allgemeine Lösung der Variationsgleichungen wird säkular (nicht abe für $\mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$ oder im Falle der kollinearen Librationszentr bei irgendeinem $\mu$; in allen drei Fällen sind nämlich sogar die charakte ristischen Exponenten durchweg einfach). Daß die Elementarteiler fü $\mu = \mu_0$ im Falle der äquilateralen Librationspunkte mehrfach werden, kan man aus (35)', (53), (55), (56) sofort berechnen, wenn man beachte daß das Quadrat eines jeden der vier charakteristischen Exponenten gleic $-\frac{1}{2}$ ist, so daß das Eckenelement $\omega_n^2 - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$, also $\neq 0$ wird. Doc leuchtet die Sache auch anschaulich ein. Für $\mu < \mu_0$ besteht nämlich di allgemeine Lösung der Variationsgleichungen aus der Superposition von zw einparametrigen Ellipsenscharen [deren jede mit Rücksicht auf die Willkü lichkeit der Epoche in Wirklichkeit zwei Integrationskonstanten enthält die aber für $\mu \to \mu_0$ zusammenfallen, und da es (mit Rücksicht darau daß die charakteristischen Exponenten auch noch für $\mu = \mu_0$ rein imaginä sind und erst für $\mu > \mu_0$ einen von Null verschiedenen Realteil bekomme d. h. labil werden) für $\mu = \mu_0$ keine asymptotischen Terme geben kan

[24]) C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Zweite, durchgesehene Auflag Bd. 2 (1927), S. 163.

so müssen dabei die beiden fehlenden Integrationskonstanten zu säkularen (nämlich in $t$ linearen) Faktoren in der allgemeinen Lösung der Variationsgleichungen gehören[24a]).

## § 5.

## Exkurs über die Realitätsverhältnisse.

Im Falle (59) sind alle vier charakteristischen Exponenten (52) labil, d. h. nicht rein imaginär, sie sind aber auch nicht reell, so daß die asymptotischen Untersuchungen von Poincaré und Liapounoff, bei welchen die erste Näherung durch eine Diagonalmatrix geliefert werden muß, versagen, sofern man die Existenz einer *reellen* asymptotischen Schar sicherstellen will. Die Diagonalgestalt kann nämlich nur durch eine nicht reelle Substitution erreicht werden, und die Diagonalmatrix ist dann nicht reell. An sich könnten sich diese beiden Umstände kompensieren, aber ein Nachweis dafür ist genau die Hauptschwierigkeit. Eben aus diesem Grunde haben wir im Rahmen der Hornschen Untersuchungen oben nicht eine Diagonalmatrix als Normalform benutzt, da eine solche komplex gewesen wäre (vgl. S. 653), sondern eine zwar nicht diagonale, aber reelle Normalform (15); vgl. übrigens die Einleitung. — Analog liegen die Verhältnisse bei den kollinearen Librationspunkten; denn dort sind zwar zwei labile charakteristische Exponenten reell, die beiden anderen aber stabil, d. h. rein imaginär. Die Existenz von reellen asymptotischen Lösungen kann also aus den Untersuchungen von Poincaré und Liapounoff weder für die kollinearen ($0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$) noch für die äquilateralen ($\mu_0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$) Librationszentra geschlossen werden, man müßte vielmehr zu diesem Zwecke wieder nichtdiagonale (also sich den Poincaré-Liapounoffschen Sätzen entziehende) *reelle* Normalformen zugrunde legen.

Daß es sich dabei um eine ganz ernste Schwierigkeit handelt, daß also in den in der Einleitung genannten Untersuchungen der Moultonschen Schule tatsächlich eben der springende Punkt übersehen wird, erkennt man am besten, wenn man die Verhältnisse bei dem klassischen Falle $(24)_1$ eines konservativen Oszillators in Betracht zieht und sich daran erinnert, daß die Existenz einer *reellen* Poincaré-Liapounoffschen asymptotischen Lösung für die Dirichletsche Labilität des Gleichgewichtes jedenfalls hinreicht. — Nimmt man an, daß in $(24)_1$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1$, $\lambda_2$ der Matrix (26) positiv sind, so sind die vier Eigenwerte (38) der

[24a]) Die zu $\mu > \mu_0$ gehörigen infinitesimalen Lösungen, die aus der Superposition von zwei einparametrigen Spiralenscharen bestehen und für $\mu \to \mu_0$ ebenfalls in die zu $\mu = \mu_0$ gehörige Grenzellipsenschar übergehen, sind von E. Strömgren gefunden und des näheren untersucht worden [Publ. fra Københavns Observ. Nr. 70 (1930) und Astr. Nachr.].

Matrix $(31)_1$ reell, man kann daher auf die Existenz von reellen Poincaré-Liapounoffschen asymptotischen Lösungen, also erst recht auf die Dirichletsche Labilität der Gleichgewichtslage schließen; dies ist eben der Liapounoffsche Labilitätsbeweis[19]) für $(24)_1$ im Falle $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Würde man nun, analog zu den Untersuchungen von Herrn Moulton und seiner Nachfolger, dieselbe Schlußweise auch im Falle $(24)_2$ anwenden, *ohne* dabei auf die *Realitätsverhältnisse* Rücksicht zu nehmen, so würde sich ein geradezu widersinniges Resultat ergeben; vgl. S. 663 weiter unten.

Die sich auf die Arbeiten der Herren Moulton, Buck, Warren und Buchanan beziehenden Bemerkungen der Einleitung (S. 643) sind also wohl vollständig gerechtfertigt: in den genannten Arbeiten ist konsequenterweise eben der springende Punkt übersehen und nicht behandelt. [Daß die *bisher* berechneten Näherungsglieder der *unendlichen* Fourierreihen reell herausgekommen sind, ist doch noch kein Beweis, in diesem Sinne wäre ja jeder (auch komplexe) Existenzbeweis von vornherein überflüssig.]

Mit den Untersuchungen von Herrn Moulton und seiner Schule steht es also folgendermaßen. Es wird eine komplexe lineare Substitution vorgenommen, welche die Glieder niedrigster Ordnung auf die Hauptachsengestalt bringt, aber natürlich *auch die nichtlinearen Terme transformiert*, und so ist es im voraus gar nicht abzusehen, ob die auf diese Weise gefundene Lösung — trotzdem es keine Verzweigungsgleichungen gibt — nach Übergang zu den alten (reellen) Koordinaten nicht komplex bleibt. Daß dem nicht so ist, könnte, wie man mit trivialen Gegenbeispielen belegen kann, überhaupt nur unter wesentlicher Ausnutzung der Eigenschaften der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen verifiziert werden. Eine solche Verifikation ist aber in den genannten Arbeiten der Herren Moulton, Buck, Warren und Buchanan nicht zu finden.

## § 6.

### Coriolissche Oszillatoren mit einem Maximum der Kräftefunktion.

Die Kräftefunktion hat — bei jedem $\mu$ — in den beiden äquilateralen Librationspunkten ein Minimum, in den drei kollinearen Librationspunkten einen Sattelpunkt (vgl. S. 649), also, da ein Extremum mit Rücksicht auf die Definition des Librationspunktes (vgl. S. 650) nur in einem Librationspunkt möglich ist, überhaupt kein Maximum, da sie dort, wo sie ihr Maximum annehmen würde, unendlich wird [das ist der Fall in den beiden Massen (Gravitation) sowie im räumlichen Unendlichen (Zentrifugalfeld)]. Der Vollständigkeit halber wollen wir dennoch auch den Fall betrachten, daß $\Omega$ in der Gleichgewichtslage (22) des Coriolisschen Oszillators $(24)_2$ ein Maximum besitzt, und bemerken zunächst, daß die Formeln von § 2

bis zur Formel (40) von der mit (27) äquivalenten Annahme (28) ganz unabhängig sind. Wir nehmen wieder an, daß die Determinante der Hesseschen Matrix (26) nicht verschwindet, daß also die Matrix negativ definit ist (da ja für $\Omega$ ein Maximum vorliegen soll):

$$(27)' \qquad r < 0, \quad \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{(also auch } t < 0),$$

was mit Rücksicht auf (29) auf

$$(28)' \qquad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$$

hinausläuft. Die vier charakteristischen Exponenten (40) können bei passenden $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ offenbar rein imaginär werden, und zwar sind dann entweder alle vier rein imaginär, oder ein Paar ist rein imaginär, das andere Paar aber von einem von Null verschiedenen Realteil. Der erste Fall behandelt sich genau so wie in § 2, der zweite genau so wie in § 7. Übrigens braucht man die beiden semidefiniten Fälle

$$\lambda_1 \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

bzw.

$$\lambda_1 \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 < 0$$

gar nicht auszuschließen.

Es sei noch bemerkt, daß im Falle $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, wie auf S. 649 betont wurde, nicht nur für $(24)_1$, sondern auch für $(24)_2$ Dirichletsche Stabilität vorhanden ist, trotzdem die charakteristischen Exponenten (40) einen von Null verschiedenen Realteil haben (also Poincaré-Liapounoffsche Scharen von asymptotischen Lösungen vorhanden sein können), woraus aber die Dirichletsche Labilität geschlossen werden kann (vgl. § 5), *wenn* man, wie das Herr Moulton und seine Nachfolger tun, von der *Realität* der Scharen absieht — während doch die Dirichletsche Stabilität, wie gesagt, trivial ist: wegen des eigentlichen Maximums gibt es eine auf die Gleichgewichtslage zusammenschrumpfende Schar von kreisähnlichen Hillschen Nullgeschwindigkeitskurven, deren Außengebiet verboten ist (im Falle eines eigentlichen Maximums, also z. B. bei den äquilateralen Librationspunkten, und zwar sowohl für $\mu < \mu_0$ als auch für $\mu \geqq \mu_0$, ist hingegen das Innengebiet verboten). — Es ist also in dem von Herrn Carathéodory präzisierten Sinne von Poincaré auch eine Poissonsche Stabilität vorhanden, da auch eine definite Integralinvariante existiert.

* * *

Zum Schluß will ich noch auf ein Problem bei dem konservativen Oszillator $(24)_1$ im Falle $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ hinweisen. Wir haben Dirichletsche und Poissonsche Stabilität, ferner Stabilität im Sinne der Variationsgleichungen $(32)_1$, da die vier charakteristischen Exponenten (38) rein

imaginär und von Null (und, sofern $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, auch voneinander) verschieden, nämlich gleich $\pm i\alpha$, $\pm i\beta$ sind, wenn $\alpha = \sqrt{-\lambda_1} > 0$ $\beta = \sqrt{-\lambda_2} > 0$ gesetzt wird. Es gibt also nach dem Hornschen Satz von § 1 (vgl. Horn l. c.) ein oder zwei lineare Scharen von periodischen Lösungen mit den erzeugenden Perioden

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda_1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda_2}} \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

je nachdem $\sqrt{-\lambda_1}$, $\sqrt{-\lambda_2}$ in dem Module einer und derselben Zahl liegen oder nicht. Wir setzen voraus, daß $\sqrt{-\lambda_1}$ und $\sqrt{-\lambda_2}$ sogar linear unabhängig, d. h. inkommensurabel sind, so daß es jedenfalls zwei lineare Scharen gibt. Gibt es aber eine zweiparametrige Schar, genauer: gibt es eine nicht periodische Lösung, die in eine zweifache trigonometrische Reihe mit den Argumenten

$$(\nu_1\sqrt{-\lambda_1} + \nu_2\sqrt{-\lambda_2})\,t \qquad (\nu_1, \nu_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

entwickelt werden kann? Daß solche „Linstedtschen" Reihen formal ausgerechnet werden können, ist bekannt[25]). Sind sie aber für *alle* $t$ konvergent und stellen sie, wie es mit Rücksicht auf die Dirichletsche und Poissonsche Stabilität (die doch da sind) zu erwarten wäre, eine Bohrsche fastperiodische Funktion dar? Dem Beweise stehen die dem Astronomen wohlbekannten diophantischen Divisoren im Wege. Unter Umständen, z. B. wenn die zugehörige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung durch Einführung passender Koordinaten separiert werden kann, ist freilich die bejahende Antwort trivial.

## § 7.

## Coriolissche Oszillatoren mit einem („eigentlichen") Sattelpunkt der Kräftefunktion.

Es habe nun endlich die Potentialfläche $z = \Omega$ im Punkte (20) einen Sattelpunkt, wobei wir der Einfachheit halber wieder voraussetzen, daß die Determinante der Hesseschen Matrix (26) nicht verschwindet, daß also

$$(27)'' \qquad rt < 0,$$

oder nach (29) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, d. h.

$$(63) \qquad \text{entweder} \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \text{oder} \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$$

gilt, mit anderen Worten, daß (26) indefinit ist. Da die Formeln von § 2, wie schon erwähnt, bis zur Formel (40) von der Annahme (28) durchaus unabhängig sind, so folgt zunächst, daß das System der vier charakteristischen Exponenten (40) der Variationsgleichungen $(32)_2$ wegen (63)

[25]) J. Horn, Journ. für reine u. angew. Math. **126** (1903), S. 219 ff.; vgl. auch A. Wintner, Math. Annalen **96** (1926), S. 284 ff.

aus einem rein imaginären, von Null verschiedenen (also konjugierten) Paar und außerdem aus zwei Zahlen mit von Null verschiedenem Realteil besteht, und zwar ist es trivial, daß diese beiden „labilen" charakteristischen Exponenten reell, daß also die vier charakteristischen Exponenten von der Gestalt

$$\omega_1 = i\alpha, \quad \omega_2 = -i\alpha, \quad \omega_3 = \gamma, \quad \omega_4 = -\gamma \qquad (\alpha > 0,\ \gamma > 0), \tag{64}$$

mithin (nicht nur von Null, sondern auch) voneinander verschieden sind und daher die Matrix $(31)_2$ der in der Gestalt (33), (34) geschriebenen Variationsgleichungen $(32)_2$ in eine Diagonalmatrix transformiert werden kann, deren Diagonalelemente die Eigenwerte (64) von $(31)_2$ sind. Eine Transformation, welche dies leisten kann, muß aber, da $(32)_2$ reell und (64) komplex ist, komplex sein. Hingegen gibt es eine reelle Transformation, durch welche $(32)_2$ in die zwar nicht diagonale, aber reelle Normalform

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{matrix} \right\| \qquad (\alpha > 0,\ \gamma > 0) \tag{65}$$

übergeführt wird, es gibt also eine reelle Transformation (46), (33)′ [vgl. S. 653] derart, daß $(24)_2$ in

$$\dot{x}_1 = \alpha x_2 + \Phi_1, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_1 + \Phi_2, \quad \dot{x}_3 = \gamma x_3 + \Phi_3, \quad \dot{x}_4 = -\gamma x_4 + \Phi_4 \qquad (\alpha > 0,\ \gamma > 0) \tag{66}$$

und (25) in

$$\Phi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{67}$$

übergeht, wobei die fünf $\Phi$ reelle, in der Umgebung von (1) in den vier $x_\nu$ reguläre Potenzreihen sind, derart, daß in $\Phi_0$ die linearen Glieder wegen (21) fehlen und die übrigen vier $\Phi$ weder konstante noch lineare Glieder enthalten.

Herr Horn[15]) hat nun u. a. bewiesen, daß eine periodische Schar (7) auch für jedes Differentialsystem (66) existiert, sofern es nur ein Integral (67) gibt, welches gewissen Zusatzforderungen genügt, die aber in unserem Falle, ebenso wie in § 1, von selbst erfüllt sind, indem (10) offenbar auch jetzt gilt. So können wir in (7), (8) wieder den Scharparameter $\sqrt{C - C_0} > 0$ einführen, wobei $C_0$ den zu der Gleichgewichtslösung gehörigen Wert der Integralkonstante (67) bedeutet. — Alles in allem gilt daher der folgende

Satz. Die in der Umgebung des Punktes $x = y = 0$ der reellen Ebene reelle Funktion $\Omega(x, y)$ genüge den Bedingungen

$$\Omega_x(0, 0) = 0, \quad \Omega_y(0, 0) = 0, \quad \Omega_{xx}(0, 0) \cdot \Omega_{yy}(0, 0) < 0, \tag{68}$$

so daß $x = y = 0$ eine Gleichgewichtslösung von (48) ist. Die charakteristischen Exponenten der Gleichgewichtslösung sind dann von Null ver-

schieden, ein Paar ist rein imaginär, das andere Paar aber labil, und zwar reell, die vier charakteristischen Exponenten sind also von der Gestalt $\pm i\alpha,\ \pm\gamma;\ \alpha>0,\ \gamma>0$. Bezeichnet nun $C_0$ den zu der Gleichgewichtslösung gehörigen Energiewert, so gibt es für hinreichend kleine $C-C_0$ eine nach der Periode

$$T_C=\frac{2\pi}{\alpha}+\mathfrak{P}(\sqrt{C-C_0}) \qquad (\mathfrak{P}(0)=0) \tag{69}$$

periodische reelle einparametrige Schar

$$x=x(t;\sqrt{C-C_0}),\quad y=y(t;\sqrt{C-C_0}) \tag{70}$$

von Lösungen, die für $C\to C_0$ in die Gleichgewichtslösung übergehen.

## § 8.

## Anwendung auf die Strömgrenschen Gruppen a, b, c. Der Hillsche Grenzfall.

Man wähle nun zu $\Omega$ die Summe der Gravitations- und Zentrifugalpotentiale des restringierten Dreikörperproblems, zur $x$-Achse die Syzigienachse, zum Nullpunkt $x=y=0$ des Achsenkreuzes also einen der drei kollinearen Librationspunkte. Nach Herrn Plummer[30]) hat dann $\Omega(x,y)$ im Punkte $x=y=0$ einen „eigentlichen" Sattelpunkt, d. h. (68) ist erfüllt und die beiden nicht rein imaginären charakteristischen Exponenten sind reell. Gleichung (68), also dies alles, gilt in einem jeden der drei kollinearen Librationspunkte und bei jedem Werte des Massenprozentsatzes. Mit Rücksicht auf den Satz des vorigen Paragraphen ist also die Existenz der kollinearen Librationen ganz allgemein bewiesen, allerdings nur für hinreichend kleine Werte von $C-C_0$, während die Kopenhagener Untersuchungen numerisch zu einer Erledigung des „Problems im großen" geführt haben (für $\mu=\frac{1}{2}$ sind nämlich unsere drei kollinearen Librationsscharen mit den Kopenhagener[22]) numerischen Gruppen a, b, c zu identifizieren). — Ich habe einmal eine Methode entwickelt, welche bei einem analogen Gruppenproblem die mathematische Begründung numerischer Ergebnisse auch bei dem „Problem im großen" gestattet hatte[26]), und vermutet[27]), daß dieselben Schlüsse auch bei den Librationsgruppen zum Ziele führen werden. Dies ist tatsächlich der Fall; doch soll das in einem anderen Zusammenhang gezeigt werden[28]).

* * *

---

[26]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 430–450.

[27]) a. a. O. [26]), S. 431.

[28]) Wegen des „natürlichen Abschlusses" der Gruppe a bzw. b vgl. die numerischen Ergebnisse von E. Strömgren, Publ. fra Köbenhavns Observ. Nr. 63 (1929) über c vgl. Nr. 60 (1928) [= J. P. Möller, Astr. Nachr. 233, S. 81 ff.].

Da die drei kollinearen Punkte voneinander durch die beiden Massen getrennt sind und die beiden äquilateralen Punkte mit den beiden Massen je ein gleichseitiges Dreieck bilden, so ist es vorauszusehen, daß in dem Hillschen Grenzfalle des restringierten Dreikörperproblems, wo doch die Parallaxe gleich Null gesetzt ist, die beiden äquilateralen und zwei kollineare Punkte verloren gehen. In der Tat ergibt sich für die Hillschen Bewegungsgleichungen[18])

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_\xi(\xi, \eta), \qquad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_\eta(\xi, \eta); \qquad \Omega(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \frac{3}{2}\xi^2$$

durch den Gleichgewichtsansatz

$$\xi(t) \equiv \text{konst.}, \qquad \eta(t) \equiv \text{Konst.}$$

nur eine einzige Lösung, nämlich

$$\xi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \qquad \eta(t) \equiv 0.$$

Auf diesen (einzigen) Librationspunkt ist aber der Satz von § 7 ohne weiteres anwendbar, wenn man

$$\xi = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + x, \qquad \eta = y; \qquad \Omega(\xi, \eta) = \Omega(x, y)$$

setzt. Die zu der Gleichgewichtslösung gehörigen Variationsgleichungen sind nämlich wegen

$$\Omega_{xx}(0, 0) = 9, \qquad \Omega_{xy}(0, 0) = 0, \qquad \Omega_{yy}(0, 0) = -3 \tag{68)'}$$
$$(\Omega_{xx}(0, 0) \cdot \Omega_{yy}(0, 0) < 0)$$

offenbar

$$\ddot{x}^* - 2\dot{y}^* = 9x^*, \qquad \ddot{y}^* + 2\dot{x}^* = -3y^*,$$

mit der Säkulargleichung

$$0 = \begin{vmatrix} \omega^2 - 9 & -2\omega \\ 2\omega & \omega^2 + 3 \end{vmatrix} \equiv \omega^4 - 2\omega^2 + 27.$$

Da (68) nach (68)′ erfüllt ist, so existiert nach § 7 die lineare Schar gewiß.

Kopenhagen, den 17. Mai 1930.

(Eingegangen am 19. Mai 1930.)

# Über die v. Haerdtlsche Bahn.

Von

Aurel Wintner in Leipzig, z. Z.*) in Kopenhagen.

Die E. Strömgrenschen numerischen Untersuchungen[1]) über die periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems im Falle gleicher Massen ($\mu = \frac{1}{2}$) haben die genealogische Stellung der bekanntlich nicht exakt periodischen und ebenfalls zu gleichen Massen gehörigen v. Haerdtlschen Bahn[2]) völlig aufgeklärt, indem sich durch geringfügige Abänderung der Integrationskonstanten der v. Haerdtlschen Bahn eine periodische Bahn ergeben hat, welche die unmittelbare analytische Fortsetzung der auf den Fall gleicher Massen ($\mu = \frac{1}{2}$) übertragenen[3]) Darwinschen ($\mu = \frac{10}{11}$) satellites[4]) B, C ist, die ihrerseits aus den (bei Beibehaltung der Parallaxe den Hillschen Variationskurven, d. h. Mondbahnen entsprechenden) Darwinschen planets A durch analytische Fortsetzung nach dem Scharparameter $K$ (= Jacobische Konstante) der linearen Schar entstehen [Gruppe[5]) g]. Die v. Haerdtlsche Bahn ist nur während ihrer beiden ersten „Umläufe" derart, daß sie beidemal ungefähr dieselbe Kurve beschreibt, und scheint nach dem zweiten

*) Fellow of the Rockefeller Foundation.

[1]) Wegen der Kopenhagener Untersuchungen sei ein für allemal verwiesen auf das mit Figuren versehene Referat von E. Strömgren, Verh. d. 5. skand. Math.-Kongr. (1922) in Helsingfors [auch Publ. Köbenhavns Observ. Nr. 39]. — Im nachstehenden handelt es sich nur um die Gruppe g. Mathematische Ausführungen zur Gruppe g, die fortgesetzt werden sollen, findet man in einer kürzlich erschienenen Arbeit von mir, Sitzungsber. d. sächs. Akad. zu Leipzig, 1930, S. 2–56.

[2]) E. Frhr. v. Haerdtl, Abh. d. bayer. Akad. d. Wiss., II. Klasse, 17 (1891), Abt. III.

[3]) Vgl. die von J. Fischer-Petersen veröffentlichten Ausführungen von E. Strömgren in Publ. Köbenhavns Observ. Nr. 27, S. 20ff. [Sonderheft des „Sirius", 1917], sowie loc. cit. [1]), ferner meine Bemerkungen zu einem Satz von G. Herglotz [Seeliger-Festschrift, 1924, S. 197–199], loc. cit. [1]).

[4]) G. H. Darwin, Scientific Papers 4 (1911), S. 1ff.

[5]) Vgl. S. 34, 45ff. meiner unter [1]) erwähnten Arbeit.

„Umlauf“ — wenigstens soweit sie von v. Haerdtl numerisch verfolgt worden ist — ins Unendliche gerichtet zu sein[6]). Beweist man aber, daß die Bahn am Anfang ($t = 0$) der Rechnung im Innern einer Hillschen Grenzkurve liegt[7]), die zu der Jacobischen Konstante der Bahn gehört und bei welcher — im Gegensatz zu den die äquilateralen Librationspunkte umschließenden Nullgeschwindigkeitskurven — das *Außen*gebiet das verbotene Gebiet ist, so ist man gewiß, daß die Bahn für alle $t$ ganz im Endlichen verlaufen wird. Hierfür ist die Existenz der Grenzkurve allerdings nur eine hinreichende Bedingung, da es sogar periodische, also gewiß beschränkt bleibende Lösungen ohne eine Grenzkurve gibt[8]). Dennoch hat die Existenz einer Grenzkurve eine prinzipielle Bedeutung, und zwar auch bei numerischen Rechnungen. Denn einerseits können wir die Beschränktheit von nicht im Sinne der Präzisionsmathematik periodischen Lösungen zur Zeit nur auf diesem Wege beweisen. Andererseits kann eine numerisch gefundene periodische, d. h. sich praktisch schließende Bahn aus dem Gesichtspunkte der Präzisionsmathematik nicht von vornherein periodisch genannt werden, und will man die numerischen Ergebnisse für die Zwecke eines mathematischen Beweises[9]) verwerten, so sind die Schlüsse um so zwingender, je kleiner das Gebiet ist, auf welches die numerisch gefundene Bahn auch im Sinne der Präzisionsmathematik — also etwa unter ausschließlicher Benutzung der Anfangswerte ($t = 0$) usw. — für alle $t$ beschränkt werden kann. — Gleich nach dem Erscheinen der v. Haerdtlschen Rechnungen legte nun Poincaré der Pariser Akademie eine Arbeit von Herrn Coculesco[10]) vor, in welcher bewiesen wird, daß die v. Haerdtlsche Bahn eine Hillsche Nullgeschwindigkeitskurve der genannten Art besitzt.

Dies steht aber mit den eingangs zusammengestellten Strömgrenschen Angaben in einem krassen Widerspruch, auf welchen ich gleich zurückkomme. Entweder ist also die Strömgrensche Bestimmung der genealogischen

---

[6]) Vgl. auch die Figuren bei v. Haerdtl, loc. cit. [2]).

[7]) Über Nullgeschwindigkeitskurven (in elliptischen Koordinaten) bei zwei gleichen Massen vgl. C. Burrau und E. Strömgren, Publ. Köbenhavns Observ. Nr. 21 [Astr. Nachr. **200** (1915)], und allgemein G. H. Darwin, a. a. O. [4]), S. 6 ff., und G. D. Birkhoff, Rend. Palermo **39** (1915), S. 265 ff., § 7.

[8]) Dies ist, an Hand der äquilateralen Librationszentra (wo doch das Gesamtpotential bei jedem $\mu$ ein Minimum besitzt), zuerst von C. Burrau betont worden, Vierteljahrsschr. d. Astr. Ges. **33** (1898), S. 24 [Referat über Darwin [4])].

[9]) Einen solchen habe ich in dem parallaktenlosen Falle der Gruppe g näher ausgeführt in meiner Arbeit Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 430—450. Zu dem konkreten Falle des Erdmondes braucht man aus der Praxis noch gar nichts zu übernehmen, da für den fraglichen numerischen Bereich der Jacobischen Konstante (ohne analytische Fortsetzung) einfach die *Konvergenz* der Hillschen Reihen bewiesen werden kann; siehe Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 211—227.

[10]) Coculesco, Compt. rend. **114** (1892), S. 1339—1341.

Stellung der v. Haerdtlschen Bahn nicht zutreffend, oder die Coculescosche Untersuchung muß ein Versehen enthalten. Der Widerspruch ist nämlich bereits qualitativ so groß, daß die gleichzeitige Richtigkeit beider Angaben von vornherein paradox wäre. Ich habe deshalb die Rechnungen von Herrn Professor Coculesco einer Kontrolle unterzogen und dabei gefunden, daß sie einen Fehler enthalten, so daß von einem Paradoxon keine Rede ist. Zunächst will ich aber andeuten, worin dieses bestehen würde.

Die Darwinschen Bahnen ($\mu = \frac{1}{11}$ bzw. $\frac{10}{11}$) haben keine Nullgeschwindigkeitskurve mit verbotenem Außengebiet (Darwin beschränkte sich sogar grundsätzlich[11]) auf solche Bahnen). Ist also die in den Kopenhagener Untersuchungen gefundene periodische Nachbarin der v. Haerdtlschen Bahn, deren Jacobische Konstante

$$K = 13{,}5984 \tag{1}$$

ist und die von Herrn Strömgren loc. cit.[1]) in Fig. 16 wiedergegeben wird, beim Übergang von $\mu = \frac{1}{2}$ zu $\mu = \frac{10}{11}$ tatsächlich mit einer Bahn der Darwinschen family C zu identifizieren, so ist zu erwarten, daß zu der Bahn (1) keine Nullgeschwindigkeitskurve mit verbotenem Außengebiet gehört, daß also (vgl. weiter unten) dasselbe auch von der eigentlichen v. Haerdtlschen Bahn zutrifft. Nun gehört zu (1) tatsächlich keine Nullgeschwindigkeitskurve der genannten Art; dazu ist nämlich $K$ zu klein, vgl. (4) weiter unten. Aber auch die ganze Entwicklung ist nach Herrn Strömgren derart, daß die Existenz einer Grenzkurve mit verbotenem Außengebiet in diesem fortgeschrittenen Stadium der Gruppe g unmöglich sein muß. Denn noch *vor* der Bahn (1) gibt es in der Gruppe g eine Bahn (loc. cit. [1]), Fig. 14) mit der Jacobischen Konstante

$$K = 11{,}2164, \tag{2}$$

die also noch kleiner als (1) ist, und obwohl $K$ zwischen den beiden Bahnen (2), (1) noch ein Maximum besitzen muß, das an und für sich mit Rücksicht auf die Bahn

$$K = 14.2562 \tag{3}$$

(loc. cit.[1]), Fig. 15) schon hinreichend groß wäre [vgl. (4)], kann man aus dem ganzen Gang der Entwicklung, einfach aus den Figuren, ersehen und auf Grund des unveröffentlichten numerischen Materials, das ich durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Professor Strömgren benutzen konnte, ohne Mühe verifizieren, daß nur die Jacobische Konstante passend ist, daß aber die übrigen Integrationskonstanten in diesem fortgeschrittenen Stadium der Gruppe g derart sind, daß die zu den an sich genug großen Werten der Jacobischen Konstante nur Bahnen gehören, die zur Zeit $t = 0$ nicht in

[11]) Vgl. loc. cit. [4]), S. 53.

dem Innengebiete der Nullgeschwindigkeitskurve liegen, die also gegenstandslos wird; das relative Maximum der Jacobischen Konstante in der Gegend des Wertes (3) zwischen den beiden Bahnen (2), (1) verbindet eben nur die beiden families B, C von Darwin [die von Darwin unter dem schädlichen Einfluß eines Poincaréschen, genealogisch geradezu irreführenden Satzes merkwürdigerweise nicht als *zu einer und derselben*, und zwar *linearen* Schar gehörig aufgefaßt worden sind[12])], entspricht also nur der Darwinschen Bahn[13]) mit der (Darwinschen) ungefähren Jacobischen Konstante $C = 39{,}3$, von welcher die beiden families nach der Poincaré-Darwinschen (grundsätzlich durchaus unzulässigen) Terminologie „abzweigen“[14]). — Aber auch wenn man von diesem Strömgrenschen Rahmen absieht, darf die Bahn (1) offenbar nur dann als eine periodische Nachbarin der nicht periodischen v. Haerdtlschen Bahn bezeichnet werden, wenn entweder beide Bahnen oder keine derselben eine Nullgeschwindigkeitskurve

---

[12]) Vgl. hierzu die Ausführungen von E. Strömgren, a. a. O.[3]) sowie meine erwähnten Bemerkungen[3]) zu dem Herglotzschen Satz, die übrigens ebenfalls durch die beiden, von der Bahn $C = 39{,}3$ abzweigenden Darwinschen families am einfachsten illustriert werden, indem nach den Darwinschen Rechnungen[13]) denjenigen Bahnen der beiden families, welche zu einem und demselben Werte der Jacobischen Konstante gehören, zwei verschiedene Periodenwerte entsprechen. Ein Widerspruch mit dem Herglotzschen Satz liegt aber, wie a. a. O.[5]) bereits erwähnt wurde, nicht vor; es ist vielmehr zu schließen, daß die in den Herglotzschen Beweis eingehenden Pfaffschen Ausdrücke für $C = 39{,}3$ unendlich werden.

[13]) a. a. O.[4]), S. 69—70.

[14]) Es handelt sich um den berühmten Poincaréschen Verzweigungssatz (Méth. nouv. **1**, S. 83), auf welchen Darwin (a. a. O.[4]), S. 41) ausdrücklich Bezug nimmt. In Wirklichkeit ist der Satz völlig inhaltslos (wenigstens in der Poincaréschen Fassung). Denn es kann z. B. jeder innere „Punkt“ innerhalb einer durchaus regulären (verzweigungsfreien) linearen Schar als ein „Verzweigungspunkt“ aufgefaßt werden, von welchem „zwei“ Scharen „abzweigen“. Umgekehrt führt die Poincarésche Terminologie zwangläufig dazu, zwei Scharen, die analytische Fortsetzungen voneinander sind, nicht als solche zu erkennen; vgl. hierüber [5]), [12]). — Endlich ist die Poincarésche Terminologie nicht nur grundsätzlich unzulässig, sondern auch der Beweis des Verzweigungssatzes ist a. a. O. auf eine durchaus inkorrekte Weise geführt: es wird nämlich für selbstverständlich gehalten, daß in der Schar die analytische Fortsetzung („im großen“) so lange jedenfalls möglich ist, als keine neue Verzweigungsgleichung (d. i. eine Schwierigkeit „im kleinen“) auftritt. In Wirklichkeit ist dies aber ein sehr schwieriger Punkt[9]), der allgemein auch heute nicht erledigt ist.

Der Poincarésche Verzweigungssatz würde natürlich noch nicht zu behaupten gestatten, daß es keine (reelle!) isolierte periodische Lösung gibt.

Der Poincarésche Verzweigungssatz liegt dem Poincaréschen Satz über Stabilitätsaustausch (a. a. O. **3**, S. 343 ff.) zugrunde, der also zur Zeit (was das restringierte Dreikörperproblem anlangt) ebenfalls nicht streng bewiesen ist und daher zur Zeit nur als ein — unter Umständen (vgl. a. a. O. **3**, S. 352 ff.) allerdings wertvolles — heuristisches Prinzip in Betracht kommt.

mit verbotenem Außengebiet besitzt; denn die Nullgeschwindigkeitskurven hängen von den Jacobischen Konstanten und diese von den vier zu $t = 0$ vorgeschriebenen Anfangswerten gewiß stetig ab. Da nun die periodische Nachbarin (1) keine Nullgeschwindigkeitskurve der genannten Art hat [indem die Jacobische Konstante zu klein ist; vgl. (4)], so ist sie entweder von Herrn Strömgren fälschlich als die periodische Nachbarin der v. Haerdtlschen Bahn berechnet worden, oder das Coculescosche Resultat, wonach die v. Haerdtlsche eine Nullgeschwindigkeitskurve mit verbotenem Außengebiet besitzt, muß falsch sein. — Die Alternative ist, wie gesagt, im Sinne der zweiterwähnten Möglichkeit zu beantworten. Um dies einzusehen, muß zunächst an den Gang der Schar der Nullgeschwindigkeitskurven erinnert werden[7]).

Ist $K < 11$, so gibt es überhaupt keine Nullgeschwindigkeitskurve, hierfür ist vielmehr $K \geqq 11$ notwendig und hinreichend. Und zwar besteht dann die Nullgeschwindigkeitskurve aus höchstens drei Zweigen, die durchweg geschlossen sind. Damit nun mindestens eine dieser höchstens drei einfach geschlossenen Kurven derart ist, daß ihr *Außen*gebiet das verbotene Gebiet ist, muß $K$ nicht nur $\geqq 11$ sein, sondern auch der Bedingung

$$K \geqq 13{,}8272\ldots \tag{4}$$

genügen; d. h. für

$$13{,}8272\ldots > K \geqq 11 \tag{5}$$

sind (stets geschlossene) Nullgeschwindigkeitskurven zwar vorhanden, sie sind aber derart, daß sie dem Planeten ihr *Innen*gebiet verbieten, also zulassen, daß der Planet mit wachsender Zeit ins Unendliche rückt. — Dabei sind die beiden anziehenden Massen des restringierten Dreikörperproblems einander gleich angenommen ($\mu = \frac{1}{2}$), die Einheiten der Zeit, der Masse und der Länge so gewählt, daß die Bewegungsgleichungen die folgenden sind:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Omega(\xi, \eta), \qquad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\Omega(\xi, \eta), \tag{6}$$

$$\Omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{4}{\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}} + \frac{4}{\sqrt{(\xi+1)^2+\eta^2}}, \tag{7}$$

und $K$ ist durch das Jacobische Integral

$$K = 2\Omega(\xi, \eta) - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2), \tag{8}$$

die Nullgeschwindigkeitskurve durch

$$K = 2\Omega(\xi, \eta), \tag{9}$$

also die *Nullgeschwindigkeitskurve mit verbotenem Außengebiet* durch den Umstand definiert, daß die Funktion $2\Omega(\xi, \eta)$ im Innengebiete des einfach geschlossenen Kurvenzweiges größer ist als auf seinem Rande, d. h. größer

als $K$, so daß also im Falle (5), der für den Beschränktheitsbeweis unbrauchbar ist, stets das Umgekehrte zutrifft.

Ich bemerke noch, daß, wenn das Achsenkreuz $(\xi, \eta)$ durch die Translation

$$\Xi = \xi + a, \quad \mathsf{H} = \eta + b \tag{10}$$

mit $(\Xi, \mathsf{H})$ ersetzt und

$$\omega(\Xi, \mathsf{H}) = \Omega(\xi, \eta) \tag{11}$$

gesetzt wird, (6) einfach in

$$\ddot{\Xi} - 2\dot{\mathsf{H}} = \frac{\partial}{\partial \Xi}\omega(\Xi, \mathsf{H}), \quad \ddot{\mathsf{H}} + 2\dot{\Xi} = \frac{\partial}{\partial \mathsf{H}}\omega(\Xi, \mathsf{H}) \tag{6'}$$

übergeht, also

$$k = 2\omega(\Xi, \mathsf{H}) - (\dot{\Xi}^2 + \dot{\mathsf{H}}^2) \tag{8'}$$

gilt, wobei aber, wegen (11) und da mit Rücksicht auf (10)

$$\dot{\Xi} = \dot{\xi}, \quad \dot{\mathsf{H}} = \dot{\eta}, \quad \text{also} \quad \dot{\Xi}^2 + \dot{\mathsf{H}}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \tag{10a}$$

ist,

$$k = K \tag{12}$$

sein muß und die zu $(\Xi, \mathsf{H})$ gehörige Nullgeschwindigkeitskurve

$$k = 2\omega(\Xi, \mathsf{H}) \tag{9'}$$

mit Rücksicht auf (11), (12) aus der Nullgeschwindigkeitskurve (9) ebenfalls nur durch die Translation (10) entsteht, so daß also der Umstand, daß Herr Coculesco das v. Haerdtlsche Achsenkreuz zugrunde legt, dessen Ursprung in einer der beiden Massen liegt ($a = 1$, $b = 0$), an der Notwendigkeit der Bedingung (4) nichts ändern kann.

Die von Haerdtlsche Bahn ist nun durch die Angabe der zu (6) gehörigen vier Integrationskonstanten definiert, und zwar, wenn der Zeiger Null sich auf $t = 0$ bezieht, folgendermaßen:

$$\xi_0 = 2, \quad \eta_0 = 0, \quad \dot{\xi}_0 = 0, \tag{13}$$

während der Anfangswert $\dot{\eta}_0$ dadurch eindeutig festgelegt wird, daß der restringierte Planet mit den vier Anfangswerten $\xi_0$, $\eta_0$, $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ um diejenige der beiden Massen, zu welcher er zur Zeit $t = 0$ näher als zu der anderen liegt, siderisch eine direkte Keplersche *Kreis*bahn beschreiben würde, wenn die andere Masse nicht vorhanden wäre; nach den Keplerschen Gesetzen besagt dies, daß die vierte Integrationskonstante

$$\dot{\eta}_0 = \sqrt{1} \tag{14}$$

gewählt wird. Aus (7), (13) folgt nun

$$\Omega(\xi_0, \eta_0) = 7 + \tfrac{1}{3}, \tag{15}$$

aus (13), (14)

$$\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 = 1, \tag{16}$$

endlich aus (8), (15), (16) v. Haerdtls Jacobische Konstante

$$K = 13 + \tfrac{2}{3} \tag{17}$$

die also der Bedingung (4) nicht genügt, so daß es von vornherein, d. h. bereits mit Rücksicht auf die Jacobische Konstante feststeht, daß die v. Haerdtlsche Bahn keine Nullgeschwindigkeitskurve mit *verbotenem Außen*gebiet zulassen kann.

Herr Coculesco hat eben die *kursiv* gesetzte notwendige Einschränkung übersehen: daß zu (17) eine geschlossene Grenzkurve gehört, versteht sich von selbst, da doch die Bedingung (5) für (17) erfüllt ist; aber diese Grenzkurve kann nicht garantieren, daß die v. Haerdtlsche Bahn ganz im Endlichen verläuft.

Was die Kopenhagener periodische Nachbarin der v. Haerdtlschen Bahn anlangt, hätte man natürlich erreichen können, daß ihre Jacobische Konstante nicht (1), sondern genau (17) ist [$K$ ist doch der kontinuierliche Scharparameter der Gruppe g, welcher die Nachbarbahn (genauer: *eine* Nachbarbahn) der v. Haerdtlschen Bahn angehört]. Wie ich aus den unveröffentlichten Rechnungen sehe, ließ Herr Strömgren eben auf Grund von (17) Bahnen rechnen. Der Zusammenhang der v. Haerdtlschen Bahn mit den Darwinschen wurde festgestellt und — unter Mitwirkung von Herrn Jens P. Möller — später die Gruppe g als Gruppe aufgebaut. Es war natürlich bequem, während der Rechnung auch die andere Integrationskonstante zu ändern (die beiden übrigen sind bei der Gruppe g praktisch nicht anrührbar; für *exakt* periodische Lösungen gibt es freilich überhaupt nur eine Integrationskonstante, nämlich $K$). Die zu (1) gehörige periodische Bahn ist dann durch Interpolation ermittelt worden.

Kopenhagen, den 20. Mai 1930.

(Eingegangen am 22. Mai 1930.)

# Zur effektiven Stabilität des Mondes.

Von

Aurel Wintner in Leipzig, z. Z.*) in Kopenhagen.

Die Regularisierungstheorie des restringierten Dreikörperproblems ist von Thiele[1]) begründet, von den Herren Burrau[2]), Levi-Civita[3]),[4]) und Birkhoff[5]),[6]) näher ausgebaut worden und liegt — in der Thieleschen Fassung — den Strömgrenschen numerischen Untersuchungen[7]) über massennahe Bahnformen zugrunde[8]). In dieser Arbeit sollen zunächst gewisse Verallgemeinerungen der Transformationen von Thiele-Burrau bzw. Levi-Civita-Birkhoff untersucht werden. Auf Grund einer dieser verallgemeinerten und übrigens völlig expliziten Transformationen gelingt sodann der Nachweis, daß das restringierte Dreikörperproblem in einen Dirichletschen (konservativen) regulären Oszillator verwandelt werden kann, der zwei kanonische Freiheitsgrade und an Stelle der Massensingularität eine stabile Gleichgewichtslage hat. Die massennahen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems gehen dabei in Schwingungen um diese stabile Gleichgewichtslage über. — Es handelt sich nicht nur um periodische Lösungen, sondern um die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen, vor allem im Innern einer Hillschen Grenzkurve, wie im Falle des Erdmondes.

## § 1.

## Die isotherme Transformation.

Die totale Differentiation nach der Zeit $t$ soll mit einem Akzent, die totale Differentiation nach einer später einzuführenden Zeitvariable $\psi$ mit einem Punkt, endlich die partielle Differentiation nach einer Variable $x$ mit dem Zeiger $_x$ bezeichnet werden:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{d\psi}, \qquad A_x = \frac{\partial A}{\partial x}. \tag{1}$$

*) Fellow of the Rockefeller Foundation.

[1]) N. Thiele, Astr. Nachr. **138** (1895), S. 1 ff. [für $\mu = \frac{1}{2}$].

[2]) C. Burrau, Vierteljahrsschr. d. Astr. Gesellsch. **41** (1906), S. 261 ff. [für beliebiges $\mu$].

[3]) T. Levi-Civita, Acta Math. **30** (1906), S. 305 ff.

[4]) T. Levi-Civita, Rend. della R. Accad. dei Lincei (5) **24 II** (1916), S. 553 ff.

[5]) G. D. Birkhoff, Rend. Circ. Mat. Palermo **39** (1915), S. 265 ff.

[6]) G. D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), S. 202 ff.

[7]) E. Strömgren, Tre Aartier Celest Mekanik paa Københavns Observatorium, Kopenhagen 1923, Kapitel V und Anhang.

[8]) Vgl. auch H. C. Plummer, Proc. of the Royal Irish Acad. **32 A** (1914), Nr. 2, S. 7 ff.

Die Koordinaten des restringierten Planeten sollen auf das um den Schwer punkt rotierende Achsenkreuz $(\xi, \eta)$ bezogen sein, dessen $\xi$-Achse di Syzigienachse und dessen Ursprung der Schwerpunkt ist. Die Masseneinhei sei die Summe der beiden anziehenden Massen, die also mit $\mu$ und $1-\mu$ bezeichnet werden können $(0<\mu<1)$, und zwar sei die Bezeichnung derart gewählt, daß die Masse $1-\mu$ rechts, also die Masse $\mu$ links vo dem Schwerpunkt liegt. Wird dann die Entfernung der beiden Masse (d. i. der Radius der Jupiterbahn in dem siderischen heliozentrischen Achsen kreuz) zur Längeneinheit gewählt, so sind die Koordinaten der beide (in dem rotierenden Achsenkreuz ruhenden) Massen offenbar

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} 1-\mu: & \xi=\mu, & \eta=0 \\ \mu\ : & \xi=\mu-1, & \eta=0 \end{array} \qquad (0<\mu<1)$$

Wird endlich die Zeiteinheit dadurch festgelegt, daß die siderische Um laufszeit dieser beiden Massen um den Schwerpunkt gleich $2\pi$ wir (d. h. die siderische Drehgeschwindigkeit der Syzigienachse gleich 1 ist) so ist nach dem dritten Keplerschen Gesetz auch die Gravitationskonstante gleich 1. Die Bewegungsgleichungen des restringierten Planeten sind dann unter Benutzung der Schreibweise (1) offenbar

$$(3)\qquad \xi''=2\eta'+\xi+\Gamma_\xi, \qquad \eta''=-2\xi'+\eta+\Gamma_\eta$$

mit dem Jacobischen Integral

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2)-\tfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)-\Gamma(\xi,\eta)=C,$$

wobei [vgl. (2)]

$$(5)\qquad \Gamma=\Gamma(\xi,\eta)=\frac{1-\mu}{|\sqrt{(\xi-\mu)^2+\eta^2}|}+\frac{\mu}{|\sqrt{(\xi-\mu+1)^2+\eta^2}|}$$

das Gravitationspotential, $\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$ das Zentrifugalpotential bedeute und die aus dem Energieintegral (4) herausfallende Corioliskraft $(2\eta', -2\xi')$ das „Scheringsche Potential" $\xi\eta'-\eta\xi'$ besitzt, so daß eine (von $t$ un abhängige) Lagrangesche Funktion $L$ existiert:

$$(6)'\qquad L=\tfrac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2)+(\xi\eta'-\eta\xi')+\tfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)+\Gamma(\xi,\eta),$$

d. h.

$$(6)\qquad L=L(\xi,\eta,\xi',\eta')=\tfrac{1}{2}[(\xi'-\eta)^2+(\eta'+\xi)^2]+\Gamma(\xi,\eta),$$

mit deren Hilfe (3) in der Gestalt [vgl. (1)]

$$(7)\qquad (L_{\xi'})'-L_\xi=0, \qquad (L_{\eta'})'-L_\eta=0,$$

d. h.[9])

$$(7a)\qquad \delta\int_0^t L(\xi,\eta,\xi',\eta')\,d\tau=0,$$

[9]) In (7a) (sowie in (34)) sind die Integrationsgrenzen sowie die Anfangs- un Endwerte der Koordinaten festzuhalten.

also auch in der Hamiltonschen kanonischen Form geschrieben werden kann[10]). Von (7) kann man nämlich zu einem kanonischen System

$$(8) \quad \xi' = H_X, \quad X' = -H_\xi; \quad \eta' = H_Y, \quad Y' = -H_\eta; \quad H = H(\xi, \eta, X, Y)$$

mit dem Energieintegral

$$(9) \qquad H = H(\xi, \eta, X, Y) = C$$

bekanntlich dadurch übergehen, daß man an Stelle der Geschwindigkeiten $\xi', \eta'$ die Impulse

$$(10) \qquad X = L_{\xi'}, \qquad Y = L_{\eta'}$$

einführt, im Rahmen der Legendreschen Transformation

$$(11) \qquad H = \xi' L_{\xi'} + \eta' L_{\eta'} - L$$

setzt und die Funktion (11) der Koordinaten und der Geschwindigkeiten vermöge (10) als eine Funktion der Koordinaten und der Impulse ausdrückt. Zu diesem Ende braucht man aber nur zu beachten, daß nach (10) und (6)

$$(10)' \qquad X = \xi' - \eta, \qquad Y = \eta' + \xi,$$

also einerseits nach (10), (10)'

$$(11a) \qquad \xi' L_{\xi'} + \eta' L_{\eta'} = (X^2 + Y^2) - (\xi Y - \eta X),$$

und andererseits nach (6), (10)'

$$(11b) \qquad L = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \Gamma(\xi, \eta),$$

also endlich nach (11), (11a), (11b)

$$(12) \quad H = H(\xi, \eta, X, Y) = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (\xi Y - \eta X) - \Gamma(\xi, \eta)$$

ist.

Wir wollen sagen, die Variablenvertauschung

$$(13) \qquad (\xi, \eta, X, Y) \leftrightarrow (u, v, U, V)$$

sei eine konservative Liesche Punkttransformation, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Die Transformationsformeln, welche von den alten Variablen $(\xi, \eta, X, Y)$ zu den neuen $(u, v, U, V)$ überführen, enthalten weder $t$ noch Differentiale, und drückt man $H = H(\xi, \eta, X, Y)$ vermöge der Transformationsformeln als Funktion der neuen Variablen aus und bezeichnet man die so entstehende Funktion der neuen Variablen mit $\bar{H}$, setzt man m. a. W.

$$(14) \qquad \bar{H}(u, v, U, V) \equiv H(\xi, \eta, X, Y),$$

---

[10]) Die hier und später benutzten Methoden der analytischen Mechanik findet man z. B. in dem bekannten Lehrbuch von Whittaker.

so geht (8), auf die neuen Variablen umgerechnet, in

$$(15)\quad u' = \bar{H}_U,\ U' = -\bar{H}_u;\quad v' = \bar{H}_V,\ V' = -\bar{H}_v;\quad \bar{H} = \bar{H}(u, v, U, V),$$

also (9) in

$$(16)\qquad \bar{H}(u, v, U, V) = C$$

über. Damit nun eine konservative Punkttransformation (13) eine solche Berührungstransformation ist, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die Pfaffsche Form

$$(17)\qquad X d\xi + Y d\eta - U du - V dv$$

vermöge der Transformationsformeln das vollständige Differential einer Funktion $S = S(\xi, \eta, u, v)$ der Koordinaten wird. Insbesondere ist also hinreichend, daß die Pfaffsche Form $X d\xi + Y d\eta$ eine Invariante der Transformation darstellt; denn gilt

$$(17)'\qquad X d\xi + Y d\eta = U du + V dv,$$

so ist (17) das vollständige Differential der Funktion $S(\xi, \eta, u, v) \equiv 0$. Handelt es sich insbesondere um eine Transformation, welche die Koordinatenpaare $(\xi, \eta)$, $(u, v)$ auf eine von den Impulsen $(X, Y)$ bzw. $(U, V)$ unabhängige Weise aufeinander bezieht:

$$(13^*)\qquad (\xi, \eta) \leftrightarrow (u, v)$$

(während umgekehrt die Transformationsformeln der Impulse auch die Koordinaten enthalten dürfen), so geht (17)′ unter Benutzung der Schreibweise (1) in

$$(17^*)\qquad X\xi_u + Y\eta_u = U,\quad X\xi_v + Y\eta_v = V$$

über. D. h. wird die Variablenvertauschung (13) nach (13*), (17*) vorgenommen, so geht (8) unter Benutzung von (14) in (15) über. Dabei soll die Abbildung der $(u, v)$-Ebene auf die $(\xi, \eta)$-Ebene stetig differentiierbar sein und einen höchstens in isolierten Punkten verschwindenden Abbildungsmodul

$$(18)\qquad D = D(u, v) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix}$$

haben. Wir wollen ein für allemal annehmen, daß die Abbildung der $(u, v)$-Ebene auf die $(\xi, \eta)$-Ebene eindeutig ist; die inverse Abbildung wird aber im allgemeinen nur „im kleinen", und auch „im kleinen" nur in der Umgebung derjenigen Punkte eindeutig sein, für welche (18) nicht verschwindet. — Nehmen wir nun mit Levi-Civita[4]) an, daß die stetig differentiierbare Abbildung der $(u, v)$-Ebene auf die $(\xi, \eta)$-Ebene konform ist, genauer, daß durchweg

$$(19)\qquad \xi_u = \eta_v,\quad \xi_v = -\eta_u$$

gilt, also die Abbildung durch eine ganze Funktion

$$\xi + i\eta = f(u + iv), \quad \text{kurz } \zeta = f(w) \tag{20}$$

geleistet wird und demnach nur an den Nullstellen des Abbildungsmoduls (18), der nach (19), (20) in

$$D = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \qquad \left(f^{(1)} = \frac{df}{dw}\right) \tag{21}$$

übergeht, nicht winkeltreu ist. Die Auflösung von (17*) ist nach (18) allgemein

$$X \cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u \\ V & \eta_v \end{vmatrix}, \qquad Y \cdot D = \begin{vmatrix} \xi_u & U \\ \xi_v & V \end{vmatrix}, \tag{17*)'}$$

also in dem Cauchy-Riemannschen Falle (19)

$$X \cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u \\ V & \xi_u \end{vmatrix}, \qquad Y \cdot D = \begin{vmatrix} U & -\xi_u \\ V & \eta_u \end{vmatrix}, \quad \text{also} \quad (X+iY)\cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u - i\xi_u \\ V & -\xi_u - i\eta_u \end{vmatrix},$$

d. h. wegen $\xi_u + i\eta_u = f^{(1)}(u+iv)$

$$(X+iY)\cdot D = f^{(1)}(u+iv)\cdot \begin{vmatrix} U & -i \\ V & 1 \end{vmatrix},$$

also endlich nach (21)

$$X + iY = \frac{f^{(1)}(u+iv)}{|f^{(1)}(u+iv)|^2}(U+iV). \tag{22}$$

[Herr Levi-Civita[4]) gibt

$$X + iY = \frac{1}{f^{(1)}(u-iv)}(U+iV) \tag{22)'}$$

an; dies steht im Einklang mit (22), da Herr Levi-Civita stillschweigend annimmt, daß

$$f(u+iv)\,f(u-iv) = |f(u+iv)|^2 \tag{23}$$

gilt, d. h. daß $f(w)$ in konjugiert komplexen Punkten konjugiert komplexe Werte besitzt. Die Betrachtung solcher Abbildungsfunktionen ist sowieso sinngemäß, da das Feld der konservativen, d. h. Gravitations- und Zentrifugalkräfte symmetrisch ist in bezug auf die Syzigienachse $\eta = 0$.] Zusammenfassend können wir sagen, daß die durch (20) und (22) definierte reelle Punkttransformation (13) des Phasenraumes eine Berührungstransformation ist, d. h. (8) in (15) überführt. Dabei ist nach (18), (21) und (22)

$$|d\xi \cdot d\eta| : |du \cdot dv| = |f^{(1)}(u+iv)|^2, \quad |dX \cdot dY| : |dU \cdot dV| = |f^{(1)}(u+iv)|^2, \tag{24}$$

d. h. das Flächenelement sowohl der Koordinatenebene als auch der Impulsebene erhält durch den Übergang von den alten zu den neuen Variablen den Faktor $|f^{(1)}(u+iv)|^{-2}$, es liegt also nahe, auch das Zeitelement mit demselben Abbildungsmodul zu versehen, d. h. analog zu (24) an Stelle der

alten Zeit $t$ vermöge der Differentialgleichung $|dt|:|d\psi| = |f^{(1)}(u+iv)|^2$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{|f^{(1)}(u+iv)|^2} \tag{25}$$

eine neue Zeit $\psi$ einzuführen; in (25) sind $u$ und $v$ selbstverständlich als durch (8) definierte Funktionen von $t$ aufzufassen. Dann geht (15) in

$$\begin{aligned} \dot{u} &= |f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_U, \quad \dot{U} = -|f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_u; \\ \dot{v} &= |f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_V, \quad \dot{V} = -|f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_v \end{aligned} \tag{26}$$

über, wobei der Punkt, wie bereits unter (1) angegeben, totale Differentiation nach $\psi$ bedeutet. Der Übergang von (26) zu (15) geschieht dadurch, daß man in

$$\frac{dt}{d\psi} = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \tag{25}'$$

$u$ und $v$ diesmal als durch (26) definierte Funktionen von $\psi$ auffaßt und $t$ aus (25)′ als Funktion von $\psi$ durch eine Quadratur bestimmt. Da das Integral (16) von (15) die Zeit $t$ gar nicht enthält, so ist (16) auch für (26) ein Integral. Man kann diesen Umstand dazu benutzen, um (26) *bei gegebener Jacobischer Konstante* $C$, nämlich durch Einführung der Hamiltonschen Funktion

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(u, v, U, V; C) = |f^{(1)}(u+iv)|^2 [\overline{H}(u, v, U, V) - C] \tag{27}$$

in der kanonischen Form

$$\dot{u} = \mathsf{H}_U, \quad \dot{U} = -\mathsf{H}_u; \quad \dot{v} = \mathsf{H}_V, \quad \dot{V} = -\mathsf{H}_v \tag{28}$$

zu schreiben, wie das Herr Levi-Civita[3]) bei seiner quadratischen Abbildung $f(w) = \mu + w^2$ und später bei der Thieleschen Kosinusabbildung[11]) getan hat. Bedeutet nämlich $x$ irgendeine unter den vier Variablen $u, v, U, V$, so gilt nach (27) identisch

$$\mathsf{H}_x = |f^{(1)}(u+iv)^2|_x \cdot [\overline{H}(u, v, U, V) - C] + |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot \overline{H}_x(u, v, U, V),$$

also mit Rücksicht auf (16) einfach $\mathsf{H}_x = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot \overline{H}_x(u, v, U, V)$, wodurch (26) und (28), wie behauptet, ineinander übergehen. Nur ist zu beachten, daß die „Energiekonstante“ $\mathsf{H} = \text{konst.}$ von (28) nicht willkürlich ist, sondern wegen (16) und (27) durch die Energiekonstante $C$ von (26) eindeutig bestimmt wird zu

$$\mathsf{H}(u, v, U, V; C) = 0. \tag{29}$$

---

[11]) a. a. O. [4]). Zur Bequemlichkeit des Lesers sei erwähnt, daß Herr Levi-Civita nicht den Schwerpunkt zum Ursprung des rotierenden Achsenkreises wählt, was eine neue „Scheinkraft“ und eine Abweichung von den Burrauschen Formeln bedingt (sobald $\mu \neq \frac{1}{2}$ ist).

## § 2.

## Das Regularisierungsprinzip im kleinen.

Der Übergang von (8) oder (15) zu (28) bezweckt nun folgendes. Die Hamiltonsche Funktion $H$ von (8), also nach (14) auch die Hamiltonsche Funktion $\overline{H}$ von (15) kann Unendlichkeitsstellen haben. Diese sind bei dem restringierten Dreikörperproblem mit Rücksicht auf (12), (5) die beiden Massen (2). Da nun diese, Singularitäten aufweisende Hamiltonsche Funktion mit Rücksicht auf (27) noch mit dem Abbildungsmodul $|f^{(1)}(u+iv)|^2$ zu multiplizieren ist, bevor man die Hamiltonsche Funktion H von (28) erhält, so kann man durch passende Wahl der Abbildungsfunktion $f(u+iv)$ erreichen, daß die Unendlichkeitsstellen von $H$ bzw. $\overline{H}$ in Nullstellen des Abbildungsmoduls fallen, derart, daß (27) keine Singularitäten mehr besitzt. So setzt Herr Levi-Civita

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \mu + (u+iv)^2, \tag{30}$$

wodurch freilich die Regularisierung nur in einer der beiden Massen (2) erreicht wird, so daß (30) von Herrn Birkhoff durch

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \frac{(u+iv)^2 + \mu(1-\mu)}{2(u+iv)+1-2\mu} \tag{31}$$

ersetzt wurde, und so ist es bei der Kosinusabbildung, die von Euler (Zweizentrenproblem) und Thiele (restringiertes Dreikörperproblem) benutzt wurde und die in den numerischen Untersuchungen auf der Kopenhagener Sternwarte eine fundamentale Rolle spielt. — Allen diesen Transformationen ist es gemein, daß die Ableitung der Funktion $f(w)$ für die zu regularisierende Stelle, wo eine der beiden Massen liegt, nur in der ersten Ordnung verschwindet, d. h. daß in diesen Punkten die Abbildung derart aufhört winkeltreu zu sein, daß sie die Winkel halbiert. Dies ist, wie es sich in unserem allgemeineren Zusammenhang zeigen wird, für numerische Zwecke äußerst wesentlich, indem bereits eine Nullstelle zweiter Ordnung von $f^{(1)}(w)$ jede numerische Extrapolation mit Rücksicht auf eine dadurch bedingte allzu langsame zeitliche Änderung der Koordinaten (unter Zeit die Variable $\psi$ verstanden) vereiteln müßte. Für unsere theoretischen Zwecke sind aber Nullstellen erster Ordnung von $f^{(1)}(w)$ noch ganz unbrauchbar (vgl. weiter unten), ich werde vielmehr, indem ich mich aus Bequemlichkeitsgründen auf Nullstellen ungerader Ordnung für $f^{(1)}(w)$ beschränke,

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \mu + (u+iv)^{2n} \qquad [\text{vgl. (30)}] \tag{32}$$

bzw.

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \frac{\mu(u+iv+1-\mu)^{2n} + (1-\mu)(u+iv-\mu)^{2n}}{(u+iv+1-\mu)^{2n} - (u+iv-\mu)^{2n}} \qquad [\text{vgl. (31)}] \tag{33}$$

zu setzen haben und dabei die positive ganze Zahl $n$ völlig beliebig, nu eben nicht gleich 1 wählen können, und entsprechend kann man auch di Thielesche Transformation von $n = 1$ auf $n \geqq 2$ übertragen.

Es sei noch erwähnt[12]), daß (28) in der Lagrangeschen Form

$$(34) \qquad (\Lambda_{\dot u})^{\cdot} - \Lambda_u = 0, \quad (\Lambda_{\dot v})^{\cdot} - \Lambda_v = 0, \quad \text{d. h. } \delta \int_0^{\Psi} \Lambda \, d\tau = 0$$

mit

$$(35) \qquad \Lambda = \Lambda(u, v, \dot u, \dot v; C),$$

die in dem Thieleschen Spezialfall den Kopenhagener Rechnungen in massen nahen Fällen zugrunde liegt, bei beliebiger Abbildung von Herrn Plumme und von ihm unabhängig und mit ihm und mit den Untersuchungen vo Herrn Levi-Civita ungefähr gleichzeitig von Herrn Birkhoff gefunden worde ist. Herr Plummer rechnet einfach (7) auf die neuen Variablen $u, v; \psi$ un Herr Birkhoff benutzt zuerst die natürlichen Gleichungen und sodann da Hamiltonsche Prinzip (7a). Mit Rücksicht auf den involutorischen Cha rakter der Legendreschen Transformation, welche die Lagrangeschen Gle chungen in die Hamiltonschen überführt [vgl. S. 677], sind freilich (28 und (34) völlig äquivalente Schreibweisen. — Die explizite Gestalt von (34 ist bei beliebiger Abbildungsfunktion $f(w)$

$$(34a)' \qquad \ddot u - 2\,|f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot \dot v = \Omega_u, \qquad \ddot v + 2\,|f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot \dot u = \Omega_v$$

mit dem Jacobischen Integral

$$(34b)' \qquad \tfrac{1}{2}(\dot u^2 + \dot v^2) - \Omega(u, v; C) = 0,$$

wobei das regularisierte Potential

$$(35)' \qquad \Omega = \Omega(u, v; C) \equiv |f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot [\tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \Gamma(\xi, \eta) - C]$$

der konservativen, d. h. Zentrifugal- und Gravitationskräfte vermöge (20 als Funktion der neuen Koordinaten $u, v$ aufzufassen ist.

In der Literatur sind, wie erwähnt, nur die folgenden drei Abbildunge verwertet worden: 1. Die Levi-Civitasche Abbildung (30), die die Regu larisierung nur in einer der beiden Massen (2), nämlich in

$$(36) \qquad 1 - \mu: \quad \xi = \mu, \quad \eta = 0$$

leistet; 2. die Birkhoffsche Abbildung (31), die auch die andere Masse b rücksichtigt, ebenso wie 3. die Euler-Thielesche Kosinusabbildung, auf welch ich weiter unten ausführlich zurückkomme. Da bei allen diesen Abbildunge die erste Ableitung der Abbildungsfunktion in der zu regularisierende Masse nur in der ersten Ordnung verschwindet, da ferner es auf die Wer der höheren Ableitungen von der ersten nicht verschwindenden Ableitun

[12]) Wegen Literatur vgl. weiter unten.

an gar nicht ankommt, da endlich die Umgebung der Masse

$$\mu: \quad \xi = \mu - 1, \quad \eta = 0 \tag{37}$$

durch die Abbildung

$$\xi + i\eta = f(u + iv) = \mu - 1 + (u + iv)^2 \tag{38}$$

genau so regularisiert wird wie die Umgebung von (36) durch (30), so können wir uns zunächst auf die Abbildung (32) beschränken, welche zu (36) gehört; die zu (37) gehörige Abbildung

$$\xi + i\eta = f(u + iv) = \mu - 1 + (u + iv)^{2n} \tag{39}$$

braucht doch dann nicht besonders untersucht zu werden, und die Abbildung

$$\frac{\xi + i\eta + 1 - \mu}{\xi + i\eta - \mu} = \left(\frac{u + iv + 1 - \mu}{u + iv - \mu}\right)^{2n}, \tag{40}$$

die mit (33) identisch ist und in dem Spezialfall $n = 1$ in (31) übergeht, leistet gleichzeitig für die beiden Massen (36), (37) dasselbe, wie (32) für (36) oder (39) für (37), indem die $\nu$-te Ableitung $f^{(\nu)}$ für beide Massen verschwindet, wenn $1 \leqq \nu \leqq 2n - 1$ ist, nicht aber für $\nu = 2n$. Nach demselben Prinzip können wir von (32) zu einer zu beliebigem $n \geqq 1$ gehörigen Abbildung übergehen, die durch eine ganze Funktion geliefert wird.

Zur Orientierung sei nur die Thiele-Burrausche Transformation

$$\xi + i\eta = f(u + iv) \equiv \mu - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(u + iv)$$

erwähnt, bei welcher also $n$ noch $= 1$ ist und die offenbar nur eine Schreibweise für elliptische oder bipolare Koordinaten darstellt. Die Ableitung ist $-\frac{1}{2}\sin(u + iv)$, verschwindet also nur für $u = k\pi$, $v = 0$, und zwar von der ersten Ordnung, und für gerade $k$ ist

$$\xi + i\eta = f(k\pi + i.0) = \mu, \qquad \text{d. h. } \xi = \mu, \ \eta = 0,$$

für ungerade $k$ aber

$$\xi + i\eta = f(k\pi + i.0) = \mu - 1, \quad \text{d. h. } \xi = \mu - 1, \ \eta = 0$$

entsprechend den beiden Massen (37), (36), womit alles erreicht ist. — Es ist zu beachten, daß die Breite des Periodizitätsstreifens $2\pi$, die Breite des Fundamentalstreifens, worauf die $(\xi, \eta)$-Ebene eineindeutig bezogen ist, nur $\pi$ beträgt. Der räumlichen Periodizität zufolge braucht eine in der $(\xi, \eta)$-Ebene geschlossene Kurve, d. h. eine periodische Lösung, in der $(u, v)$-Ebene nicht notwendig geschlossen zu sein[13]). In den Punkten $\xi + i\eta = k\pi$, d. h. in den Massen, werden die Winkel halbiert (vgl. hierzu

[13]) Dies ist z. B. der Fall, wie man sich leicht überzeugt, bei den Kopenhagener Gruppen l und m (die in Betracht kommenden kreisähnlichen großen, also nicht massennahen Bahnen sind natürlich nicht in elliptischen Koordinaten, sondern in $(\xi, \eta)$ berechnet worden).

S. 693 weiter unten), sonst ist die Abbildung konform. Über die Regularisierung im großen mittels der Thieleschen Transformation vgl. S. 689 bzw. S. 693 weiter unten. Bewegt sich das Thielesche $\psi$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die ganze $t$-Achse, was keinesfalls selbstverständlich ist, und ausschließlich darauf beruht, daß $n=1$ gewählt ist. Vgl. S. 696.

## § 3.

## Die normierte Transformation.

Wir haben also zunächst die regularisierende Hamiltonsche Funktion H für den Fall der *normierten* Abbildung (32) auszurechnen, wobei $n$ eine beliebig gewählte positive ganze Zahl ist (der Levi-Civitasche Grenzfall $n=1$ soll also nicht ausgeschlossen werden), die wir als einen irgendwie fest gewählten Parameter aufzufassen haben. Nach (27), (14), (12) ist

$$\mathsf{H}=|f^{(1)}(u+iv)|^2\cdot[\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2)-(\xi Y-\eta X)-\Gamma(\xi,\eta)-C], \tag{41}$$

und wir haben in (41) vermöge (32) und (22) [d. i. (22)′] die Variablenvertauschung (13) vorzunehmen, um die Funktion (27) zu erhalten. — Zunächst ist nach (32)

$$f^{(1)}(u+iv)=2n(u+iv)^{2n-1}, \tag{42}$$

also

$$|f^{(1)}(u+iv)|^2=4n^2(u^2+v^2)^{2n-1}, \tag{43}$$

und nach (32) und (5)

$$\Gamma=\frac{1-\mu}{(u^2+v^2)^n}+\frac{\mu}{|1+u+iv|^{2n}},$$

d. h. nach (43)

$$\Gamma\cdot|f^{(1)}(u+iv)|^2=4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+4n^2\mu(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{P}(u, \tag{44}$$

[unter

$$\mathfrak{P}(u,v)=\frac{1}{|1+u+iv|^{2n}};\qquad \mathfrak{P}(0,0)=1 \tag{45}$$

eine in der Umgebung

$$-\tfrac{1}{2}<u<\tfrac{1}{2},\qquad -\tfrac{1}{2}<v<\tfrac{1}{2} \tag{46}$$

der zu regularisierenden Masse

$$1-\mu:\quad u=0,\quad v=0 \qquad \text{(vgl. (32) mit (36))} \tag{47}$$

gewiß konvergente (reelle) Potenzreihe verstanden], ferner nach (22)

$$|f^{(1)}(u+iv)|^2\cdot\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2)=\tfrac{1}{2}(U^2+V^2) \tag{48}$$

und, wenn in (22) [unter $\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}(u,v)$ und $\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}(u,v)$ zwei reelle binäre ganze Formen mit dem Homogenitätsgrad $2n-1$ verstanden] mit

Rücksicht auf (42)

$$f^{(1)}(u+iv) = \mathfrak{G}_1^{[2n-1]} + i\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]} \tag{49}$$

gesetzt wird, offenbar auch

$$\begin{aligned} |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot X &= U\mathfrak{G}_1^{[2n-1]} - V\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}, \\ |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot Y &= U\mathfrak{G}_2^{[2n-1]} + V\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}, \end{aligned} \tag{50}$$

ferner nach (32) [unter $\mathfrak{G}_1^{[2n]}(u,v)$ und $\mathfrak{G}_2^{[2n]}(u,v)$ zwei ebensolche Formen mit dem Homogenitätsgrad $2n$ verstanden] ebenso

$$\xi = \mu + \mathfrak{G}_1^{[2n]}, \qquad \eta = \mathfrak{G}_2^{[2n]}, \tag{51}$$

also endlich nach (50) und (51) [unter $\mathfrak{F}_1^{[4n-1]}(u,v)$ und $\mathfrak{F}_2^{[4n-1]}(u,v)$ zwei ebensolche Formen mit dem Homogenitätsgrad $4n-1$ verstanden] offenbar

$$f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot (\xi Y - \eta X) = \mu U\mathfrak{G}_2^{[2n-1]} + \mu V\mathfrak{G}_1^{[2n-1]} - U\mathfrak{F}_2^{[4n-1]} - V\mathfrak{F}_1^{[4n-1]}.$$

Setzt man nun (44), (48), (52), (43) in (41) ein, so folgt

$$\mathsf{H} = \tfrac{1}{2}(U^2+V^2) - 4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1} -$$

$$-\{4n^2(u^2+v^2)^{2n-1}(C+\mu\mathfrak{P}) + (\mu\mathfrak{G}_2^{[2n-1]} - \mathfrak{F}_2^{[4n-1]})U + (\mu\mathfrak{G}_1^{[2n-1]} - \mathfrak{F}_1^{[4n-1]})V\}.$$

wobei der $\{\}$-Ausdruck in bezug auf die Koordinaten $u, v$ von höherer Ordnung ist als die in der ersten Zeile von (53) stehenden beiden Terme von $\mathsf{H}$; denn was die (von den Impulsen $U, V$ unabhängigen) mit deutschen Buchstaben bezeichneten fünf Funktionen der Koordinaten anlangt ($C$ ist die Jacobische Konstante), so sind die beiden $\mathfrak{G}$ und die beiden $\mathfrak{F}$ binäre ganze Formen mit dem als oberer Zeiger angegebenem Homogenitätsgrad, und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(u,v)$ ist eine für absolut hinreichend kleine Werte der Koordinaten, nämlich in dem Gebiete (46), gewiß reguläre Potenzreihe. Für (53) können wir also

$$\mathsf{H} = \tfrac{1}{2}(U^2+V^2) - 4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1} + \mathsf{P}^{\{2n-1\}}(u,v;U,V,C,\mu) \tag{54}$$

schreiben, wobei $\mathsf{P}^{\{2n-1\}}$ eine Potenzreihe von sechs Veränderlichen bedeutet, die in bezug auf $U, V, C, \mu$ linear ist, in bezug auf $u, v$ aber mit Gliedern von der $(2n-1)$-ten Ordnung beginnt und in dem Gebiete (46) jedenfalls konvergiert; die beiden in (54) explizit angeschriebenen Hauptterme von $\mathsf{H}$ sind hingegen in bezug auf $u, v$ nur von der nullten bzw. von der $(2n-2)$-ten Ordnung, also weniger hoch als $\mathsf{P}^{\{2n-1\}}$, so daß wir $\mathsf{P}^{\{2n-1\}}$ später (S. 698) ganz im Rahmen der klassischen Lagrangeschen Störungstheorie als eine Störungsfunktion auffassen werden:

$$\begin{aligned} \mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{P}; \quad \mathsf{H}_0 &= \tfrac{1}{2}(U^2+V^2) - \varkappa(u^2+v^2)^{n-1}, \\ \varkappa &= 4n^2(1-\mu) > 0, \end{aligned} \tag{55}$$

wobei der Kürze halber

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}^{\{2n-1\}} \tag{55}'$$

gesetzt ist. — Mit den Bezeichnungen (55) geht übrigens das Energieintegral (29) in

$$\mathsf{H}_0 \equiv \tfrac{1}{2}(U^2+V^2) - \varkappa(u^2+v^2)^{n-1} = -\mathsf{P}^{\{2n-1\}}(u,v;U,V,C,\mu) \tag{56}$$

über. Da die Potenzreihe $\mathsf{P}^{\{2n-1\}}(u,v;U,V,C,\mu)$ in dem Variablenpaar $U, V$ nur linear ist, so hängt ihre nach $U$ oder $V$ genommene partielle Ableitung erster Ordnung weder von $U$ noch von $V$ ab, ist also eine in dem Gebiete (46) reguläre und mit Gliedern mindestens $(2n-1)$-ter Ordnung beginnende Potenzreihe ausschließlich in den Koordinaten $u, v$, enthält also nicht die Impulse, sondern nur die Konstanten $C, \mu$ (und auch diese nur linear), so daß mit der dritten Bezeichnung (1)

$$\mathsf{P}_U^{\{2n-1\}} = \mathsf{P}_1^{\{2n-1\}}(u,v); \qquad \mathsf{P}_V^{\{2n-1\}} = \mathsf{P}_2^{\{2n-1\}}(u,v) \tag{57}$$

gilt, unter $\mathsf{P}_1^{\{2n-1\}}$, $\mathsf{P}_2^{\{2n-1\}}$ Potenzreihen in $u, v$ verstanden, die nicht von den Impulsen, sondern nur von den sowieso fest zu wählenden linearen Parametern $C, \mu$ abhängen und mit Gliedern von der Ordnung $2n-1$ (in bezug auf $u, v$) beginnen. Aus (28), (55), (57) folgt nun

$$\dot{u} = \mathsf{H}_U \equiv U + \mathsf{P}_1^{\{2n-1\}}(u,v), \qquad \dot{v} = \mathsf{H}_V \equiv V + \mathsf{P}_2^{\{2n-1\}}(u,v), \tag{58}$$

so daß der (auf $\psi$ bezogene) Geschwindigkeitsvektor $(\dot{u}, \dot{v})$ sich von dem Impulsvektor $(U, V)$ nur in einem additiven, lediglich von den Koordinaten $u, v$ abhängigen und für $u^2+v^2 \to 0$ stark gegen Null konvergierenden Vektor $(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2)$ unterscheidet, trotzdem $u^2+v^2 \to 0$ mit Rücksicht auf (47) den Einsturz in die Masse (36) bedeutet. Da damit das Verhalten der Impulse $U, V$ auf das Verhalten der Geschwindigkeiten $\dot{u}, \dot{v}$ zurückgeführt ist, haben wir noch das massennahe Verhalten von

$$\sigma = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \tag{59}$$

zu untersuchen, und da nach der Lagrangeschen Form (34b)′ des Jacobischen Integrals

$$\tfrac{1}{2}(\dot{u}^2+\dot{v}^2) = \Omega(u,v;C) \tag{60}$$

ist, so handelt es sich nur darum, die Funktion (35)′ in $u, v$ explizit darzustellen. Nun ist aber nach (32), wenn $\mathfrak{F}^{[2n]}$ die (reelle) Form

$$\mathfrak{F}^{[2n]}(u,v) = (u+iv)^{2n} + (u-iv)^{2n} \tag{61}$$

$2n$-ten Grades bedeutet,

$$\xi^2+\eta^2 = \mu^2 + \mu\mathfrak{F}^{[2n]}(u,v) + (u^2+v^2)^{2n}, \tag{62}$$

und aus (35)′, (44), (43), (62) folgt mit Benutzung der unter (55) defi-

nierten Konstante $\varkappa$ offenbar

$$\Omega = \varkappa(u^2+v^2)^{n-1} + (u^2+v^2)^{2n-1}\,\mathfrak{p}(u, v; \mu, C), \tag{63}$$

wobei $\mathfrak{p}$ eine (von den Geschwindigkeiten ebenfalls unabhängige) in dem Gebiete (46) konvergente Potenzreihe bedeutet, so daß nach (60), (63) für $u^2+v^2 \to 0$

$$\dot{u}^2+\dot{v}^2 = 2\varkappa\cdot(u^2+v^2)^{n-1} + O([u^2+v^2]^{2n-1}), \tag{64}$$

oder nach (58) auch

$$U^2+V^2 = 2\varkappa\cdot(u^2+v^2)^{n-1} + O([u^2+v^2]^{2n-1}) \tag{65}$$

gilt. Führt man noch analog zu dem Geschwindigkeitsquadrat (59) für das Quadrat der Entfernung und für das Impulsquadrat die Abkürzung

$$\varrho = u^2+v^2 \quad \text{bzw.} \quad (67) \quad v = U^2+V^2 \tag{66}$$

ein, so kann man hierfür kurz auch

$$\sigma = 2\varkappa\varrho^{n-1} + O(\varrho^{2n-1}) \quad \text{bzw.} \quad (66)' \quad v = 2\varkappa\varrho^{n-1} + O(\varrho^{2n-1}) \tag{65}'$$

schreiben, wobei nach (55)

$$2\varkappa = 8n^2(1-\mu) > 0 \qquad (0<\mu<1) \tag{68}$$

ist und die Landauschen Zeichen sich auf $\varrho \to 0$, d. h. auf unbegrenzte *räumliche* Annäherung an die zu regularisierende Masse (36) [vgl. (47)] beziehen, so daß diese Beziehungen etwas ganz Merkwürdiges, nämlich folgendes aussagen:

Zu jedem ganz im Innern der Umgebung (46) der zu regularisierenden Masse $u=v=0$ gelegenen Bereiche, also z. B. zu dem ($u=v=0$ enthaltenden!) Kreisbereiche

$$\varrho \equiv u^2+v^2 \leqq \frac{1}{3} \tag{69}$$

gibt es eine Konstante $A$ derart, daß, sobald die *Koordinaten* $u, v$ der Ungleichung (69) genügen, die *Geschwindigkeiten* $\dot{u}, \dot{v}$ bzw. die *Impulse* $U, V$ der Ungleichung

$$\sigma \leqq A\cdot\varrho^{n-1}, \quad \text{d. h.} \quad \dot{u}^2+\dot{v}^2 \leqq A\cdot(u^2+v^2)^{n-1} \tag{70}$$

bzw.

$$v \leqq A\cdot\varrho^{n-1}, \quad \text{d. h.} \quad U^2+V^2 \leqq A\cdot(u^2+v^2)^{n-1} \tag{71}$$

genügen müssen, d. h. aus der erdennahen *Lage* des Mondes kann auf seinen ganzen (zum selben Zeitpunkt gehörigen) *Geschwindigkeitszustand* geschlossen werden. Dabei hängt $A$ allerdings noch von der Jacobischen Konstante $C$ (und außerdem natürlich auch von dem Massenprozentsatz $\mu$) ab, kann aber für jedes endliche $C$-Intervall gleichmäßig gewählt werden.

Bisher durfte $n$ sowohl $=1$ als auch $>1$ sein (vgl. den Anfang

von § 3). Jetzt zeigt sich aber der grundverschiedene Charakter dieser beiden Fälle. Ist nämlich $n>1$, d. h. $n-1>0$, so gilt nach (70), (71)

$$(72) \qquad \dot{u}^2+\dot{v}^2=o(u^2+v^2), \quad U^2+V^2=o(u^2+v^2),$$

d. h. die Geschwindigkeit oder der Impuls konvergiert bei unbegrenzter Annäherung an die Masse gegen Null: die Regularisierung ist so stark, daß sie aus der Masse eine Gleichgewichtslage macht. Ist aber $n=1$, d. h. $n-1=0$, so folgt aus (70), (71) nur die Beschränktheit der Geschwindigkeit bzw. des Impulses, und mehr, insbesondere (72), gilt jetzt nicht mehr, das Quadrat der Geschwindigkeit bzw. des Impulses konvergiert vielmehr nach $(65)'$ bzw. $(66)'$ bei unbegrenzter Annäherung an die Masse gegen den von Null verschiedenen (von den Integrationskonstanten allerdings unabhängigen) Grenzwert[5])

$$(68^*) \qquad 2\varkappa=8(1-\mu)>0 \qquad (0<\mu<1),$$

die Masse ist also keine Gleichgewichtslage mehr. Man kann deshalb den Fall $n>1$ stationär, den Fall $n=1$ nichtstationär nennen.

## § 4.

## Das Hauptlemma der Regularisierungstheorie im großen: die lückenhafte Verteilung der stoßnahen Zeitgebiete.

Vorübergehend müssen wir jetzt zu dem ursprünglichen Variablensystem $\xi, \eta; t$, also zu den Gleichungen (3), (5) zurückkehren, wobei wir die Entfernung des kleinen Planeten $\xi, \eta$ von den beiden Massen (2), d. h. seine zu dem Punktpaar (2) gehörigen bipolaren Koordinaten mit

$$(73) \qquad r_\mu=\left|\sqrt{(\xi-\mu)^2+\eta^2}\right|, \quad r_{1-\mu}=\left|\sqrt{(\xi-\mu+1)^2+\eta^2}\right|,$$

und die als Integrationskonstanten für $t=t_0$ vorgeschriebenen reellen Anfangswerte mit

$$(74) \qquad \xi^0, \eta^0, \xi'^0, \eta'^0,$$

endlich die aus (73), (74) berechneten Anfangswerte $(>0)$ der bipolaren Koordinaten mit $r_\mu^0, r_{1-\mu}^0$ bezeichnen wollen; die Jacobische Integrationskonstante $C$ ist eine durch (4) festgelegte Funktion der Anfangswerte (74). — Es gilt nun — der Einfachheit halber bei irgendwie *fest* gewähltem Massenprozentsatz $\mu$ — das folgende

Hauptlemma. Es gibt bei jedem $C$ zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ derart, daß, sobald

$$(75), (76) \qquad \varepsilon<r_\mu^0<\frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon<r_{1-\mu}^0<\frac{1}{\varepsilon}$$

ist, die Funktionen

$$(77) \qquad \xi=\xi(t), \quad \eta=(t), \quad \text{also auch} \quad \xi'=\xi'(t), \quad \eta'=\eta'(t)$$

auf dem reellen $t$-Intervall $|t - t_0| < \delta$ regulär und derart sind, daß

(78), (79) $2\varepsilon < r_\mu < \frac{2}{\varepsilon}, \quad 2\varepsilon < r_{1-\mu} < \frac{2}{\varepsilon}$ gilt für $|t - t_0| < \delta$.

Dieser Satz ist, wie Weierstraß[14]) gezeigt hat, eine unmittelbare Folgerung aus dem Cauchyschen „Existenzsatz im kleinen", sobald man das Energieintegral (4) berücksichtigt. Das Wesentliche ist dabei, daß $\delta = \delta(\varepsilon; C)$ nicht von allen vier Werten (74) abhängt (und von $t_0$ selbstverständlich völlig unabhängig ist). Der eigentliche Inhalt des Hauptlemmas ist schon in der Paragraphenüberschrift angegeben. In der Tat folgt aus dem Hauptlemma, daß die Thielesche Transformation, die an sich nur eine (zu $n = 1$ gehörige) formale „Regularisierung im kleinen" liefern würde, in Wirklichkeit eine „Regularisierung im großen" herbeiführt, die zu $-\infty < t < +\infty$ gehört; aus dem Hauptlemma folgt nämlich unter Benutzung der Thieleschen Transformation (aber auch nur der Thieleschen Transformation und nicht auch einer *im kleinen* schärferen, d. h. zu $n > 1$ gehörigen Abbildung), daß diejenigen (eventuellen) $t$-Werte, für welche ein Stoß stattfindet, sich nur für $t \to \infty$ häufen können. Das Thielesche $\psi$ erledigt so — abgesehen von einem Entwicklungssatz — die auf das restringierte Problem übertragene Sundmansche Fragestellung, das sich den sich auf das eigentliche Dreikörperproblem beziehenden Sundmanschen Untersuchungen[15]) an sich nicht unterordnet, obwohl bei Benutzung der Thieleschen Transformation mutatis mutandis die Schlußweisen selbst aus der Sundmanschen Theorie übernommen werden können. Der von Herrn Sundman ausgeschlossene Fall eines ternären Stoßes ist in dem restringierten Dreikörperproblem natürlich unmöglich. — Das Weierstraßsche Hauptlemma erlaubt ferner, die Sundmansche Beweisanordnung für den Painlevéschen Stoßsatz[16]), der sich auf das eigentliche Dreikörperproblem bezieht, auf das restringierte Dreikörperproblem ohne jede Änderung zu übertragen, so daß es genügt, den Satz ohne Beweis anzugeben, und zwar wie folgt.

Setzt man

$$(80) \qquad R(t)\begin{cases} = r_\mu(t) & , \text{ wenn } r_\mu(t) < r_{1-\mu}(t), \\ = r_{1-\mu}(t) & , \text{ wenn } r_{1-\mu}(t) < r_\mu(t), \\ = r_\mu(t) = r_{1-\mu}(t), & \text{wenn } r_\mu(t) = r_{1-\mu}(t), \end{cases}$$

so sind mit Rücksicht auf das Weierstraßsche Hauptlemma nach Herrn Painlevé nur die folgenden beiden Fälle möglich:

---

[14]) K. Weierstraß, Acta Math. **35** (1912), S. 37 ff.

[15]) K. F. Sundman, Acta Math. **36** (1912), S. 105 ff.

[16]) P. Painlevé, Stockholmer Vorlesung (1897, lith.), S. 582 ff. Vgl. K. F. Sundman, a. a. O. [15]), S. 113 ff., insb. S. 119–121 sowie T. Levi-Civita, Acta Math. **42** (1918), S. 110–114.

I. Der stoßfreie Fall, wobei Funktionen (76) für $t_0 \leqq t < +\infty$ regulär sind und

$$R(t) > 0 \quad \text{ist für} \quad t_0 \leqq t < +\infty . \tag{81}$$

[Dabei sind noch die beiden Unterfälle

$$\liminf_{t \to +\infty} R(t) > 0 \tag{81a}$$

bzw.

$$\liminf_{t \to +\infty} R(t) = 0 \tag{81b}$$

zu unterscheiden; in dem Unterfalle (81a) soll die Bewegung regulär heißen, während der ebenfalls stoßfreie Unterfall (81b) als der Fall des Pseudostoßes bezeichnet werden kann.]

II. Liegt nicht der stoßfreie Fall I vor, so gibt es einen Zeitpunkt $t^*$ mit $t_0 < t^* < +\infty$ derart, daß die Funktionen (76) für $t_0 \leqq t < t^*$ regulär sind und

$$R(t) > 0 \quad \text{ist für} \quad t_0 \leqq t < t^*, \tag{82}$$

aber es gilt dabei

$$\lim_{t \to t^*-0} R(t) = 0 \tag{84}$$

[also nicht nur $\liminf_{t \to t^*-0} R(t) = 0$ ; (84)′ *folgt* vielmehr nach dem Hauptlemma aus (84)′. sobald $t^* < +\infty$ ist!]; nun kann (84) mit Rücksicht auf (80) in der Gestalt

$$\lim_{t \to t^*-0} r_\mu(t) \cdot r_{1-\mu}(t) = 0 \tag{84*}$$

geschrieben werden, und aus (84*) folgt, daß im Falle II zur Zeit $t^*$ ein effektiver Stoß mit *einer* der beiden Massen (2) stattfinden muß, d. h. daß nicht nur (84*), sondern auch die folgende Alternative richtig ist:

$$\text{(85) entweder ist } \lim_{t \to t^*-0} r_\mu(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{t \to t^*-0} r_{1-\mu}(t) = 0; \quad t^* < +\infty$$

[was übrigens mit Rücksicht auf (73) auch in der Form

$$\text{(85)}' \qquad \text{entweder } \lim_{t \to t^*-0} r_{1-\mu}(t) = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{t \to t^*-0} r_\mu(t) = 1$$

geschrieben werden kann]; würde nämlich (85) aus (84*) *nicht* folgen, so müßte es [mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Funktionen $r_\mu(t)$, $r_{1-\mu}(t)$ für $t_0 \leqq t < t^*$] offenbar eine Folge $\{t_n\}$ geben derart, daß

$$r_\mu(t_n) = r_{1-\mu}(t_n), \qquad \lim_{n \to +\infty} t_n = t^* - 0 ,$$

also nach (84*) auch $r_\mu(t_n) = r_{1-\mu}(t_n) \to 0$, $n \to +\infty$ gilt, was aber im Widerspruch steht mit der aus (73) unmittelbar folgenden, für alle $t$ gültigen Ungleichheit $r_\mu(t) + r_{1-\mu}(t) \geqq 1$.

Alles in allem sagt also der (auf das restringierte Dreikörperproblem übertragene) Painlevésche Satz folgendes aus:

Es gilt entweder (81) oder (85).

## § 5.

## Das Oszillatormodell.

Es seien nun zu $t=0$ die vier Anfangswerte (74) vorgeschrieben, derart, daß die aus (73) berechneten Anfangswerte der bipolaren Koordinaten von Null verschieden sind, d. h. es sei

$$(86) \qquad (\xi^0, \eta^0) \neq (\mu, 0), \quad (\xi^0, \eta^0) \neq (\mu-1, 0).$$

Dann werden durch (3) die Funktionen (76) für $0 \leqq t < t^*$ als eindeutig bestimmte reguläre Funktionen definiert, wobei $t^*$ im Falle II den an $t=0$ (für $t>0$) nächstliegenden Stoßmoment bedeutet, in dem stoßfreien Fall I aber $t^* = +\infty$ gesetzt werden soll, und zwar der Bequemlichkeit halber auch dann, wenn nicht einmal ein Pseudostoß (81b) vorliegt, sondern der durchaus reguläre Unterfall (81a) des Falles (81), d. h. des Falles I. Dann ist $t^*$ ausnahmslos erklärt und es gilt nach (81) und (82)

$$(87) \qquad R(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < t^* (\leqq +\infty).$$

Nehmen wir nun die lokale Regularisierungstransformation (32) vor, wobei $n$ zunächst beliebig ist, d. h. eine willkürlich (aber fest) gewählte positive ganze Zahl bedeutet, die also auch $=1$ sein darf. Da die Funktionen (76) für $0 \leqq t < t^*$ regulär und derart sind, daß $r_\mu(t)$ und $r_{1-\mu}(t)$ nach (80) und (87) beide von Null verschieden sein müssen, so daß also der Punkt $(\xi(t), \eta(t))$ nicht in einen der beiden Punkte (36), (37) hineinfällt, und da andererseits die Ableitung (42) der Abbildungsfunktion mit Rücksicht auf (32) nur in dem Punkte (36), d. h. im Punkte (47) verschwindet, so werden durch (32)

$$(88) \qquad u = u(t), \quad v = v(t),$$

also vermöge (88) auch

$$(89) \qquad \frac{1}{|f^{(1)}(t)|} \equiv \frac{1}{|f^{(1)}(u+iv)|} \quad \text{sowie} \quad (89)^* \qquad \psi(t) \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{|f^{(1)}(\tau)|^2}$$

als für $0 \leqq t < t^*$ reguläre Funktionen erklärt, und zwar ist dabei die Ableitung (89) von $\psi(t)$ durchweg $>0$, so daß $\psi$ für $t \to t^* - 0$ gegen einen Grenzwert $\psi^*$ konvergiert, der allerdings auch $=+\infty$ sein darf. Damit ist schon die durch (25) festgelegte neue Zeitvariable $\psi$ eingeführt, indem die beiden Gebiete $0 \leqq t < t^*$, $0 \leqq \psi < \psi^*$ aufeinander eineindeutig und auf eine beliebig oft differentiierbare Weise bezogen sind: es gilt nach (89), (89)'

$$0 < \psi'(t) < +\infty \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < t^*,$$

also wegen $\psi' = \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\dot{t}}$ auch $0 < \dot{t}(\psi) < +\infty$ für $0 \leqq \psi < \psi^*$

so daß $t = t(\psi)$ eine für $0 \leqq \psi < \psi^*$ eindeutig erklärte reguläre Funktion

ist. Führt man $t = t(\psi)$ in (88) ein, so folgt, daß $u = u(t(\psi))$, $v = v(t(\psi))$ oder kurz

(90) $\quad u = u(\psi), \quad v = v(\psi), \quad$ also auch $\quad \dot{u} = \dot{u}(\psi), \quad \dot{v} = \dot{v}(\psi)$

für $0 \leqq \psi < \psi^*$ reguläre Funktionen sind.

Ich behaupte zunächst, daß in dem stoßfreien Fall I die Funktion $\psi = \psi(t)$ für $t \to t^*$ bei *jedem* $n$ (also auch für $n = 1$) über alle Grenzen wächst. Mit anderen Worten:

(91) $\quad$ Aus $t^* = +\infty$ folgt $\psi^* = +\infty$ bei jedem $n \geqq 1$.

Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, daß $\psi^* < +\infty$ ist. Dann ist die Lösung (90) des regularisierten Differentialsystems für $0 \leqq \psi < \psi^*$ nicht nur regulär, sondern auch beschränkt. Dies folgt nach einem bekannten Satz über reguläre Differentialsysteme, welcher auch ergibt, daß die Funktionen (90) auch noch über $\psi = \psi^*$ hinaus, also etwa für $0 \leqq \psi < \psi^* + \varepsilon^* (> \psi^*)$, eine reguläre Lösung darstellen. Dann ist aber auch $|f^{(1)}(\psi)|^2 \equiv |f^{(1)}(u + iv)|^2$, also nach (25)′ auch $t = \int_0^{\psi} |f^{(1)}(\varphi)|^2 d\varphi$ eine für $0 < \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ reguläre Funktion von $\psi$, und zwar ist die Ableitung $\dot{t} = |f^{(1)}(\psi)|^2$ jedenfalls $\geqq 0$ und höchstens in isolierten Punkten ($\geqq \psi^*$) gleich Null, da $\dot{t}$ für $0 < \psi < \psi^*$ positiv und für $0 < \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ regulär analytisch ist. Es liegt also eine stetige und eineindeutige Abbildung des Intervalles $0 \leqq \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ auf ein Intervall $0 \leqq t < t^* + \delta^*$ vor, wobei $\delta^* > 0$ ist. Dies enthält aber einen Widerspruch, da nach Voraussetzung bereits zu $\psi = \psi^*$ der Wert $t = t^* = +\infty$ gehört. Damit ist (91) bewiesen.

Betrachten wir jetzt den Fall $t^* < +\infty$, d. h. den Fall eines effektiven Stoßes (Fall II, S. 690) mit einer der beiden Massen (36), (37). Es kann angenommen werden, daß der Stoß mit der Masse (36) stattfindet [vgl. S. 683], also mit Rücksicht auf (32), (47) darin besteht, daß $u^2 + v^2$ für $\psi < \psi^*$ positiv ist und für $\psi \to \psi^*$ gegen Null konvergiert. Wenn wir nun, im Gegensatz zu (91), den Fall $n = 1$ ausschließen, so gilt (aber auch *nur* unter dieser Voraussetzung) die Abschätzung (72), d. h. alle vier Funktionen

(92) $\quad u(\psi), \quad v(\psi), \quad \dot{u}(\psi), \quad \dot{v}(\psi) \qquad (0 < \psi \leqq \psi^*)$

konvergieren für $\psi \to \psi^*$ gegen Null, und andererseits ist dann

(93) $\quad u(\psi) \equiv 0, \quad v(\psi) \equiv 0, \quad \dot{u}(\psi) \equiv 0, \quad \dot{v}(\psi) \equiv 0$

eine Lösung der regularisierten Bewegungsgleichungen, indem im Falle $n > 1$ (aber auch nur in diesem Falle) die Abbildung eine so starke Regularisierung herbeiführt, daß die Masse eine Gleichgewichtslage wird (vgl. S. 688). Daraus folgt nun, daß

(94) $\quad$ auch aus $t^* < +\infty$ folgt $\psi^* = +\infty$ bei jedem $n \neq 1$.

Gesetzt nämlich, daß $\psi^* < +\infty$ ist; dann können zu $\psi = \psi^*$ willkürliche Integrationskonstanten vorgeschrieben werden. Wir schreiben die Anfangswerte

$$u(\psi^*) = 0, \quad v(\psi^*) = 0, \quad \dot{u}(\psi^*) = 0, \quad \dot{v}(\psi^*) = 0$$

vor, die nach dem Eindeutigkeitssatz der regulären Differentialsysteme nur eine Lösung der regularisierten Differentialgleichungen festlegen können. Da (92) für $\psi \to \psi^*$ verschwindet, müßten daher die beiden Lösungen (92), (93) auch für $0 \leqq \psi < \psi^*$ identisch sein, im Widerspruch damit, daß $u^2 + v^2$ für $0 \leqq \psi < \psi^*$ von Null verschieden ist, indem der Stoß erst für $\psi \to \psi^*$ zustande kommt. — Damit ist (94) bewiesen.

Was endlich das Verhalten des effektiven Stoßfalles II ($t^* < +\infty$) bei den von Thiele-Burrau, Levi-Civita und Birkhoff betrachteten Abbildungen anlangt, bei welchen der Abbildungsmodul in der Masse zwar verschwindet, aber nur in der ersten Ordnung verschwindet ($n = 1$), so daß die Geschwindigkeit $(\dot{u}, \dot{v})$ bei unbegrenzter Annäherung an die Masse zwar endlich bleibt, aber nicht gegen Null konvergiert und daher keine Verwandlung des restringierten Dreikörperproblems in ein konservatives Oszillatorenproblem mit Gleichgewichtslage herbeiführt (vgl. S. 688 und S. 692), so gilt, wie man sich leicht überzeugt,

$$\psi^* < +\infty \quad \text{für} \quad t^* < +\infty, \quad n = 1 \tag{95}$$

[so daß in (94) tatsächlich alles auf der Annahme $n > 1$ beruht]. Da das Quadrat der Geschwindigkeit, nämlich $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$, für $\psi = \psi^*$ nicht verschwindet, sondern nach (68) gleich $8(1-\mu) > 0$ ist, so kann die Kurve $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, d. h. die regularisierte Bahnkurve, beim Übergang von $\psi = \psi^* - 0$ zu $\psi = \psi^* + 0$ keine Spitze haben, und da andererseits die in der Masse gelegenen Winkel beim Übergang von der $(\xi, \eta)$-Ebene zur $(u, v)$-Ebene wegen $n = 1$ halbiert werden (vgl. S. 683), so muß die Kurve $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, d. h. die nicht regularisierte Bahnkurve, für $t = t^* - 0$ eine Tangente haben, die mit ihrer zu $t = t^* + 0$ gehörigen Tangente zusammenfällt[17]).

## § 6.

## Anwendung auf das Mondproblem.

Wir wollen zunächst unsere Resultate über den Fall $n > 1$ zusammenstellen.

[17]) Zusatz bei der Korrektur (26. 6. 1930). Ich benutze die Gelegenheit, um ein Versehen von mir [Sitzber. der sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 1930, S. 105–119] zu berichtigen: Aus der allgemeinen Gültigkeit von (15) a. a. O. folgt (11) mit (13) a. a. O. dann und nur dann, wenn eine ganzzahlige Kommensurabilität stattfindet, wie das Herr Moulton in seiner a. a. O. zitierten Untersuchung vollständig richtig angegeben hatte. Meine, sich auf (11) stützenden Bemerkungen sind also hinfällig. Leider habe ich dies erst jetzt nachträglich bemerkt.

Zu $t=0$ seien die Anfangswerte (74) vorgeschrieben, für welche die Bedingung (86) erfüllt ist. Kommt dann für $0<t<+\infty$ bei einem $t=t^*$ $(<+\infty)$ ein effektiver Stoß zustande (wobei das Gebiet $0<t<t^*$ noch stoßfrei ist), so können wir annehmen, daß dieser Stoß mit der Masse (36) stattfindet, da die andere Masse, nämlich (37), ebenso behandelt werden kann. Dem stoßfreien Fall I sei hingegen $t^*=+\infty$ zugeordnet, und zwar auch dann, wenn nicht (81 b), sondern (81 a) gilt. — An Stelle des Variablensystems

$$(96)' \qquad \xi,\ \eta,\ X,\ Y;\ t$$

führen wir mittels

$$\xi+i\eta=\mu+(u+iv)^{2n},\quad X+iY=\frac{U+iV}{2n(u-iv)^{2n-1}},\quad \psi=\frac{1}{4n^2}\int_0^t\frac{dt}{(u^2+v^2)^{2n-1}}$$

neue Variable

$$(96) \qquad u,\ v,\ U,\ V;\ \psi$$

ein, wodurch die zu $t=0$ gehörigen Anfangswerte (74) in zu $\psi=0$ gehörige Anfangswerte

$$(97) \qquad u^0,\ v^0,\ \dot u^0,\ \dot v^0;\qquad (u^0)^2+(v^0)^2>0 \qquad (\psi=0)$$

und die Bewegungsgleichungen in

$$(98) \qquad \dot u=\mathsf{H}_U,\quad \dot U=-\mathsf{H}_u,\quad \dot v=\mathsf{H}_V,\quad \dot V=-\mathsf{H}_v$$

übergehen, wobei

$$(99) \qquad \dot x=\frac{dx}{d\psi},\qquad \mathsf{H}_x=\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}$$

gesetzt ist und, unter $C$ die aus (74), (4), (5) eindeutig berechnete Jacobische Integrationskonstante und unter $\mathsf{P}^{\{2n+1\}}(u,v;U,V,C)$ eine in bezug auf das Argumentsystem $U,V,C$ lineare, etwa in dem Bereiche $u^2+v^2\leqq\frac{1}{3}$ gewiß reguläre reelle Potenzreihe verstanden, die in bezug auf das Variablenpaar $(u,v)$ mit Gliedern $(2n-1)$-ter Ordnung beginnt,

$$(100) \quad \mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\mathsf{P}^{\{2n+1\}},\qquad \mathsf{H}_0=\tfrac{1}{2}(U^2+V^2)-4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}$$

ist und das Jacobische Integral, unter $\mathfrak{p}(u,v;C)$ eine von den Geschwindigkeiten oder Impulsen unabhängige, für $u^2+v^2\leqq\frac{1}{3}$ wieder reguläre Potenzreihe verstanden, in der Gestalt

$$(101) \quad \tfrac{1}{2}(\dot u^2+\dot v^2)=4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{p}(u,v;C)$$

oder auch $\mathsf{H}_0=-\mathsf{P}^{\{2n-1\}}$, d. h. $\mathsf{H}=0$ geschrieben werden kann, d. h. der Energiekonstante $\mathsf{H}=h$ darf nur der Wert $h=0$ erteilt werden (da $\mathsf{H}$ bereits die Integrationskonstante $C$ enthält, also analog zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung). — Die zu den Anfangswerten (97) gehörige Lösung

$$(102) \qquad u(\psi),\quad v(\psi),\quad U(\psi),\quad V(\psi)$$

von (98) genügt den Bedingungen

(103) $\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2\to 0,\quad U(\psi)^2+V(\psi)^2\to 0$ für $u(\psi)^2+v(\psi)^2\to 0,$

ist für $0\leqq\psi<+\infty$ regulär und derart, daß $u(\psi)^2+v(\psi)^2>0$ ist. Und zwar gehört $\psi=+\infty$ zu $t=t^*<+\infty$ oder zu $t=t^*=+\infty$, je nach dem Fall II oder Fall I vorliegt. Die Koordinaten der Masse (36), mit welcher im Falle II zur Zeit $t=t^*<+\infty$, d. h. $\psi=+\infty$ ein effektiver Stoß zustande kommt (im Falle I gibt es überhaupt keinen Stoß), sind $u=0$, $v=0$, so daß die Prämisse von (103), nämlich $u(\psi)^2+v(\psi)^2\to 0$, *die natürlich nicht zeitlich, sondern räumlich gemeint ist, d. h. nicht*

(104) $\lim\limits_{\psi\to+\infty}[u(\psi)^2+v(\psi)^2]=0$ bzw. $\lim\limits_{\psi\to+\infty}[\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2]=0,$

*sondern nur*

(105) $\liminf\limits_{\psi\to+\infty}[u(\psi)^2+v(\psi)^2]=0$ bzw. $\liminf\limits_{\psi\to+\infty}[\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2]=0$

*verlangt bzw. zu behaupten gestattet*, räumlich unbegrenzte, zeitlich aber nicht notwendig auf einem zusammenhängenden $\psi$-Gebiet erfolgende Annäherung an die Masse (36) bedeutet:

(103′) $$\begin{aligned}\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2&=o(u(\psi)^2+v(\psi)^2),\\ U(\psi)^2+V(\psi)^2&=o(u(\psi)^2+v(\psi)^2).\end{aligned}$$

Dies besagt aber, daß der Punkt

(106) $$u=0,\quad v=0,$$

d. h. die Masse (36), eine Gleichgewichtslage des regulären Oszillators (98) ist. In der Tat ist

(107) $$u(\psi)\equiv 0,\quad v(\psi)\equiv 0,\quad U(\psi)\equiv 0,\quad V(\psi)\equiv 0$$

mit Rücksicht auf (100) wegen $n>1$ eine Lösung des Differentialsystems (98). Die Hillsche Nullgeschwindigkeitskurve [vgl. (101)]

$$0=4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{P}(u,v;C)$$

ist nach bekannten Sätzen bei hinreichend großem $C$ eine reelle Kurve in der $(u,v)$-Ebene, die einen kreisähnlichen Zweig hat, der für $C\to+\infty$ auf die Masse (106), die er umschließt, zusammenschrumpft und die Eigenschaft hat, daß wenn der Planet — bei gegebenem Werte von $C$ — zur Zeit $\psi=0$ in dem Innengebiete der Ovale war, dies für alle $\psi$ der Fall sein muß, d. h. das Außengebiet der Ovale ist dann ein für $0<\psi<+\infty$ verbotenes Gebiet. Bei hinreichend großem $C$ ist die andere Masse außerhalb der „Ovale“ gelegen. Der Erdmond befindet sich im Innern einer solchen Ovale, d. h. der numerische Wert von $C$ ist im Falle des Erdmondes „hinreichend groß“. Ich will hier auf die Rechnung nicht eingehen, da die Sache mit Rücksicht auf die Hillschen Rechnungen ohne weiteres

einleuchtet. — Betrachten wir nun die beiden Fälle I, II (d. h. $t^* = +\infty$, $t^* < +\infty$) gesondert, und zwar zunächst den zweiten Fall.

Ist $t^* < +\infty$, so konvergiert der Mond für $t \to t^* - 0$ gegen die Masse, d. h. es gilt

$$\lim_{t \to t^* - 0} [u(\psi)^2 + v(\psi)^2] = 0,$$

oder da $t \to t^* - 0$ zu $\psi \to +\infty$ gehört (S. 692), einfach (104), und daher mit Rücksicht auf (103) oder (103)′

$$(107^*) \quad \lim_{\psi \to +\infty} u(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} v(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} U(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} V(\psi) = 0,$$

d. h. der Stoß besteht darin, daß die Lösung gegen die Gleichgewichtslösung (107) konvergiert. *Die effektiven Stoßlösungen* (Fall II) *erscheinen also als asymptotische Lösungen im Sinne von Poincaré*[18]), sie konvergieren für $\psi \to +\infty$ gegen die Gleichgewichtslage, d. h. die Masse, und zwar mit einer gegen Null konvergierenden Geschwindigkeit. Die Bewegung wird bei wachsendem $\psi$ so langsam (also das Formelsystem für numerische Zwecke ebenso unbrauchbar wie vor der Transformation, wobei die Geschwindigkeit für $t \to t^*$ unendlich wird), daß für $\psi \to +\infty$ nur der erste Stoßmoment $t = t^* < +\infty$ erreicht wird, während im Thieleschen Fall ($n = 1$) zu $\psi \to +\infty$ stets $t \to +\infty$ gehört, d. h. man kann die Bewegung über den Stoß hinaus fortsetzen und zwar bis $t = +\infty$, wobei sich auf jedem endlichen $t$-Intervall nur endlich viele Stöße ergeben; vgl. S. 683, S. 689, S. 693.

Da es Stoßlösungen tatsächlich gibt, so existieren auch unsere asymptotischen Lösungen. Sie bilden aber in dem Phasenraume eine „Ausnahme". Bezeichnet nämlich $\boldsymbol{R}$ den vierdimensionalen (reellen) Raum der zu $\psi = 0$ vorgeschriebenen Anfangswerte (97) und $\boldsymbol{S}$ diejenige Teilmenge von $\boldsymbol{R}$, deren Punkte Anfangswerte von effektiven Stoßlösungen, d. h. von asymptotischen Lösungen der Gleichgewichtslösung darstellen, so folgt aus einem von Herrn Painlevé vermuteten, von Herrn Levi-Civita[19]) sichergestellten Satz, daß $\boldsymbol{S}$ auf einer dreidimensionalen analytischen Fläche des vierdimensionalen Phasenraumes $\boldsymbol{R}$ (also in $\boldsymbol{R}$ erst recht nicht überall dicht) liegt, so daß das Nichtvorliegen einer effektiven Stoßbahn in kon-

[18]) Dieser Umstand wirft, mit Rücksicht auf die Untersuchungen der Herren K. F. Sundman [Acta Soc. Scient. Fennicae **34** (1907), Nr. 6, S. 18ff.] und J. Chazy [Bull. Astr. **35** (1918), S. 321ff.], ein neues Licht auf das zur Zeit durchaus ungelöste funktionentheoretische Problem bei einem ternären Stoß in dem eigentlichen Dreikörperproblem: es wäre denkbar, daß die Schwierigkeiten nur durch die Benützung einer nicht sinngemäßen Zeitvariable bedingt werden, in welcher die Bewegung asymptotisch ist. Die exakten Lagrangeschen Lösungen des Dreikörperproblems, die zugleich ternäre Stoßlösungen sind, zeigen, daß eine analytische Fortsetzung sehr wohl möglich ist, trotzdem die Sundman-Chazysche Zeitvariable versagt, d. h. eine asymptotische Bewegung ergibt.

[19]) T. Levi-Civita, Annali di Mat. (3) **9** (1903), S. 1ff.

kreten Fällen prinzipiell beweisbar ist. Es hat also einen guten Sinn zu sagen, daß der Fall II eines effektiven Stoßes ein Ausnahmefall ist. Nun ist aber für die effektive Stabilität einer festen Lösung noch nicht hinreichend, daß sie einerseits im Innern eines geschlossenen massennahen Ovals (108) liegt und andererseits keine effektive Stoßlösung ist.

Betrachten wir nämlich den stoßfreien Fall I, d. h. die Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{S}$. Hier sind zwei Unterfälle möglich, nämlich eine vollständig reguläre Bewegung mit (81a) und eine Pseudostoßbewegung mit (81b), d. h. mit (105) [ohne (104)]. Die entsprechenden Teilmengen von $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{S}$ sollen bzw. mit $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ bezeichnet werden, so daß also $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ ist. Die durch die vier Integrationskonstanten (97) definierte Bewegung kann nur dann effektiv stabil genannt werden, wenn (97) nicht nur nicht auf $\boldsymbol{S}$, sondern nicht einmal auf der Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{Q}$ des Pseudostoßes gelegen ist. Nun weiß man aber von $\boldsymbol{Q}$ gar nichts, man weiß nicht, ob $\boldsymbol{Q}$ nicht leer ist, man weiß aber auch nicht, ob $\boldsymbol{Q}$ in $\boldsymbol{R}$ nicht überall dicht liegt, man weiß nicht einmal, ob $\boldsymbol{P}$ im Innern einer Grenzkurve nicht lauter periodische Lösungen und keine weiteren Bahnen darstellt.

Beschränken wir uns nun auf Punkte (97) von $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{S}$, bei welchen der Punkt $(u^0, v^0)$ innerhalb der zugehörigen Ovale (108) liegt, welche die Masse $u = v = 0$ umschließt, die andere Masse aber ausschließt. Da $u = v = 0$ die Gleichgewichtslage eines konservativen kanonischen Oszillators ist, müßte man dann nach den (zur Zeit weder bewiesenen noch widerlegten) Prinzipien der statistischen Mechanik annehmen, daß diejenigen Punkte von $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{S}$, bei welchen die abgeschlossene Hülle der zugehörigen Bahnkurve in der $(u, v)$-Ebene nicht ein die Gleichgewichtslage $u = v = 0$ in seinem Innern enthaltendes Flächenstück ist, die Regel, d. h. eine Menge mit einer vierdimensionalen Nullmenge als Komplementärmenge oder wenigstens eine überall dichte Menge bilden, womit der Umstand, daß die Levi-Civitasche Theorie der adiabatischen Invarianten von Herrn Geppert auf einem von der statistischen Mechanik unabhängigen Wege, einfach aus der Theorie der Integralinvarinten hergeleitet werden konnte, in gutem Einklang steht. Mit Rücksicht auf unser Korrespondenzprinzip, das das Mondproblem in ein reguläres Oszillatorenproblem verwandelt, wäre also im *Rahmen der statistischen Mechanik* folgendes zu behaupten: Die Pseudostoßmannigfaltigkeit $\boldsymbol{Q}$ liegt, *im Gegensatz zu der effektiven Stoßmannigfaltigkeit* $\boldsymbol{S}$, überall dicht in der Phasenmannigfaltigkeit $\boldsymbol{R}$. Es ist aber nicht zu vergessen, daß die Jacobische Konstante fest vorgeschrieben ist, also es sich von vornherein um isoenergetische Mannigfaltigkeiten handelt [20]).

[20]) Wegen der in Frage kommenden Hypothese vgl. insb. H. Kneser, Math. Annalen 84 (1921), S. 294.

Unser Korrespondenzprinzip, welches dieser Betrachtung zugrunde liegt, war früher nicht bekannt, da es, wie wir wissen, erst durch den Übergang von $n=1$ zu $n>1$ ermöglicht wird. — Herr Levi-Civita vertrat jedenfalls die Ansicht, daß $Q$ ebenso abgegrenzt („lokalisiert") werden kann wie $S$, und hat hierfür auch einen Beweis in Aussicht gestellt[21]). Genauer handelt es sich dabei um „kreisähnliche" massennahe Bahnen und um eine Benützung einer auf Poincaré[22]) zurückgehenden Reduktion auf einen Freiheitsgrad, die von Herrn Levi-Civita[23]) näher untersucht worden ist; einem alle Einzelheiten durchführenden Beweise stehen aber zur Zeit noch manche Schwierigkeiten im Wege. Ich stütze mich dabei auf freundliche mündliche Mitteilungen von Herrn Levi-Civita. — Mehr kann man heute jedenfalls nicht behaupten, als daß das Mondproblem mit dem Problem der Bahnformen eines regulären Oszillators äquivalent ist; genauer haben wir bei jedem $C$ einen Oszillator mit der Energie $h=0$ zu betrachten.

So hat man auch einen bequemen Störungsapparat zur Behandlung von massennahen Bahnen in der Hand. Da nämlich $\mathsf{H}$ in (100) in $\mathsf{H}_0$ und $\mathsf{P}$ additiv zerfällt und $\mathsf{H}_0$ von der Ordnung $n-1\,(>0)$, $\mathsf{P}$ aber nur von der Ordnung $2n-1$ ist, so kann man $\mathsf{P}$ als eine Störungsfunktion auffassen, also in (98) $\mathsf{H}$ zunächst durch $\mathsf{H}_0$ ersetzen. Die zugehörige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung $\mathsf{H}_0=0$ ist mit Rücksicht auf (100) in den Polarkoordinaten der kartesischen $(u,v)$-Ebene offenbar separierbar, die „ungestörte" (der Keplerschen entsprechende) Bewegung ist bei beliebigen Werten der massennahen Integrationskonstanten periodisch, sind ferner $\alpha$, $\beta$, A, B die bei der Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung $\mathsf{H}_0=0$ erhaltenen kanonischen Integrationskonstanten, so kann (98) nach der Theorie der Variation der Konstanten in der Gestalt

$$(98)' \qquad \dot{\alpha}=\mathsf{P}_A, \quad \dot{A}=-\mathsf{P}_\alpha, \quad \dot{\beta}=\mathsf{P}_B, \quad \dot{B}=-\mathsf{P}_\beta$$

von Lagrangeschen Störungsgleichungen geschrieben werden, womit aber, was ein Verhalten für $\psi\to+\infty$ anlangt, wegen der diophantischen kleinen Divisoren[24]) genau so wenig gewonnen ist wie in der klassischen Theorie. (Damit dürfte auch die eigentliche Quelle der Schwierigkeiten aufgewiesen sein, auf welche Herr Levi-Civita gestoßen ist.)

Kopenhagen, den 28. Mai 1930.

---

[21]) T. Levi-Civita, Comptes Rendus du 2me Congr. Intern. de Méc. Appl., Zürich (1926).
[22]) H. Poincaré, Méth. nouv. 2 (1893), S. 368 ff.
[23]) T. Levi-Civita, Annali di Mat. (3) 5 (1901), S. 221–308.
[24]) Vgl. J. Horn, Journ. f. reine u. angew. Math 126 (1903), S. 219 ff.

(Eingegangen am 3. Juni 1930.)

# Zum Waringschen Problem.

## Dritte Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Alle kleinen lateinischen Buchstaben und $N$ bezeichnen ganze Zahlen; $C_1, C_2, C_3$ positive, nur von $s$ abhängige Zahlen.

In meiner Arbeit *Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems* [Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 319—338] bewies ich mit jener neuen (etwas vereinfachten) Methode unter anderm den Hardy-Littlewoodschen

Satz. *Es sei* $k > 2$, $s \geqq (k-2)\,2^{k-1} + 5$, $N > 0$, $r(N) = r(N; k, s)$ *die Lösungszahl von*

$$N = \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k, \qquad h_\nu > 0.$$

*Für* $q > 0$ *sei, wenn* $\varrho$ *die primitiven* $q$*-ten Einheitswurzeln durchläuft,*

$$A_q = q^{-s} \sum_{\varrho} \varrho^{-N} \left( \sum_{h=1}^{q} \varrho^{h^k} \right)^s = A_q(N; k, s).$$

*Dann ist*

$$|A_q| < C_1 q^{-\frac{9}{8}} \tag{1}$$

*und,*

$$\mathfrak{S}_N = \sum_{q=1}^{\infty} A_q = \mathfrak{S}(N; k, s)$$

*gesetzt,*

$$r(N) = \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} + o\left(N^{\frac{s}{k}-1}\right). \tag{2}$$

Ich will heute durch das modd Hardy-Littlewood für andere Anwendungen so dicht gewachsene Gestrüpp des Kap. 2 des VI. Teils meiner

*Vorlesungen über Zahlentheorie* [Leipzig, 1927] den kürzesten Weg schlagen, um hieraus den Hardy-Littlewoodschen Satz

$$\overline{\lim_{N=\infty}} \frac{r(N)}{N^{\frac{s}{k}-1}} > 0$$

zu beweisen. Nach (2) ist es hinreichend, zu zeigen

$$\mathfrak{S}_N \geqq C_2.$$

Für jede Primzahl $p$ sei $g = g(p)$ eine, nach den Elementen der Zahlentheorie (vgl. z. B. S. 81—82 des Bd. 1 meiner *Vorlesungen*) vorhandene Zahl, die im Falle $p = 2$ bei jedem $l > 1$ zum Exponenten $p^{l-2}(p-1)$, bzw. im Falle $p > 2$ bei jedem $l > 0$ zum Exponenten $p^{l-1}(p-1) \bmod p^l$ gehört; im Falle $p = 2$ ist also jede Zahl $4m+1$, im Falle $p > 2$ jede zu $p$ teilerfremde Zahl $\equiv g^b \pmod{p^l}$ bei passendem $b \geqq 0$. Ferner bezeichne $\Theta = \Theta(p, k) (\geqq 0)$ die Vielfachheit, zu der $p$ in $k$ aufgeht, und es sei $\gamma = \Theta + 2$ bzw. $\Theta + 1$ für $p = 2$ bzw. $p > 2$, also $\gamma < 2^\Theta + 2 \leqq k + 2 < C_3$.

Für $m > 0$ bezeichne $M(m) = M(m, N; k, s)$ die Lösungszahl von

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \equiv N \pmod m, \qquad 1 \leqq h_\nu \leqq m. \tag{3}$$

Satz 1.

$$\sum_{q \mid m} A_q = m^{-(s-1)} M(m).$$

Vorbemerkung. Für $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $(m_1, m_2) = 1$ ist

$$(m_1 m_2)^{-(s-1)} M(m_1 m_2) = m_1^{-(s-1)} M(m_1)\, m_2^{-(s-1)} M(m_2),$$

also nach Satz 1

$$\sum_{q \mid m_1 m_2} A_q = \sum_{q \mid m_1} A_q \cdot \sum_{q \mid m_2} A_q.$$

Hieraus folgt, wenn $p_n$ die $n$-te Primzahl ist, für $l > 0$

$$\sum_{q \mid p_1^l \cdots p_l^l} A_q = \prod_{p \leqq p_l} \sum_{q \mid p^l} A_q. \tag{4}$$

Beweis. Läuft $\varrho$ durch alle $m$-ten Einheitswurzeln und ist $q = q(\varrho)$ der zugehörige Grad, so ist

$$m^{-(s-1)} M(m) = m^{-s} \sum_{h_1, \ldots, h_s = 1}^{m} \sum_{\varrho} \varrho^{h_1^k + \cdots + h_s^k - N} = \sum_{\varrho} q^{-s} \varrho^{-N} \left( \frac{q}{m} \sum_{h=1}^{m} \varrho^{h^k} \right)^s$$

$$= \sum_{\varrho} q^{-s} \varrho^{-N} \left( \sum_{h=1}^{q} \varrho^{h^k} \right)^s = \sum_{q \mid m} A_q.$$

Satz 2. (3) *hat für* $m = p^\gamma$ *eine Lösung mit* $p \nmid h_1$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 < N \leqq p^\gamma$. Wegen $p^\gamma = 1^k + (p^\gamma - 1)$ genügt es, für $0 < N < p^\gamma$ zu zeigen:

$$\sum_{\nu=1}^{s-1} h_\nu^k \equiv N \pmod{p^\gamma}$$

besitzt eine Lösung, in der nicht alle $h_\nu$ durch $p$ teilbar sind.

1. Ist $p^\gamma \leqq s$, so leistet

$$h_1 = \ldots = h_N = 1, \quad h_{N+1} = \ldots = h_{s-1} = 0$$

das Gewünschte. Für $p = 2$, $k = 3$ ist $p^\gamma = 4 < 9 \leqq s$; für $p = 2$, $k > 3$ ist $p^\gamma = 2^{\Theta+2} \leqq 4k < s$; für $p > 2$, $p|k$ ist $p^\gamma = p^\Theta p \leqq k^2 \leqq s$.

2. Es darf also $p > 2$, $p \nmid k$ angenommen werden. Dann ist $\gamma = 1$. Zu jedem $N$ mit $0 < N < p$ gibt es ein $c \geqq 0$ und ein $d$ mit $0 \leqq d < k$, so daß

$$N \equiv g^{d+ck} \pmod{p}.$$

Für zwei $N$, denen dasselbe $d$ entspricht, ist offenbar die Minimalanzahl $w(N)$ der zur additiven Bildung $\bmod p$ erforderlichen $k$-ten Potenzen (deren Basen eo ipso nicht alle durch $p$ teilbar sind) dieselbe. $w(N)$ hat also für $0 < N < p$ höchstens $k$ verschiedene Werte; $v(N) = \underset{1 \leqq n \leqq N}{\text{Max}}\, w(n)$ also auch. Es ist $v(1) = 1$; $v(N) - v(N-1)$ ist für $1 < N < p$ (wegen $N = 1^k + (N-1)$) höchstens 1; daher ist

$$v(p-1) \leqq k < s - 1.$$

Satz 3. *Ist*

$$a \equiv y^k \pmod{p^\gamma}, \quad p \nmid y, \quad l \geqq \gamma,$$

*so ist*

$$a \equiv h^k \pmod{p^l}$$

*lösbar.*

Beweis. Man wähle $b \geqq 0$ mit

$$a \equiv y^k g^b \pmod{p^l}.$$

Dann ist

$$g^b \equiv 1 \pmod{p^\gamma},$$

also

$$p^\Theta (p-1) | b.$$

Wegen

$$(k(p-1),\ p^{l-\gamma+\Theta}(p-1)) = p^\Theta (p-1)$$

gibt es also ein $c \geqq 0$ mit

$$b \equiv ck(p-1) \pmod{p^{l-\gamma+\Theta}(p-1)}.$$

Alsdann ist

$$g^b \equiv g^{ck(p-1)} \pmod{p^l},$$

$$a \equiv (y g^{c(p-1)})^k \pmod{p^l}.$$

Satz 4.

$$M(p^l) \geqq p^{(l-\gamma)(s-1)} \quad \textit{für} \quad l \geqq \gamma.$$

Vorbemerkung. Nach Satz 1 ist also für $l > C_3$

$$\sum_{q \mid p^l} A_q \geqq p^{-\gamma(s-1)}. \tag{5}$$

Beweis. Nach Satz 2 gibt es ein $y$ mit $p \nmid y$ und $p^{(l-\gamma)(s-1)}$ Systeme $h_2, \ldots, h_s$ mit

$$y^k + \sum_{\nu=2}^{s} h_\nu^k \equiv N \pmod{p^\gamma}, \qquad 1 \leqq h_\nu \leqq p^l \quad \text{für} \quad 2 \leqq \nu \leqq s.$$

Jedesmal wähle man $h_1$ nach Satz 3 mit

$$h_1^k \equiv N - \sum_{\nu=2}^{s} h_\nu^k \pmod{p^l}, \qquad 1 \leqq h_1 < p^l.$$

Hauptsatz.

$$\mathfrak{S}_N \geqq C_3.$$

Beweis. Nach (1) strebt für $l \to \infty$ die linke Seite von (4) gegen $\mathfrak{S}_N$, und es ist für $l \geqq 0$

$$\sum_{q \mid p^l} A_q > 1 - C_1 \sum_{n=1}^{\infty} p^{-\frac{g}{8}n},$$

also für $l > C_3$ nach (5)

$$\prod_{p \leqq p_l} \sum_{q \mid p^l} A_q \geqq \prod_{p} \operatorname{Max}\left(p^{-\gamma(s-1)},\ 1 - \frac{C_1}{p^{\frac{g}{8}} - 1}\right) \geqq C_3.$$

Göttingen, den 19. Juni 1930.

(Eingegangen am 20. Juni 1930.)

# Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in München.

## § 1.

## Einleitung.

Die bisherigen Untersuchungen über Stabilität haben im wesentlichen gezeigt[1]), daß die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

wenn die Zusatzfunktionen $\varphi_\nu$ im Vergleich zu den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, im allgemeinen ebenso groß ist, wie wenn die Zusatzfunktionen gar nicht da wären. Die Raschheit der Konvergenz nach Null ist dabei mit der Exponentialfunktion $e^{-\varrho t}$, vergleichbar, wobei $-\varrho$ der Realteil einer charakteristischen Wurzel, d. h. einer Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

ist. Der Fall, der soeben durch die Worte „im allgemeinen" charakterisiert wurde, liegt vor, wenn kein Realteil gleich Null ist. Wenn insbesondere bei dem (linearen) System ohne Zusatzfunktionen *jedes* Integral für $t \to \infty$ nach Null strebt, was nur eintritt, wenn alle Realteile negativ sind, so hat auch bei dem System mit Zusatzfunktionen *jedes* Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, die Eigenschaft, daß $|x_\nu(t)|$ dauernd sehr klein bleibt und für $t \to \infty$ nach Null konvergiert (Fall der

[1]) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 129—160. Daselbst auch die wichtigste weitere Literatur.

Stabilität). Auf die genaue Formulierung der Bedingungen, die von den Zusatzfunktionen $\varphi_\nu$ zu fordern sind, kann in dieser Einleitung verzichtet werden.

Die bisher benutzten Methoden arbeiten durchweg mit den charakteristischen Wurzeln und lassen sich daher nicht auf Systeme der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

übertragen, wo die $f_{\nu\mu}(t)$ beliebige stetige beschränkte Funktionen von $t$ sind. Nach dem Gesagten wird man aber in bezug auf das System (2) zunächst vermuten, daß die Mannigfaltigkeit der für $t \to \infty$ nach Null strebenden Integrale „im allgemeinen" ebenso groß ist wie wenn die Zusatzfunktionen $\varphi_\nu$ nicht da wären. Insbesondere ist, wenn bei Weglassen der Zusatzfunktionen *jedes* Integral für $t \to \infty$ nach Null strebt, oder wenigstens, wenn es das mindestens so rasch tut wie eine Exponentialfunktion $e^{-\varrho t}$, zu vermuten, daß dann auch bei dem System mit Zusatzfunktionen *jedes* Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, die Eigenschaft hat, daß $|x_\nu(t)|$ dauernd sehr klein bleibt und für $t \to \infty$ nach Null konvergiert.

Nach längeren Versuchen, diese Vermutungen zu beweisen, fand ich schließlich, daß sie gar nicht richtig sind, selbst dann nicht, wenn man die Worte „im allgemeinen" ungebührlich eng faßt und für die Zusatzfunktionen $\varphi_\nu$ wirklich nur die allerharmlosesten zuläßt. Das wird zunächst in § 2 an einem Beispiel gezeigt werden. Sodann entsteht natürlich die Aufgabe, die falsche Vermutung durch einen richtigen Satz zu ersetzen. Es zeigt sich, daß man das über das System (1) Gesagte nur wenig zu modifizieren braucht, um eine genaue Übertragung auf (2) zu ermöglichen. Wenn man nämlich bei (1) noch die Voraussetzung hinzufügt, daß das *lineare* System

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{u=1}^{n} a_{\nu\mu} x_u + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben soll, so verliert die über (1) gemachte Aussage dadurch nichts an Tragweite. Denn diese Voraussetzung ist, wie sich leicht beweisen läßt, in dem Fall, den wir durch die Worte „im allgemeinen" gekennzeichnet haben, wenn also die Realteile aller charakteristischen Wurzeln von Null verschieden sind, stets von selbst erfüllt.

In dieser Form läßt sich nun die Sache auf das System (2) übertragen. Die obigen Vermutungen werden nämlich richtig, und man darf sogar die unerfreulichen Worte „im allgemeinen" dabei ganz streichen, wenn

man noch die Voraussetzung hinzufügt, daß das *lineare* System

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, .., n) \tag{4}$$

für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ immer wenigstens ein beschränktes Integral haben soll. Der Unterschied gegenüber dem Früheren ist aber, daß diese Voraussetzung jetzt nicht mehr von selbst erfüllt ist, sondern eine wesentlich neue Forderung darstellt. Die genau formulierten Sätze dieser Art sind als Teilresultate in den Sätzen des § 6 und § 7 enthalten.

Diese Sätze wären natürlich wertlos, wenn man bei einem vorgelegten System (2) wirklich erst prüfen müßte, ob das zugehörige System (4) für beliebige stetige beschränkte $\psi_\nu(t)$ immer ein beschränktes Integral hat; denn man kann nicht alle möglichen $\psi_\nu(t)$ durchprobieren. Aber die Antwort, ob es immer ein beschränktes Integral gibt, kann aus dem Verhalten der gegebenen Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ allein oder, was dasselbe sagt, aus den Integralen des *homogenen* Systems

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erschlossen werden. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind für einen Spezialfall in Satz 1 niedergelegt, und in § 6 und § 7 zeigt es sich, daß der allgemeine Fall sich stets auf diesen Spezialfall transformieren läßt.

Wir werden aber in dieser Arbeit nicht nur solche Zusatzfunktionen $\varphi_\nu$ ins Auge fassen, die gegenüber den linearen Gliedern absolut sehr klein sind, sondern auch solche, die nur einer Beschränktheitsforderung genügen. Dann handelt es sich nicht um Integrale, die für $t \to \infty$ nach Null streben, sondern um *beschränkte* Integrale. Durch Mitbehandlung dieses Problems erhalten die Untersuchungen erst die wünschenswerte Abgeschlossenheit, indem die als hinreichend erkannten Bedingungen jetzt auch notwendig sind. Vgl. z. B. die Sätze 5 und 8.

## § 2.

## Beispiel eines unerwarteten Verhaltens.

Das lineare System

$$\begin{cases} x_1' = -a x_1 & (a > 0), \\ x_2' = (\sin\log t + \cos\log t - 2a)\, x_2, \end{cases} \tag{5}$$

wo der Akzent die Ableitung nach $t$ bedeutet, hat das allgemeine Integral

$$x_1 = C_1 e^{-at},$$
$$x_2 = C_2 e^{(\sin\log t - 2a)t}.$$

Wenn $2a < 1$ ist, hat nur eine einparametrige Schar von Integralen, nämlich die für $C_2 = 0$ entstehende, die Eigenschaft, daß

$$\lim_{t \to \infty} (|x_1| + |x_2|) = 0 \tag{6}$$

ist, und für diese Schar ist sogar

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|x_1| + |x_2|}{e^{-ct}} = 0, \tag{7}$$

wenn nur $c < a$ gewählt wird.

Wenn dagegen $2a > 1$ ist, gilt für *jedes* Integral die Beziehung (6), ja sogar (7), wenn nur $c < \text{Min}(a, 2a - 1)$ gewählt wird.

Nun betrachten wir das abgeänderte System

$$\begin{cases} x_1' = -a x_1, \\ x_2' = (\sin \log t + \cos \log t - 2a) x_2 + x_1^2. \end{cases} \tag{8}$$

Die Zusatzfunktionen 0 und $x_1^2$ werden für $|x_1| + |x_2| \to 0$ von zweiter Ordnung klein und lassen gewiß nichts an Einfachheit zu wünschen, so daß man für die Integrale von (8) das gleiche Verhalten wie bei dem System (5) erwarten sollte. Das allgemeine Integral von (8) ist aber

$$x_1 = C_1 e^{-at},$$

$$x_2 = e^{(\sin \log t - 2a)t} \left( C_2 + C_1^2 \int_0^t e^{-\tau \sin \log \tau} d\tau \right).$$

Speziell für $t = e^{(2n + \frac{1}{2})\pi}$, wo $n$ eine positive ganze Zahl bedeutet, ist

$$e^{(\sin \log t - 2a)t} = e^{(1-2a)t},$$

und es gilt die Abschätzung

$$\int_0^t e^{-\tau \sin \log \tau} d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{3}{8}\pi}} e^{-\tau \sin \log \tau} d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{3}{8}\pi}} e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-\frac{3}{8}\pi}} e^{\frac{1}{2}te^{-\pi}} d\tau$$

$$= e^{\frac{1}{2}te^{-\pi}} t (e^{-\frac{3}{8}\pi} - e^{-\pi}).$$

Wenn daher $2a < 1$ ist, kann $x_2$ für $t \to \infty$ nie nach Null konvergieren, außer wenn $C_1, C_2$ beide verschwinden. Im Gegensatz zu dem System (5) gibt es also bei (8) kein Integral, das der Forderung (6) oder gar (7) genügt.

Wenn dagegen $2a > 1$, aber zugleich $2a < 1 + \frac{1}{2} e^{-\pi}$ ist, kann $x_2$ für $t \to \infty$ nur dann nach Null gehen, wenn $C_1 = 0$ ist, und in diesem Fall gilt auch wirklich die Beziehung (6) und sogar (7) für genügend kleines $c$. Im Gegensatz zu dem System (5) genügt also jetzt nicht jedes Integral (mit hinreichend kleinen $|x_r(0)|$) der Forderung (6), sondern nur einer einparametrigen Schar von Integralen kommt diese Eigenschaft zu.

## § 3.

## Vorbereitende Sätze.

Vorbemerkung. In der ganzen Arbeit ist die unabhängig Variable $t$ reell und durchläuft das unendliche Intervall $t \geqq 0$. Die vorkommenden Funktionen dürfen aber auch beliebige komplexe Werte annehmen, insbesondere sind für die Integrale der Differentialgleichungen komplexe Werte zugelassen. Die Ableitung nach $t$ wird durch einen Akzent bezeichnet.

Wir betrachten zunächst das folgende spezielle System von linearen Differentialgleichungen

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Es ist dadurch ausgezeichnet, daß die Koeffizienten $g_{\nu\mu}(t)$ für $\nu < \mu$ (d. h. oberhalb der Hauptdiagonale) gleich Null sind. Für jedes $\nu$ enthalten daher die ersten $\nu$ Gleichungen auch nur die ersten $\nu$ Unbekannten. Für ein solches System beweisen wir jetzt den

Satz 1. *Die gegebenen Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

*seien für $t \geqq 0$ stetig und beschränkt. Notwendig und hinreichend dafür, daß dann das System* (9) *bei jeder Wahl der stetigen beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, ist die folgende Eigenschaft der Funktionen $g_{\nu\nu}(t)$, wobei zur Abkürzung $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau = G_\nu(t)$ gesetzt ist:*

*Für jeden der Indizes $\nu = 1, \ldots, n$ ist entweder*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \text{beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int_0^t \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau & \text{beschränkt,} \end{cases}$$

*oder aber*

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \text{nicht beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int_t^\infty \left| e^{-G_\nu(\tau)} \right| d\tau & \text{vorhanden und beschränkt.} \end{cases}$$

Man beachte dabei, daß die Bedingungen (A) und (B) für ein und denselben Index $\nu$ sich gegenseitig ausschließen.

Den Beweis von Satz 1 verbinden wir mit dem Beweis von

Satz 2. *Wenn das System* (9) *bei jeder Wahl der stetigen beschränkten Funktionen $\omega_\nu(t)$ wenigstens ein beschränktes Integral hat, wenn also die*

*Bedingungen von Satz* 1 *erfüllt sind, so gilt für jedes beschränkte Integral des homogenen Systems*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*die Beziehung*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Dem Beweis der beiden Sätze schicken wir einen Hilfssatz voraus, der auch später noch gute Dienste leisten wird.

Hilfssatz. *Ist $G(t)$ eine für $t \geqq 0$ stetige Funktion und sind die Funktionen*

$$e^{G(t)}, \quad e^{G(t)} \int_0^t |e^{-G(\tau)}|\, d\tau$$

*beschränkt, so ist* $\lim_{t\to\infty} e^{G(t)} = 0$.

In der Tat, wenn etwa

$$|e^{G(t)}| \leqq L_1, \quad |e^{G(t)}| \int_0^t |e^{-G(\tau)}|\, d\tau \leqq L_2$$

ist, so hat man die Abschätzung

$$L_2 \geqq |e^{G(t)}| \int_0^t \frac{1}{L_1} d\tau = |e^{G(t)}| \frac{t}{L_1}.$$

Daher ist

$$|e^{G(t)}| \leqq \frac{L_1 L_2}{t},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Nun wenden wir uns dem Beweis der beiden Sätze zu. Zunächst sei $n = 1$. Dann handelt es sich um die eine Differentialgleichung

$$x_1' = g_{11}(t)\, x_1 + \omega_1(t) \tag{10}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$x_1 = e^{G_1(t)} \left( c_1 + \int_0^t \omega_1(\tau) e^{-G_1(\tau)}\, d\tau \right), \tag{11}$$

wo $c_1 = x_1(0)$ eine willkürliche Konstante ist. Indem wir für $\omega_1(t)$ die spezielle Funktion

$$\omega_1(t) = \frac{|e^{-G_1(t)}|}{e^{-G_1(t)}}$$

setzen, die ja offenbar beschränkt, nämlich absolut gleich 1 ist, erhalten wir

$$x_1 = e^{G_1(t)} \left( c_1 + \int_0^t |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau \right). \tag{11a}$$

Wenn nun $e^{G_1(t)}$ beschränkt ist, dann muß, damit ein beschränktes Integral $x_1$ vorhanden ist, offenbar auch

$$e^{G_1(t)} \int_0^t |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (11a) und allgemeiner auch das Integral (11) für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ wirklich beschränkt, und zwar bei jeder Wahl von $c_1$.

Wenn dagegen $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so kann das Integral (11a) nur dann beschränkt sein, wenn für die Konstante $c_1$ der Wert

$$-\int_0^\infty |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau$$

gewählt wird. Dieses Integral muß also existieren, und die rechte Seite von (11a) geht dann über in

$$-e^{G_1(t)} \int_t^\infty |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau. \tag{12}$$

Notwendig ist daher, daß diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend; denn das Integral (11) geht dann für den speziellen Wert

$$c_1 = -\int_0^\infty \omega_1(\tau)\, e^{-G_1(\tau)}\, d\tau$$

über in

$$x_1 = -e^{G_1(t)} \int_t^\infty \omega_1(\tau)\, e^{-G_1(\tau)}\, d\tau,$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (12) augenscheinlich für jede beschränkte Funktion $\omega_1(t)$ selbst beschränkt. Damit ist der Satz 1 für $n = 1$ bewiesen.

Wenn nun zunächst immer noch $n = 1$ und wenn die Bedingung von Satz 1 erfüllt ist, so folgt speziell für $\omega_1(t) = 0$ aus (11)

$$x_1 = c_1\, e^{G_1(t)}.$$

Wenn daher $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so kann $x_1$ nur für $c_1 = 0$ beschränkt sein, und dann ist dauernd $x_1 = 0$, also gewiß: $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$.

Wenn dagegen $e^{G_1(t)}$ beschränkt und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (A) in Satz 1) auch

$$e^{G_1(t)} \int_0^t |e^{-G_1(\tau)}|\, d\tau$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz

$$\lim_{t\to\infty} e^{G_1(t)} = 0,$$

und daher wiederum: $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$. Damit ist auch der Satz 2 für $n = 1$ bewiesen.

Nunmehr beweisen wir die Sätze 1 und 2 durch vollständige Induktion, indem wir annehmen, daß beide bereits für das System von $n-1$ Gleichungen

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{13}$$

gelten. Das System (9) geht daraus hervor, indem wir noch die $n$-te Gleichung mit der neuen Unbekannten $x_n$ hinzufügen:

$$x_n' = g_{nn}(t)\, x_n + \sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu + \omega_n(t). \tag{14}$$

Hieraus folgt, wenn $x_n(0) = c_n$ gesetzt wird,

$$x_n = e^{G_n(t)} \Big( c_n + \int_0^t \Big[ \sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\, x_\mu(\tau) + \omega_n(\tau) \Big] e^{-G_n(\tau)}\, d\tau \Big). \tag{15}$$

Wir wählen nun speziell

$$\omega_1(t) = 0, \ldots, \omega_{n-1}(t) = 0,$$

so daß dann für jedes beschränkte Integral $x_\nu$, weil der Satz 2 für das System (13) bereits gelten soll, die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n-1} |x_\mu(t)| = 0 \tag{16}$$

gilt. Außerdem wählen wir für $\omega_n(t)$ die Funktion

$$\omega_n(t) = \frac{|e^{-G_n(t)}|}{e^{-G_n(t)}}.$$

Dann nimmt Formel (15) die Gestalt an

$$x_n = e^{G_n(t)} \Big( c_n + \int_0^t [1 + H(\tau)]\, |e^{-G_n(\tau)}|\, d\tau \Big), \tag{15a}$$

wobei zur Abkürzung

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(t)\, x_\mu(t)\, \frac{e^{-G_n(t)}}{|e^{-G_n(t)}|} = H(t) \tag{17}$$

gesetzt ist, so daß wegen (16)

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = 0 \tag{18}$$

ist. Wenn daher $e^{G_n(t)}$ beschränkt ist, dann muß, damit ein beschränktes Integral $x_n$ vorhanden ist, auch die Funktion

$$e^{G_n(t)} \int_0^t |e^{-G_n(\tau)}|\, d\tau$$

beschränkt sein. Umgekehrt ist in diesem Fall das Integral (15a) und allgemeiner auch das Integral (15) bei beschränkten $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und beliebigem beschränkten $\omega_n(t)$ wirklich beschränkt, und zwar bei jeder Wahl von $c_n$.

Wenn dagegen $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt ist, so muß in (15a), damit $x_n$ beschränkt ist, $c_n$ einen ganz bestimmten Wert haben, und zwar geht dann die rechte Seite von (15a) über in

$$-e^{G_n(t)}\int_t^\infty [1+H(\tau)]\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau.$$

Die Existenz und Beschränktheit dieser Funktion ist aber wegen (18) gleichbedeutend mit der Existenz und Beschränktheit von

$$e^{G_n(t)}\int_t^\infty |e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau. \tag{19}$$

Notwendig ist also, daß diese Funktion beschränkt ist. Das ist aber auch hinreichend; denn das Integral (15) geht dann für einen geeigneten Spezialwert $c_n$ über in

$$x_n = -e^{G_n(t)}\int_t^\infty \Big[\sum_{\mu=1}^{n-1} g_{n\mu}(\tau)\,x_\mu(\tau)+\omega_n(\tau)\Big]e^{-G_n(\tau)}\,d\tau,$$

und diese Funktion ist wegen der Beschränktheit von (19) augenscheinlich für beschränkte $x_1,\ldots,x_{n-1}$ und für ein beliebiges beschränktes $\omega_n(t)$ stets selbst beschränkt.

Nunmehr sei die Bedingung von Satz 1 erfüllt, und es seien alle $\omega_\nu(t)$ gleich Null. Dann gilt wieder die Formel (16) und folglich auch (18). Die Formel (15) geht aber jetzt über in

$$x_n = e^{G_n(t)}\Big(c_n+\int_0^t H(\tau)\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau\Big), \tag{15b}$$

wo $H(t)$ wieder die Bedeutung (17) hat. Ist dann $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt, also nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (B) in Satz 1) die Funktion (19) beschränkt, so muß in (15b), wenn $x_n$ beschränkt sein soll, $c_n$ einen ganz bestimmten Wert haben, und zwar geht dann (15b) über in

$$x_n = -e^{G_n(t)}\int_t^\infty H(\tau)\,|e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau.$$

Daraus folgt aber wegen (18) sogleich auch $\lim\limits_{t\to\infty} x_n(t)=0$.

Wenn dagegen $e^{G_n(t)}$ beschränkt und folglich nach Voraussetzung (vgl. Bedingung (A) in Satz 1) auch

$$e^{G_n(t)}\int_0^t |e^{-G_n(\tau)}|\,d\tau$$

beschränkt ist, so ist nach dem Hilfssatz gewiß $\lim\limits_{t\to\infty} e^{G_n(t)}=0$. Aus diesem Grund und wegen (18) folgt aber aus (15b) wiederum $\lim\limits_{t\to\infty} x_n(t)=0$. Damit sind die beiden Sätze 1 und 2 vollständig bewiesen.

Eine wesentliche Ergänzung zu Satz 1 ist der

Satz 3. *Wenn die Bedingungen von Satz* 1 *erfüllt sind, so ist in dem allgemeinen beschränkten Integral des linearen Differentialgleichungssystems* (9) *die Anzahl der willkürlichen Konstanten stets so groß wie die Anzahl derjenigen Indizes* $\nu$*, für welche die Bedingung* (A) *erfüllt ist; und zwar dürfen diejenigen Anfangswerte* $x_\nu(0) = c_\nu$ *willkürlich gewählt werden, für deren Index* $\nu$ *die Bedingung* (A) *erfüllt ist.*

*Wenn insbesondere für jeden Index* $\nu$ *die Bedingung* (A) *erfüllt ist, so ist jedes Integral beschränkt. Wenn dagegen für jeden Index* $\nu$ *die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so gibt es nur ein einziges beschränktes Integral.*

Beweis. Wenn zunächst $n = 1$ ist, so handelt es sich wieder um die eine Differentialgleichung (10) mit dem allgemeinen Integral (11), wobei $c_1 = x_1(0)$ ist. Aus (11) erkennt man aber — und darauf ist auch schon oben hingewiesen worden — sogleich folgendes: Wenn die Bedingung (A) erfüllt, also $e^{G_1(t)}$ beschränkt ist, so ist $x_1$ bei jeder Wahl von $c_1$ beschränkt; wenn dagegen die Bedingung (B) erfüllt, also $e^{G_1(t)}$ nicht beschränkt ist, so ist $x_1$ nur bei eindeutig bestimmter Wahl von $c_1$ beschränkt. Damit ist der Satz 3 bereits für $n = 1$ bewiesen.

Den allgemeinen Beweis können wir wieder durch vollständige Induktion erbringen, indem wir annehmen, daß der Satz 3 für das System der $n-1$ Gleichungen (13) bereits gelte. Fügen wir dann wieder die $n$-te Gleichung (14) mit dem allgemeinen Integral (15) hinzu, wobei $c_n$ die Bedeutung $x_n(0)$ hat, so können wir aus (15) folgendes entnehmen: Wenn für den Index $\nu = n$ die Bedingung (A) erfüllt, also $e^{G_n(t)}$ beschränkt ist, so ist $x_n$ bei jeder Wahl von $c_n$ beschränkt; wenn dagegen für $\nu = n$ die Bedingung (B) erfüllt, also $e^{G_n(t)}$ nicht beschränkt ist, so ist $x_n$ nur bei eindeutig bestimmter Wahl von $c_n$ beschränkt. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3 ist der

Satz 4. *Wenn die Bedingungen von Satz* 1 *in der Weise erfüllt sind, daß für* $k$ *Indizes* $\nu$ *die Bedingung* (A) *und für die* $n-k$ *anderen Indizes* $\nu$ *die Bedingung* (B) *erfüllt ist, so hat das lineare homogene Differentialgleichungssystem*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*genau* $k$ *linear unabhängige beschränkte Integrale. Dabei darf* $k$ *jede der Zahlen* $0, 1, \ldots, n$ *bedeuten. Der Fall* $k = 0$ *besagt natürlich, daß kein beschränktes Integral vorhanden ist außer dem trivialen* $x_\nu(t) = 0$.

## § 4.

## Fall der Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 5. *Die gegebenen Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n)$$

*seien für* $t \geqq 0$ *stetig und beschränkt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Differentialgleichungssystem*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*für jede beliebige Wahl der im Bereich*

$$t \geqq 0, \quad x_\lambda \text{ beliebig} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*stetigen beschränkten Funktionen* $\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *nur beschränkte Integrale hat, darin, daß die* $2n$ *Funktionen*

$$e^{G_\nu(t)}, \quad e^{G_\nu(t)} \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\, d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

*wobei* $G_\nu(t) = \int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau$ *ist, beschränkt sind.*

*Wenn sie erfüllt ist und wenn dann die Funktionen* $\chi_\nu$ *in einem Bereich der Form*

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*den weiteren Bedingungen*

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*genügen, wo* $\gamma$ *eine hinreichend kleine (von* $a$ *und den* $g_{\nu\mu}(t)$ *abhängende) Konstante ist, so ist für jedes Integral, dessen Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, dauernd* $|x_\nu(t)| \leqq a$, *und es gilt sogar die Beziehung*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Daß die angegebene Bedingung notwendig ist, folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 3. Daß sie hinreicht und daß auch die weiteren Behauptungen von Satz 5 zutreffen, wird bewiesen sein, wenn es gelingt, den nachstehenden schärferen Satz zu beweisen.

Satz 6. *Die Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n),$$

$$\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*seien im Bereich*

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq b\alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*stetig, und es sei, wenn* $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\,d\tau = G_\nu(t)$ *gesetzt wird,*

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K,$$

$$|e^{G_\nu(t)}| \leqq L_1 \quad (\text{wegen } G_\nu(0) = 0 \text{ also } L_1 \geqq 1),$$

$$|e^{G_\nu(t)}| \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2,$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{K b \alpha^n}{1-\alpha},$$

wobei $b$, $\alpha$, $K$, $L_1$, $L_2$ *positive Konstanten sind, für die*

$$\alpha < 1, \qquad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1$$

*ist. Bedeutet dann* $c$ *eine positive Zahl derart, daß*

$$\frac{c}{b} L_1 + \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} = \vartheta < 1,$$

*also wegen* $L_1 \geqq 1$ *gewiß* $c < \vartheta b < b$ *ist, so ist jedes Integral des Differentialgleichungssystems*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

*dessen Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *den Bedingungen*

$$|x_\nu(0)| \leqq c\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*genügen, für* $t \geqq 0$ *dauernd vorhanden und genügt den Ungleichungen*

$$|x_\nu(t)| < b\,\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

*Wenn die Funktionen* $\chi_\nu$ *noch die weiteren Bedingungen*

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_u| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*erfüllen, so ist außerdem*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Um den Satz 6 zu beweisen, schreiben wir das darin auftretende Differentialgleichungssystem in der Form[2])

$$x_\nu' = g_{\nu\nu} x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu} x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

---

[2]) Unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=1}^{\nu-1}$ ist, falls $\nu = 1$ ist, stets die Null zu verstehen.

Hieraus folgt sogleich

$$(20)\qquad \begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)}\left(x_\nu(0) + \int_0^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau\right), \\ \Phi_\nu(\tau) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\, x_\mu(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)). \end{cases}$$

Wegen $|x_\nu(0)| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ und $c < b$ gelten die zu beweisenden Ungleichungen

$$|x_\nu(t)| < b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mindestens für hinreichend kleine Werte von $t$. Solange sie aber gelten, ist auf Grund der im ersten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K b\alpha^{n-\mu} + \frac{Kb\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu},$$

und aus (20) ergibt sich dann die Abschätzung

$$|x_\nu(t)| \leqq c\alpha^{n-\nu} L_1 + \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 = \vartheta b\alpha^{n-\nu}.$$

Solange also $|x_\nu(t)| < b\alpha^{n-\nu}$ ist, gilt sogar die schärfere Ungleichung $x_\nu(t)| \leqq \vartheta b\alpha^{n-\nu}$. Daraus folgt aber, daß das Integral $x_\nu(t)$ bis zu beliebig großen Werten von $t$ fortsetzbar ist und daß dabei stets $x_\nu(t)| \leqq \vartheta b\alpha^{n-\nu}$ bleibt. Damit ist der erste Teil von Satz 6 bereits bewiesen.

Nun sei $B$ eine positive Zahl derart, daß

$$(21)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Wenn dann die $\chi_\nu$ auch den im zweiten Teil von Satz 6 geforderten Ungleichungen genügen, so ist für genügend große Werte von $t$, etwa für $t \geqq t_0$,

$$(22)\qquad |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$(23)\qquad |\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu B\alpha^{n-\mu} = \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

In Formel (20) zerlegen wir nun das Integral von 0 bis $t$ in

$$\int_0^t = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t.$$

Das erste Integral der rechten Seite ist einfach eine Konstante $A_\nu$. Zur Abschätzung des zweiten können wir die für $t \geqq t_0$ gültigen Formeln (22), (23)

benutzen. Hiernach ergibt sich für $t \geqq t_0$ aus (20) die Abschätzung

$$|x_\nu(t)| \leqq |e^{G_\nu(t)}| \cdot |x_\nu(0) + A_\nu| + \Big[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} KB\alpha^{n-\mu} + \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha}\Big] L_2$$

$$= |e^{G_\nu(t)}| \cdot |x_\nu(0) + A_\nu| + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu}.$$

Nach dem Hilfssatz auf S. 708 ist aber auf Grund der Voraussetzungen von Satz 6

$$\lim_{t\to\infty} e^{G_\nu(t)} = 0,$$

und daher folgt aus der vorigen Ungleichung sogleich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| \leqq \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu} < \vartheta B\alpha^{n-\nu}. \tag{24}$$

Aus einer Ungleichung der Form (21) kann also allemal auf (24) geschlossen werden. Indem man diesen Schluß wiederholt anwendet, ergibt sich auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| < \vartheta^k B\alpha^{n-\nu},$$

wo $k$ beliebig groß sein darf. Daher ist

$$\lim_{t\to\infty} x_\nu(t) = 0,$$

womit auch der zweite Teil von Satz 6 bewiesen ist.

## § 5.

## Fall der Instabilität und bedingten Stabilität bei einem speziellen System.

Satz 7. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*mögen die Funktionen*

$$g_{\nu\mu}(t) \qquad (1 \leqq \mu \leqq \nu \leqq n),$$

$$\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*im Bereich*

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq b\alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*stetig sein und den Ungleichungen genügen:*

$$|g_{\nu\mu}(t)| \leqq K,$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{Kb\alpha^n}{1-\alpha},$$

$$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \chi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu - x_\mu^*|.$$

*Ferner sei, wenn* $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\,d\tau = G_\nu(t)$ *gesetzt wird, für jeden einzelnen Index* $\nu$ *entweder*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} |e^{G_\nu(t)}| \leqq L_1, \\ |e^{G_\nu(t)}| \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2 \end{cases}$$

*oder aber*

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} |e^{G_\nu(t)}| \text{ nicht beschränkt,} \\ |e^{G_\nu(t)}| \int_t^\infty |e^{-G_\nu(\tau)}|\,d\tau \leqq L_2. \end{cases}$$

*Die Indizes der ersten Art mögen kurz mit* $\nu_A$, *die der zweiten Art mit* $\nu_B$ *bezeichnet werden. Dabei seien* $b$, $\alpha$, $K$, $L_1$, $L_2$ *positive Konstanten*[3]), *die den Ungleichungen genügen:*

$$\alpha < 1, \qquad \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} < 1.$$

*Bedeutet dann* $c$ *eine positive Zahl derart, daß* $c \leqq b$ *und, falls es unter den Indizes* $\nu$ *wenigstens ein* $\nu_A$ *gibt, auch*

$$\frac{c}{b}L_1 + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} \leqq 1$$

*ist, so hat das gegebene Differentialgleichungssystem wenigstens ein beschränktes Integral; und zwar gibt es, wenn man* $x_\nu(0) = c_\nu$ *für jedes* $\nu = \nu_A$ *im Bereich* $|c_\nu| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ *willkürlich vorgibt, genau ein Integral, für welches dauernd* $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ *für alle* $\nu$ *ist.*

*Wenn für alle* $\nu$ *außerdem* $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ *ist, so gilt für die angegebenen Integrale noch die weitere Beziehung*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu(t) = 0.$$

Nach diesem Satz ist, falls es kein $\nu_A$ gibt, auch kein $x_\nu(0)$ willkürlich; es gibt dann nur ein einziges Integral, für welches dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ bleibt, und dieses ist im Fall $\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ natürlich das Integral $x_\nu(t) = 0$. Das ist also der Fall der vollkommenen Instabilität. Falls es kein $\nu_B$ gibt, sind alle $x_\nu(0)$ willkürlich wählbar; das ist der bereits im vorigen Paragraphen unter etwas allgemeineren Voraussetzungen behandelte Fall der Stabilität. Falls es unter den Indizes $\nu$ sowohl $\nu_A$ als auch $\nu_B$ gibt, liegt sogenannte bedingte Stabilität vor (unvollkommene Instabilität).

---

[3]) Die Konstante $L_1$ kommt natürlich nur dann vor, wenn es unter den Indizes $\nu$ mindestens ein $\nu_A$ gibt.

Um Satz 7 zu beweisen, schreiben wir das darin auftretende Differentialgleichungssystem wieder in der Form

$$x_\nu' = g_{\nu\nu}(t)\,x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\,x_\mu + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

woraus folgt:

$$\begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \int \Phi_\nu(t)\, e^{-G_\nu(t)}\, dt, \\ \Phi_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) + \chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{cases} \tag{26}$$

Dabei bestimmen sich die Integrationskonstanten für $\nu = \nu_B$ eindeutig aus der Forderung, daß $x_\nu$ für $t \to \infty$ beschränkt bleiben soll, und für $\nu = \nu_A$ aus der Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$. Hiernach ist

$$\begin{cases} x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \Big( c_\nu + \int_0^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \Big) & \text{für } \nu = \nu_A, \\ x_\nu(t) = e^{G_\nu(t)} \int_\infty^t \Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau & \text{für } \nu = \nu_B. \end{cases} \tag{27}$$

Umgekehrt ergibt sich aus (27) auch rückwärts wieder (25) sowie die Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$ für $\nu = \nu_A$. Es genügt daher zu beweisen, daß das Integralgleichungssystem (27) genau eine Lösung $x_\nu$ mit den in Satz 7 behaupteten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zuerst, daß es *höchstens eine* Lösung gibt, für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ ist. Sind $x_\nu$, $x_\nu^*$ zwei solche Lösungen und setzt man sie in (27) ein, so ergibt sich durch Subtraktion der entstehenden Gleichungen:

$$x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = e^{G_\nu(t)} \int [\Phi_\nu(\tau) - \Phi_\nu^*(\tau)]\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau, \tag{28}$$

wo $\Phi_\nu^*$ eine analoge Bedeutung wie $\Phi_\nu$ hat und wo die untere Integralgrenze gleich 0 für $\nu = \nu_A$ und gleich $\infty$ für $\nu = \nu_B$ ist. Nun sind wegen $|x_\nu| \leqq b\alpha^{n-\nu}$, $|x_\nu^*| \leqq b\alpha^{n-\nu}$ die Ungleichungen

$$|x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq A\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

für eine gewisse Zahl $A$ sicher richtig. Wenn sie aber für einen gewissen Wert von $A$ gelten, so ist nach den in Satz 7 gemachten Voraussetzungen auch

$$\begin{aligned} &|\Phi_\nu(t) - \Phi_\nu^*(t)| \\ &= \Big| \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(t)\,(x_\mu - x_\mu^*) + \chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \chi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*) \Big| \\ &\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} KA\alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n}\,\frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu A\alpha^{n-\mu} \\ &= KA\,\frac{\alpha - \alpha^\nu}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu} + \frac{KA\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{KA\alpha}{1-\alpha}\,\alpha^{n-\nu}, \end{aligned}$$

ınd aus (28) ergibt sich dann die Abschätzung

$$|x_\nu(t) - x_\nu^*(t)| \leqq \frac{KA\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} A\alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichungen (29) bleiben also auch richtig, wenn man die Konstante $A$ durch die nach Voraussetzung kleinere Konstante $\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}A$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann man die Konstante $A$ beliebig klein machen; aus (29) folgt dann aber

$$x_\nu(t) - x_\nu^*(t) = 0,$$

so daß die Lösungen $x_\nu$ und $x_\nu^*$ in der Tat zusammenfallen.

Um jetzt zu zeigen, daß das System (27) auch wirklich eine Lösung der verlangten Art hat, wenden wir sukzessive Näherungen an, indem wir setzen:

$$30) \quad \begin{cases} x_{\nu 0}(t) = 0, \\ x_{\nu, k+1}(t) = e^{G_\nu(t)}\left(c_\nu + \int_0^t \Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau\right) & \text{für } \nu = \nu_A, \\ x_{\nu, k+1}(t) = e^{G_\nu(t)} \int_\infty^t \Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau & \text{für } \nu = \nu_B, \end{cases}$$

wobei natürlich analog zu (26)

$$31) \qquad \Phi_{\nu k}(\tau) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_{\nu\mu}(\tau)\, x_{\mu k}(\tau) + \chi_\nu(\tau, x_{1k}(\tau), \ldots, x_{nk}(\tau))$$

ist. Man sieht leicht, daß die Funktionswerte von $|x_{\mu k}(t)|$ stets $\leqq b\alpha^{n-\mu}$ sind, also im Definitionsbereich der Funktionen $\chi_\nu$ bleiben, so daß die Funktionen $x_{\nu, k+1}(t)$ wirklich sukzessive gebildet werden können. Denn jedenfalls trifft das für $k = 0$ zu. Wenn es aber für einen gewissen Wert $k$ zutrifft, so folgt zunächst aus (31)

$$|\Phi_{\nu k}(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} Kb\alpha^{n-\mu} + \frac{Kb\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu}.$$

und daher aus (30) für $\nu = \nu_A$:

$$|x_{\nu, k+1}(t)| \leqq c\alpha^{n-\nu} L_1 + \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 = \left(cL_1 + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} b\right)\alpha^{n-\nu} \leqq b\alpha^{n-\nu}$$

und noch einfacher für $\nu = \nu_B$:

$$|x_{\nu, k+1}(t)| \leqq \frac{Kb\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n-\nu} L_2 < b\alpha^{n-\nu}.$$

Die Funktionen $x_{\nu k}(t)$ können also wirklich für alle $k$ gebildet werden, und es ist

$$32) \qquad |x_{\nu k}(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Nun zeigen wir weiter, daß

$$|x_{\nu k}(t) - x_{\nu,k-1}(t)| \leqq \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

ist. Da $x_{\nu 0}(t) = 0$ ist, trifft das nach (32) jedenfalls für $k = 1$ zu. Wenn aber die Formel (33) für einen gewissen Wert von $k$ gilt, so ist nach (31) und auf Grund der in Satz 7 gemachten Voraussetzungen

$$|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu,k-1}(\tau)|$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\alpha^{n-\mu} + \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{\mu}\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1} b\alpha^{n-\mu}$$

$$= Kb\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{n-\mu} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) = Kb\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1}\frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}.$$

Daher folgt aus (30) sowohl für $\nu = \nu_A$ als für $\nu = \nu_B$:

$$|x_{\nu,k+1}(t) - x_{\nu k}(t)| = \left|e^{G_\nu(t)}\int_{0,\infty}^{t}[\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_{\nu,k-1}(\tau)]\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau\right|$$

$$\leqq Kb\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k-1}\frac{\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}L_2 = \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k} b\alpha^{n-\nu},$$

womit die Formel (33) allgemein bewiesen ist. Aus (33) folgt aber sogleich, daß die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} x_{\nu k}(t) = x_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{34}$$

für $t \geqq 0$ gleichmäßig vorhanden und also stetige Funktionen von $t$ sind. Wegen (32) ist dann auch

$$|x_\nu(t)| \leqq b\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{35}$$

Die Funktionen $x_\nu(t)$ bleiben also absolut unter der in Satz 7 behaupteten Schranke. Sie genügen aber auch dem Gleichungssystem (27). Das ergibt sich leicht, indem man in (30) zur Grenze $k \to \infty$ übergeht, wobei nur die Formel

$$\lim_{k\to\infty} e^{G_\nu(t)}\int_{\infty}^{t}\Phi_{\nu k}(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau = e^{G_\nu(t)}\int_{\infty}^{t}\Phi_\nu(\tau)\, e^{-G_\nu(\tau)}\, d\tau \quad \text{für} \quad \nu = \nu_B$$

wegen des unendlichen Integrationsintervalles einer genaueren Begründung bedarf. Nun folgt aber aus (33) und (34) leicht

$$|x_{\nu k}(t) - x_\nu(t)| \leqq \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^{k} b\alpha^{n-\nu}\frac{1}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Abschätzung

$$|\Phi_{\nu k}(\tau) - \Phi_\nu(\tau)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} K\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\alpha^{n-\mu}}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} + \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu\left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{b\alpha^{n-\mu}}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}$$

$$= \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{Kb}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{n-\mu} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \cdot \frac{Kb\alpha}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha},$$

und folglich ist für $\nu = \nu_B$

$$\left| e^{G_{\nu_B}(t)} \int_\infty^t [\Phi_{\nu_B k}(\tau) - \Phi_{\nu_B}(\tau)]\, e^{-G_{\nu_B}(\tau)}\, d\tau \right| \leqq \left(\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}\right)^k \cdot \frac{Kb\alpha}{1-\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{1-\alpha} \cdot L_2,$$

woraus die zu beweisende Limesformel unmittelbar hervorgeht.

Damit ist nun Satz 7 bewiesen, abgesehen von der Behauptung, daß für

(36) $$\chi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

stets $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0$ ist. Um auch diese als richtig zu erkennen, bemerken wir zunächst, daß aus (36) auf Grund der andern in Satz 7 in Bezug auf $\chi_\nu$ gemachten Voraussetzungen folgt:

(37) $$|\chi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu |x_\mu|.$$

Nun sei $B$ eine positive Zahl derart, daß

(38) $$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist. Für genügend große Werte von $t$ ist dann

$$|x_\nu(t)| < B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und folglich mit Rücksicht auf (37) auch

$$|\chi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| < \frac{1}{n}\frac{K}{1-\alpha}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu B\alpha^{n-\mu} = \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Nach der in (26) gegebenen Definition von $\Phi_\nu(t)$ ist daher für genügend große Werte von $t$

$$|\Phi_\nu(t)| < \sum_{\mu=1}^{\nu-1} KB\alpha^{n-\mu} + \frac{KB\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha}.$$

Folglich nach (27) zunächst für $\nu = \nu_B$

$$|x_\nu(t)| < \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = \nu_B)$$

und analog für $\nu = \nu_A$, weil dann nach dem Hilfssatz auf Seite 708 gewiß $\lim_{t\to\infty} e^{G_\nu(t)} = 0$ ist,

$$|x_\nu(t)| < \varepsilon + \frac{KB\alpha^{n-\nu+1}}{1-\alpha} L_2 = \varepsilon + \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu} \qquad (\nu = \nu_A),$$

wo $\varepsilon$ beliebig klein sein darf, wenn nur $t$ genügend groß ist. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber sowohl für $\nu = \nu_B$ als auch für $\nu = \nu_A$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_\nu(t)| \leqq \frac{KL_2\alpha}{1-\alpha} B\alpha^{n-\nu} < \sqrt{\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} B\alpha^{n-\nu}.$$

Die Ungleichung (38) bleibt daher richtig, wenn man $B$ durch die kleinere Zahl $\sqrt{\frac{KL_2\alpha}{1-\alpha}} B$ ersetzt. Durch wiederholte Anwendung dieses Prozesses kann man $B$ beliebig klein machen, woraus folgt:

$$\lim_{t\to\infty} x_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

W. z. b. w.

## § 6.

## Fall der Stabilität bei dem allgemeinen System.

Nunmehr sind wir in der Lage, auch das allgemeine Differentialgleichungssystem (2) der Einleitung durch Zurückführung auf das in § 4 und § 5 behandelte spezielle System zu erledigen.

Satz 8. *Die gegebenen Funktionen*

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$$

*seien für* $t \geqq 0$ *stetig und beschränkt. Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Differentialgleichungssystem*

$$(\mathrm{I}) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*für jede beliebige Wahl der im Bereich*

$$t \geqq 0, \quad x_\lambda \text{ beliebig} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*stetigen beschränkten Funktionen* $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *nur beschränkte Integrale hat, darin, daß das lineare System*

$$(\mathrm{II}) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*für beliebige stetige beschränkte* $\psi_\nu(t)$ *stets lauter beschränkte Integrale hat.*

*Wenn sie erfüllt ist und wenn dann die Funktionen $\varphi_\nu$ in einem Bereich der Form*

$$t \geqq 0, \qquad x_\lambda \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*den weiteren Bedingungen*

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \gamma \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*genügen, wo $\gamma$ eine hinreichend kleine (nur von $a$ und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängende) Konstante ist, so gelten für jedes Integral, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen*

$$|x_\nu(t) \leqq a \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu(t) = 0.$$

Beweis[4]). Wir bezeichnen die Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \cdots\cdots \\ f_{n1} \cdots f_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) \cdots f_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(t) \cdots f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

mit $F$. Dann gibt es[5]) eine beschränkte Matrix (d. h. Matrix, deren Elemente beschränkte stetige Funktionen von $t$ sind)

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \cdots p_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}(t) \cdots p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

mit beschränkter Reziproken

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} q_{11} \cdots q_{1n} \\ \cdots\cdots \\ q_{n1} \cdots q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}(t) \cdots q_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{n1}(t) \cdots q_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

[4]) Der erste Teil des Satzes ließe sich einfacher beweisen, indem man auf Grund der Beschränktheit von $\varphi_\nu$ zuerst zeigt, daß jedes Integral von (I) in jedem beliebig großen *endlichen* Intervall $0 \leqq t \leqq T$ beschränkt ist und infolgedessen im Endlichen nie zu existieren aufhört. Wenn man dann ein solches für $t \geqq 0$ dauernd existierendes Integral $x_\nu$ in (I) einsetzt, so geht $\varphi_\nu$ in eine beschränkte Funktion $\psi_\nu$ von $t$ allein über und, da jedes Integral von (II) beschränkt ist, bleibt $x_\nu$ beschränkt. — Der zweite für die Stabilität wesentlichere Teil des Satzes dürfte sich aber kaum auf so einfache Art beweisen lassen. Auch für den ersten Teil ist der Beweis des Textes deshalb vorzuziehen, weil nur er ein Mittel an die Hand gibt, das Erfülltsein der Voraussetzung, daß das System II stets ein beschränktes Integral hat, aus den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ allein zu erkennen.

[5]) Das ist bewiesen in der im gleichen Band erschienenen Arbeit des Verfassers: Über eine Matrixtransformation, S. 465—473.

und beschränkter Ableitung

$$P' = \begin{pmatrix} p'_{11} \cdots p'_{1n} \\ \cdots\cdots \\ p'_{n1} \cdots p'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{11}(t) \cdots p'_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p'_{n1}(t) \cdots p'_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

derart, daß die (natürlich wieder beschränkte) Matrix $(PF + P')Q = G$ oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen enthält:

$$(PF + P')Q = G = \begin{pmatrix} g_{11}\, 0 \quad \cdots 0 \\ g_{21}\, g_{22} \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}\, g_{n2} \cdots g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(t)\, 0 \quad\quad \cdots 0 \\ g_{21}(t)\, g_{22}(t) \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}(t)\, g_{n2}(t) \cdots g_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun vermöge der Transformation

$$(39) \qquad \begin{cases} y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, x_\mu & (\nu = 1, \ldots, n), \\ x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, y_\mu & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

neue Unbekannte $y_1, \ldots, y_n$ ein, so transformiert sich das Differentialgleichungssystem (I) in

$$(\text{Ia}) \qquad y'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n),$$

wobei

$$(40) \qquad \begin{cases} \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, \varphi_\mu(t, x_1, \ldots, x_n) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, \chi_\mu(t, y_1, \ldots, y_n) & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

ist. Analog geht das System (II) über in

$$(\text{IIa}) \qquad y'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei

$$(41) \qquad \begin{cases} \omega_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(t)\, \psi_\mu(t) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ \psi_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{n} q_{\nu\mu}(t)\, \omega_\mu(t) & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

ist. Die Forderung, daß das System (I) für beliebige stetige beschränkte $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll, ist daher gleichbedeutend mit der Forderung, daß das System (Ia) für beliebige stetige beschränkte $\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ lauter beschränkte Integrale haben soll.

Letzteres trifft nach Satz 5 dann und nur dann zu, wenn die $2n$ Funktionen

$$(42) \qquad e^{G_\nu(t)}, \quad e^{G_\nu(t)} \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\, d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei $G_\nu(t) = \int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau$ ist, beschränkt sind. Nach Satz 3 ist das aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das lineare System (IIa) für beliebige stetige beschränkte $\omega_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat, und damit ist offenbar gleichbedeutend, daß das lineare System (II) für beliebige stetige beschränkte $\psi_\nu(t)$ nur beschränkte Integrale hat[6]).

Damit ist der erste Teil von Satz 8 bewiesen, der zweite Teil ergibt sich alsdann vermöge der Transformation (39) unmittelbar aus dem zweiten Teil von Satz 5.

## § 7.

## Fall der Instabilität und bedingten Stabilität bei dem allgemeinen System.

Satz 9. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$(I) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*seien die Funktionen*

$$f_{\nu\mu}(t) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n),$$

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*im Bereich*

$$t \geqq 0, \quad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

*stetig und beschränkt. Speziell die $f_{\nu\mu}(t)$ seien so beschaffen, daß das lineare inhomogene System*

$$(II) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu + \psi_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*für beliebige stetige beschränkte Funktionen $\psi_\nu(t)$ stets wenigstens ein beschränktes Integral hat und daß das homogene System*

$$(III) \qquad x_\nu' = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*genau $k$ linear unabhängige beschränkte Integrale hat* $(k \geqq 0, k \leqq n)$.

---

[6]) Die Matrix $P$ kann auf unendlich viele Arten gewählt werden. Demgemäß ergeben sich auch für die Matrix $G$ unendlich viele Möglichkeiten, wobei die Funktionen (42) andere werden können. Wenn sie aber bei einer bestimmten Wahl von $P$ sämtlich beschränkt sind, so müssen sie bei jeder zulässigen Wahl von $P$ beschränkt sein, so daß diese Beschränktheit eine von $P$ unabhängige invariante Eigenschaft ist. Denn diese Beschränktheit ist ja die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das von $P$ ganz unabhängige System (II) lauter beschränkte Integrale hat.

*Wenn dann die Funktionen $\varphi_\nu$ den weiteren Bedingungen genügen*

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$|\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*| \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

*wo $\gamma_1, \gamma_2$ zwei hinreichend kleine (nur von $a$ und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängende) positive Konstanten sind, so bilden diejenigen Integrale von (I), für die dauernd $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt, eine Schar mit genau $k$ willkürlichen Konstanten; und zwar kann man $k$ linear unabhängige Verbindungen der Anfangswerte*

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_{\varkappa\mu} x_\mu(0) = \alpha_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

*in einem hinreichend kleinen Bereich $|\alpha_\varkappa| \leqq c_\varkappa$ willkürlich wählen*[7]*), wodurch das betreffende Integral dann eindeutig bestimmt ist.*

*Wenn für alle $\nu$ außerdem $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ ist, so ist für diese Integrale sogar*

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| = 0.$$

Beweis. Genau wie im vorigen Paragraphen wenden wir wieder die Transformation (39) an. Die Differentialgleichungssysteme (I), (II), (III) gehen dadurch über in bzw.

$$(\text{Ia}) \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$(\text{IIa}) \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu + \omega_\nu(t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$(\text{IIIa}) \qquad y_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\nu} g_{\nu\mu}(t)\, y_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei die Funktionen $\chi_\nu, \omega_\nu$ wieder durch die Gleichungen (40), (41) bestimmt sind.

Die in Satz 9 über die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ gemachten Voraussetzungen sind dann gleichbedeutend damit, daß das System (IIa) für beliebige stetige beschränkte $\omega_\nu(t)$ stets ein beschränktes Integral hat und daß das System (IIIa) genau $k$ linear unabhängige beschränkte Integrale hat. Nach Satz 4 ist also, wenn wieder $\int_0^t g_{\nu\nu}(\tau)\, d\tau = G_\nu(t)$ gesetzt wird, für genau $k$ Indizes $\nu$

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \text{beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int_0^t |e^{-G_\nu(\tau)}|\, d\tau & \text{beschränkt,} \end{cases}$$

[7]) Im Falle $k = 0$, wenn also das System (III) kein beschränktes Integral außer dem trivialen $x_\nu(t) = 0$ hat, soll das besagen, daß es nur ein einziges Integral der verlangten Art gibt, so daß also die Anfangswerte $x_\nu(0)$ völlig eindeutig sind.

und für die andern $n-k$ Indizes $\nu$ ist

$$(B) \qquad \begin{cases} e^{G_\nu(t)} & \text{nicht beschränkt,} \\ e^{G_\nu(t)} \int_t^\infty |e^{-G_\nu(\tau)}|\, d\tau & \text{vorhanden und beschränkt}^8). \end{cases}$$

Wir bezeichnen die $k$ Indizes $\nu$ der ersten Art wie in Satz 7 mit $\nu_A$, die $n-k$ andern mit $\nu_B$.

Durch die Transformation (39) geht der Bereich

$$(43) \qquad |x_\lambda| \leqq a \qquad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

in dem die Funktionen $\varphi_\nu$ gegeben sind, über in einen mit $t$ veränderlichen Bereich $\mathfrak{B}$ für die $y_\lambda$, der jedenfalls, wenn $\alpha$ irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet, einen von $t$ unabhängigen Bereich der Gestalt

$$(44) \qquad |y_\lambda| \leqq b_0 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

als Teilbereich umfaßt und andererseits auch ganz in einem ebenfalls von $t$ unabhängigen Bereich

$$(45) \qquad |y_\lambda| \leqq b_1 \alpha^{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

enthalten ist. Die Zahl $\alpha$ wählen wir, um Satz 7 anwenden zu können, so, daß mit Benutzung der dortigen Bezeichnungen

$$\alpha < 1, \quad \frac{K L_2 \alpha}{1-\alpha} < 1$$

ist, wobei $K$ und $L_2$ gewisse obere Schranken sind, die nur von den $g_{\nu\mu}(t)$, also letzten Endes nur von den $f_{\nu\mu}(t)$ abhängen. Daher ist die Wahl von $\alpha$ allein durch die Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ bedingt. Nachdem wir $\alpha$ dementsprechend gewählt haben, sind dann die Konstanten $b_0, b_1$ in (44), (45) nur von $a$ und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängig, und natürlich ist $b_0 \leqq b_1$. Die Funktionen $\chi_\nu$ sind dann zunächst nur im Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben und stetig. Um sie in den ganzen Bereich (45) passend fortzusetzen, setzen wir die ursprünglich gegebenen Funktionen $\varphi_\nu$ aus dem Bereich (43) hinaus beliebig weit fort durch die Formeln

$$\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_\nu(t, \vartheta_1 x_1, \ldots, \vartheta_n x_n),$$

$$\vartheta_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } |x_\mu| \leqq a, \\ \dfrac{a}{|x_\mu|} & \text{für } |x_\mu| > a. \end{cases}$$

---

[8]) Analog wie bei der Fußnote [6]) Seite 725 kann eine Matrix $P$ der verlangten Art wieder auf unendlich viele Arten gewählt werden, und die Funktionen $G_\nu$ können dabei andere werden. Wenn aber bei einer bestimmten Wahl von $P$ für $k$ Indizes $\nu$ die Bedingung (A) und für $n-k$ Indizes $\nu$ die Bedingung (B) erfüllt ist, so muß das bei jeder zulässigen Wahl von $P$ ebenso sein. Jedoch brauchen die $k$ Indizes, für welche die Bedingung (A) erfüllt ist, nicht immer die gleichen zu sein; nur ihre Anzahl $k$ ist invariant.

Es ist leicht zu sehen, daß die so fortgesetzten Funktionen $\varphi_\nu$ überall stetig sind und daß auch die zunächst nur im Bereich (43) geforderten Ungleichungen

$$(46)\quad \begin{cases} |\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \gamma_1, \\ |\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_\nu(t, x_1^*, \ldots, x_n^*)| \leqq \gamma_2 \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu - x_\mu^*| \end{cases}$$

überall in Geltung bleiben.

Die vermöge (39) und (40) aus den Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ entstehenden Funktionen $\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ sind dann ebenfalls überall, also auch im ganzen Bereich (45) stetig; in dem Teilbereich $\mathfrak{B}$, also erst recht im Bereich (44), decken sie sich mit den früheren Funktionen $\chi_\nu$, von denen sie also stetige Fortsetzungen sind. Aus (39), (40), (46) folgt dann aber weiter, wenn $\gamma_1, \gamma_2$ hinreichend klein (nur von $a$ und den Funktionen $f_{\nu\mu}(t)$ abhängig) gewählt werden,

$$|\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \frac{K b_0 \alpha^n}{1-\alpha},$$

$$|\chi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n) - \chi_\nu(t, y_1^*, \ldots, y_n^*)| \leqq \frac{1}{n} \frac{K}{1-\alpha} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu - y_\mu^*|,$$

wobei $K$ wieder die vorhin erwähnte obere Schranke bedeuten soll.

Nunmehr kann man auf das System (Ia) sowohl für den Bereich (45) als auch für den Bereich (44) den Satz 7 anwenden. Hiernach gibt es, wenn man $y_\nu(0)$ für die $k$ Indizes $\nu = \nu_A$ in einem hinreichend kleinen Bereich $|y_\nu(0)| \leqq c\alpha^{n-\nu}$ willkürlich vorgibt, genau ein Integral $y_\nu$ des Differentialgleichungssystems (Ia), für welches dauernd $|y_\nu(t)| \leqq b_1 \alpha^{n-\nu}$ bleibt, und für dieses ist sogar $|y_\nu(t)| \leqq b_0 \alpha^{n-\nu}$, wenn nur die Zahl $c$ klein genug gewählt wurde. Vermöge der Transformation (39) entspricht dem genau ein Integral des Differentialgleichungssystems (I), für welches $|x_\nu(t)| \leqq a$ bleibt. Dabei darf man also

$$y_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0) x_\mu(0)$$

für die $k$ Indizes $\nu = \nu_A$ im Bereich

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} p_{\nu\mu}(0) x_\mu(0)\right| \leqq c\alpha^{n-\nu}$$

willkürlich vorgeben. Hiermit ist der Satz 9 abgesehen von dem letzten Absatz bewiesen. Der letzte Absatz folgt dann aber unmittelbar aus dem letzten Absatz von Satz 7.

(Eingegangen am 28. März 1930.)

# Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. II.*)

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamt.)

Von

Felix Pollaczek in Berlin.

Das Problem der vor einer Gruppe von $s$ „Schaltern" wartenden Personen nebst den daran anknüpfenden Fragen ist zu Beginn des I. Teiles, dessen erste Kapitel zum Verständnis des Folgenden erforderlich sind, auseinandergesetzt worden. Im weiteren wurden in jenem Teile die mittleren Wartezeiten $\vartheta_m$ bzw. $\vartheta$ der $m$-ten bzw. *irgendeiner* der vor der Schaltergruppe eintreffenden Personen bestimmt und $\vartheta$ unter verschiedenen Voraussetzungen asymptotisch entwickelt.

Hier wird nun das Entsprechende für die Funktionen $\varrho_m(t)$, bzw.

$$\varrho(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \varrho_m(t), \tag{1}$$

das sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Wartezeit der $m$-ten, bzw. *irgendeiner* der $n$ die Schaltergruppe aufsuchenden Personen $\leqq t$ ist, durchgeführt[1]). Die Abfertigungszeit sei zunächst wieder als konstant $(= t_0)$ angenommen.

## 1. Formale Bestimmung von $\varrho(t)$.

$\varrho_m(t)$ ist, so wie $\vartheta_m$, eine geometrische Wahrscheinlichkeit, und zwar gleich dem Quotienten aus demjenigen Teile des $n$-dimensionalen Simplex

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq T$$

*) I. Teil in Math. Zeitschr. 32, S. 64–100 (hier zitiert als „I.").

[1]) $\varrho(t)$ ist nicht zu verwechseln mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \tau_m$, das arithmetische Mittel der Wartezeiten aller $n$ innerhalb des Zeitintervalls $T$ eintreffenden Personen, $\leqq t$ ist.

($x_m$ bzw. $\tau_m$ = Ankunfts- bzw. Wartezeit des $m$-ten Eintreffenden; $1 \leqq m \leqq n$), in welchem $\tau_m \leqq t$ ist, und dem vollen Simplexvolumen $\frac{T^n}{n!}$:

$$(2) \quad \varrho_m(t) = \frac{n!}{T^n} \underbrace{\int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^T dx_n}_{\tau_m \leqq t} = \frac{n!}{T^n} \underbrace{\int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \dots \int_{x_{m-1}}^T}_{\tau_m \leqq t} \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m.$$

Zur Ausführung des Integrals (2) benötigt man einen diskontinuierlichen Faktor, der $= 1$, bzw. $= 0$ wird, je nachdem

$$t - \tau_m(x_1, \dots, x_m) \gtrless 0$$

ist.

Für $\tau_m$ gilt nach Früherem (I., (4a, b)) bei $s$ parallel arbeitenden Schaltern:

$$(3) \qquad \tau_m = (x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m) \qquad (s+1 \leqq m \leqq n),$$

$$(3a) \qquad \tau_m = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq s)$$

oder, wenn wieder

$$(4) \qquad x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0 = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

und

$$m = \mu s + s' \qquad (1 \leqq s' \leqq s)$$

gesetzt wird,

$$\tau_m = (a_1 + (a_2 + (a_3 + \dots + (a_\mu) \dots))))$$
$$= \text{Maximum der } \mu + 1 \text{ Zahlen } 0, a_1, a_1 + a_2, \dots, \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu.$$

$t - \tau_m$ ist daher das Minimum der $\mu + 1$ Zahlen

$$(5) \qquad t,\ t - a_1,\ t - a_1 - a_2,\ \dots,\ t - \sum_1^\mu a_\nu;$$

multipliziert man nun die $\mu + 1$ auf diese Zahlen bezüglichen Dirichletschen Faktoren $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} \frac{e^{p_x \left(t - \sum_1^\mu a_\nu\right)}}{p_x} dp_x$ miteinander, so erhält man einen

Ausdruck, der nur dann von Null verschieden (und zwar im allgemeinen $= 1$) ist, wenn alle Zahlen (5), und daher auch ihr Minimum, $\geqq 0$ sind. Dieser Ausdruck lautet, wenn man das Produkt der $\mu + 1$ Integrale, nach Definition eines geeigneten Cauchyschen Hauptwertes, als vielfaches Integral schreibt,

$$\frac{1}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int \dots \int \frac{e^{p_0 t + p_1 (t - a_1) + \dots + p_\mu \left(t - \sum_1^\mu a_\nu\right)}}{p_0\, p_1 \dots p_\mu} dp_0\, dp_1 \dots dp_\mu;$$

er geht, wenn

$$\sum_{\nu=i}^{n} p_\nu = q_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

gesetzt wird, über in

$$(5\,a)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^{\mu+1}}\int_{C_0}\cdots\int_{C_\mu}\frac{e^{q_0 t-\sum_1^\mu q_i a_i}}{(q_0-q_1)(q_1-q_2)\cdots(q_{\mu-1}-q_\mu)q_\mu}\,dq_0\ldots dq_\mu \qquad \begin{matrix}(t\geqq 0),\\ (\mu\geqq 1),\end{matrix}$$

wobei die inneren Integrationen über die Kurven $C_1,\ldots,C_\mu$ der Fig. 1 (I. Teil) und eine rechts von ihnen gelegene zur imaginären Achse parallele Gerade $C_0$ zu erstrecken sind und das Integral $\int_{C_0}\ldots dq_0$ als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen ist.

Setzt man nun den Diskontinuitätsfaktor (5a) mit (4) (der für $t>0$ nur längs einer $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit von 0, bzw. 1 verschieden ist) in (2) ein, vollzieht in gleicher Weise wie in I., (15a ff.) die Integrationen nach den $x_\nu$, und ersetzt wieder $q_i$ durch $p-q_i$, so folgt

$$)=\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^{\mu+2}}\int_{C_p}\frac{e^{p(T+t-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp\int_{C_0}\cdots\int_{C_\mu}\frac{e^{-t q_0+t_0\sum_1^\mu q_i}}{(q_1\cdots q_\mu)^s(q_1-q_0)(q_2-q_1)\cdots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}\,dq_0\ldots d$$

$$(m=\mu s+s'),$$

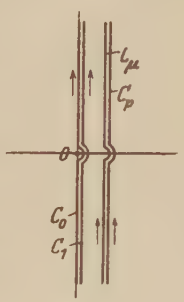


Fig. 1.

wobei jetzt die Integrationskurven gemäß der nebenstehenden Fig. 1 liegen.

Als nächstes soll das $\mu+2$-fache Integral (6) in ein dreifaches Integral umgewandelt werden.

In (6) darf, wenn von hier ab zunächst $t>0$ vorausgesetzt wird[2]), die Integrationskurve von $\int_{C_0}\ldots dq_0$ parallel zu sich nach rechts ins Unendliche verschoben werden, wodurch sich dieses Integral als gleich dem negativen Residuum in $q_0=q_1$ erweist; der innere Integrand (6) wird dadurch zu

$$\frac{e^{q_1(t_0-t)+t_0\sum_2^\mu q_i}}{q_1^s(q_2\cdots q_\mu)^s(q_2-q_1)\cdots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}.$$

Ist allgemein

$$(7)\qquad (\varkappa-1)t_0\leqq t<\varkappa t_0,\qquad \text{d. h. } \left[\frac{t}{t_0}\right]=\varkappa-1\qquad (1\leqq\varkappa\leqq\mu),$$

so darf der letzte Vorgang noch $(\varkappa-1)$-mal wiederholt werden, wodurch sich ergibt:

---

[2]) Da $\varrho_m(t)$ und $\varrho(t)$ offensichtlich für $t=0$ von rechts stetig sind, also

$$(6a)\qquad \varrho(0)=\lim_{t\to+0}\varrho(t),$$

erhält man die Endformeln für $\varrho(0)$ z. B. dadurch, daß man in den entsprechenden Formeln für $\varrho(t)$ diesen Grenzübergang ausführt.

$$(8)\qquad \varrho_m(t) = \frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{p(T+t-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-\varkappa+1}}\int\limits_{K_\varkappa}\cdots\int\limits_{K_\mu}\frac{e^{q_\varkappa(\varkappa t_0-t)+t_0\sum_{\varkappa+1}^{\mu}q_l}}{q_\varkappa^{\varkappa s}(q_{\varkappa+1}\cdots q_\mu)^s(q_{\varkappa+1}-q_\varkappa)\cdots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}\,dq_\varkappa\ldots dq_\mu;$$

in (8) sind die Integrationen nach den $q_\nu$ zunächst über die Kurven $C_\varkappa,\ldots,C_\mu$ von Fig. 1 zu erstrecken, jedoch darf man ersichtlich zuerst $C_\varkappa$ durch einen Kreis $K_\varkappa$ um den Nullpunkt, und sodann auch die übrigen $C_\nu$ durch einander enthaltende, links von $C_p$ gelegene Kreise mit

$$(8\,a)\qquad K_\varkappa \prec K_{\varkappa+1} \prec \ldots \prec K_\mu$$

ersetzen.

Bezeichnet man weiter die Differenz zwischen der rechten Seite von (8) und dem aus ihr durch Ersetzung von $\varkappa$ durch $\varkappa+1$ hervorgehenden Ausdrucke mit $\Delta_\varkappa$, so wird

$$(9)\qquad \varrho_m(t) = \sum_{l=\varkappa}^{\mu-1}\Delta_l + \frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{p(T+t-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_\mu}\frac{e^{q_\mu(\mu t_0-t)}}{q_\mu^{\mu s}(p-q_\mu)}\,dq_\mu$$

$$(\varkappa-1)\,t_0 \leqq t < \varkappa t_0 \leqq \mu t_0,$$

und man erhält z. B. die Differenz $\Delta_\varkappa$ dadurch, daß man in (8) den Kreis $K_\varkappa$ über $K_{\varkappa+1}$ hinausschiebt, also

$$(10)\qquad \Delta_\varkappa = \frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{p(T+t-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-\varkappa+1}}\int\limits_{K_\varkappa}\int\limits_{K_{\varkappa+1}}\cdots\int\limits_{K_\mu}\frac{e^{q_\varkappa(\varkappa t_0-t)+t_0\sum_{\varkappa+1}^{\mu}q_l}\,dq_\varkappa\ldots dq_\mu}{q_\varkappa^{\varkappa s}(q_{\varkappa+1}\cdots q_\mu)^s(q_{\varkappa+1}-q_\varkappa)(q_{\varkappa+2}-q_{\varkappa+1})\cdots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}$$

$$(K_{\varkappa+1}\prec K_\varkappa \prec K_{\varkappa+2}\prec\ldots\prec K_\mu).$$

Wird hierin

$$\frac{1}{q_{\varkappa+1}-q_\varkappa} = -\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{q_{\varkappa+1}^\nu}{q_\varkappa^{\nu+1}} + \frac{q_{\varkappa+1}^s}{(q_{\varkappa+1}-q_\varkappa)\,q_\varkappa^s}$$

gesetzt, so verschwindet $\int\limits_{K_{\varkappa+1}}\ldots dq_{\varkappa+1}$ über das Restglied, und man hat ($q$, $K$ statt $q_\varkappa$, $K_\varkappa$ geschrieben):

$$(11)\qquad \Delta_\varkappa = -\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{p(T+t-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K}\frac{e^{q(\varkappa t_0-t)}}{q^{\varkappa s+\nu+1}}\,dq$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-\varkappa}}\int\limits_{K_{\varkappa+1}}\cdots\int\limits_{K_\mu}\frac{e^{t_0\sum_{\varkappa+1}^{\mu}q_l}\,dq_{\varkappa+1}\ldots dq_\mu}{q_{\varkappa+1}^{s-\nu}(q_{\varkappa+2}\cdots q_\mu)^s(q_{\varkappa+2}-q_{\varkappa+1})\cdots(q_\mu-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}$$

$$(K_{\varkappa+1}\prec\ldots\prec K_\mu)$$

oder

$$(12)\quad A_\varkappa = -\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{pT}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{K}\frac{e^{(q-p)(\varkappa t_0-t)}}{q^{\varkappa s+\nu+1}}f_{\mu-\varkappa-1,\nu}(p)\,dq;$$

hierbei wurde gesetzt

$$(13)\quad f_{\lambda,\nu}(p) = \frac{1}{(2\pi i)^{\lambda+1}}\int_{K_0}\cdots\int_{K_\lambda}\frac{e^{t_0\sum_0^\lambda (q_l-p)}\,dq_0\ldots dq_\lambda}{q_0^{s-\nu}(q_1\ldots q_\lambda)^s(q_1-q_0)\ldots(q_\lambda-q_{\lambda-1})(p-q_\lambda)}$$

$$(K_0 \prec K_1 \prec \ldots \prec K_\lambda,\ \lambda \geqq 0,\ 0 \leqq \nu \leqq s-1).$$

Führt man nun eine erzeugende Funktion der $f_{\lambda,\nu}$ ein durch die Definition

$$(14)\quad F_\nu(x;p) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{s(\lambda+1)} f_{\lambda,\nu}(p) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1)$$

(eine elementare Abschätzung von (13) zeigt, daß der Konvergenzradius dieser Reihe $>0$ ist), so wird

$$(15)\quad f_{\lambda,\nu}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_x}\frac{F_\nu(x;p)}{x^{s\lambda+s+1}}\,dx,$$

erstreckt über einen Nullpunktskreis $K_x$ von hinreichend kleinem Radius.

Aus (9), (12), (15) folgt

$$\varrho_m(t) = -\sum_{l=\varkappa}^{\mu-1}\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{K_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT}}{p^{n-\mu s+1}}\cdot\frac{e^{(q-p)(lt_0-t)}}{q^{ls}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{q^{-\nu-1}F_\nu(x;p)}{x^{\mu s-ls+1}}\,dp\,dq\,dx$$

$$+\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_q}\frac{e^{pT}}{p^{n-\mu s+1}}\cdot\frac{e^{(q-p)(\mu t_0-t)}}{q^{\mu s}(p-q)}\,dp\,dq, \qquad (\varkappa-1)t_0 \leqq t < \varkappa t_0 \leqq \mu t_0,$$

und man kann sich jetzt von der Voraussetzung (7) befreien, indem man die Integration $\int\ldots dq$ nicht über den (links von $C_p$ gelegenen) Kreis $K_q$, sondern über eine links von $C_p$ (Fig. 2) gelegene Parallele $C_q$ zur imaginären Achse erstreckt; die äußere Summe in (16) darf dann formal mit $l=0$ begonnen werden, und wenn man summiert, ergibt sich

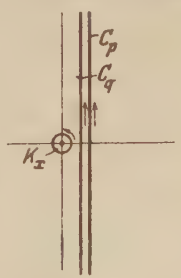


Fig. 2.

$$\varrho(t) = -\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(p-q)t}}{p^{n-\mu s+1}x^{\mu s+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{x^s e^{(q-p)t_0}}{q^s}\right)^\mu}{1-\frac{x^s e^{(q-p)t_0}}{q^s}}\sum_{\nu=0}^{s-1}q^{-\nu-1}F_\nu(x;p)\,dp\,dq\,dx$$

$$+\frac{n!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\frac{e^{pT+(q-p)(\mu t_0-t)}}{p^{n-\mu s+1}q^{\mu s}(p-q)}\,dp\,dq \qquad (t>0).$$

Im ersten Integranden von (17) darf der Zählersubtrahend $\left(\frac{x^s e^{(q-p)t_0}}{q^s}\right)^\mu$ fortgelassen werden, da der gemäß Fig. 2 gelegene Kreis $K_x$ hinreichend

klein gedacht ist ($F_\nu(0;p)=0$); in den zweiten Integranden von (17) aber setzen wir formal ein:

$$\left(\frac{e^{(q-p)t_0}}{q^s}\right)^\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_x}\frac{dx}{x^{\mu s+1}}\cdot\frac{q^s}{q^s-x^s e^{(q-p)t_0}}.$$

Dann folgt

$$(18)\quad \varrho_m(t)=\frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(p-q)t}}{p^{n-\mu s+1}x^{\mu s+1}}\cdot\frac{-\sum_{\nu=0}^{s-1}q^{s-1-\nu}F_\nu(x;p)+\frac{q^s}{p-q}}{q^s-x^s e^{(q-p)t_0}}\,dp\,dq\,dx$$
$$(t>0,\ m=\mu s+s');$$

Gleichung (18) gilt auch noch für $\mu=0$, d. h. für $m=s'\leqq s$, wo sie $\varrho_m(t)=1$ gibt, im Einklange mit der Beziehung (3a). Der Kürze halber[2a]) sei wieder (s. I., (22)) $n\equiv 0 \bmod s$ angenommen; aus (18) und (1) oder

$$(1a)\qquad \varrho(t)=\frac{s}{n}\sum_{\mu=0}^{n/s-1}\varrho_{\mu s+s}(t)$$

folgt dann

$$(19)\qquad \varrho(t)=\frac{s(n-1)!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(p-q)t}}{p^{n+1}x}\cdot\frac{1-\left(\frac{p^s}{x^s}\right)^{n/s}}{1-\frac{p^s}{x^s}}$$
$$\times\frac{\frac{q^s}{p-q}-\sum_{\nu=0}^{s-1}q^{s-1-\nu}F_\nu(x;p)}{q^s-x^s e^{(q-p)t_0}}\,dp\,dq\,dx\qquad(t>0),$$

und hier darf im Integranden wieder der Minuend 1 des zweiten Zählers fortgelassen werden, so daß schließlich bleibt

$$(19a)\quad \varrho(t)=\frac{s(n-1)!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(p-q)t}}{px^{n+1-s}}\cdot\frac{\frac{q^s}{p-q}\cdot-\sum_{\nu=0}^{s-1}q^{s-1-\nu}F_\nu(x;p)}{p^s-x^s}$$
$$\times\frac{dp\,dq\,dx}{q^s-x^s e^{(q-p)t_0}}\qquad(t>0).$$

Durch (19a) ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\varrho(t)$ in ein dreifaches Integral umgeformt; es handelt sich jetzt darum, die in dem Integranden auftretenden formal durch (13), (14) definierten Funktionen $F_\nu(x;p)$ in geschlossene Form überzuführen.

Wird in (13) unter dem $\int$-Zeichen

$$\frac{1}{q_1-q_0}=-\sum_{\tau=0}^{s-1}q_0^{-1-\tau}q_1^\tau+\frac{q_1^s}{q_0^s(q_1-q_0)}$$

---

[2a]) Die Formeln dieses Kapitels sowie die von I., § 3 (konstante Abfertigungszeit) bleiben auch für $n\not\equiv 0 \bmod s$ richtig.

geschrieben und sodann in $\sum_{\tau=0}^{s-1}$ die Integration nach $dq_0$ ausgeführt, in dem Integral über $\frac{q_1^s}{q_0^s(q_1-q_0)}$ aber $\int_{K_1}\dots dq_1$ durch das Residuum des Integranden in $q_1=q_0$ ersetzt, so folgt $\left([e^{t_0 y}]^{(\nu)} \equiv \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} e^{t_0 y}\right)$

$$(20)\qquad f_{\lambda,\nu} = -\sum_{\tau=0}^{s-1} \frac{[e^{t_0 y}]_{y=-p}^{(s-\nu+\tau)}}{(s-\nu+\tau)!} f_{\lambda-1,\tau}$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^\lambda}\int_{K_0}\int_{K_2}\dots\int_{K_\lambda} \frac{e^{2t_0(q_0-p)+t_0\sum_{i=2}^{\lambda}(q_i-p)}}{q_0^{2s-\nu}(q_2\dots q_\lambda)^s (q_2-q_0)(q_3-q_2)\dots(q_\lambda-q_{\lambda-1})(p-q_\lambda)}\, dq_0\, dq_2\dots dq_\lambda$$

$$(\lambda \geqq 1),$$

und die $(\lambda-1)$-malige Wiederholung der Umformung (20) führt auf die Formel ($K, z$ anstatt $K_0, q_0$ geschrieben)

$$(21)\quad f_{\lambda,\nu} = -\sum_{\tau=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{\lambda} \frac{[e^{jt_0 y}]_{y=-p}^{(js-\nu+\tau)}}{(js-\nu+\tau)!} f_{\lambda-j,\tau} + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{e^{(\lambda+1)t_0(z-p)}}{z^{(\lambda+1)s-\nu}(p-z)}\, dz \quad (\lambda \geqq 1).$$

Hiermit folgt für die Summe (14) unter Vertauschung der Summationen $\sum_\lambda$ und $\sum_j$ (wir denken uns $|x| \ll \left|z e^{\frac{t_0(p-z)}{s}}\right|$):

$$(22)\qquad F_\nu(x,p) = -\sum_{\tau=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{[e^{jt_0 y}]_{y=-p}^{(js-\nu+\tau)}}{(js-\nu+\tau)!} \sum_{\lambda=j}^{\infty} x^{(\lambda+1)s} f_{\lambda-j,\tau}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{x^s e^{t_0(z-p)}}{z^{s-\nu}(p-z)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^{\lambda s} e^{\lambda t_0(z-p)}}{z^{\lambda s}}\, dz,$$

oder

$$(23)\quad F_\nu(x,p) = -\sum_{\tau=0}^{s-1} F_\tau(x;p) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{js}[e^{jt_0 y}]_{y=-p}^{(js-\nu+\tau)}}{(js-\nu+\tau)!}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{x^s e^{t_0(z-p)}}{z^{s-\nu}(p-z)} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^s e^{t_0(z-p)}}{z^s}}\, dz \quad (\nu = 0,1,\dots,s-1).$$

Schreibt man die Glieder von $\sum_{j=1}^{\infty}$ als Residuen, so wird ($K$ ein hinreichend kleiner Kreis um $z=0$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{e^{jt_0(z-p)}x^{js}}{z^{js-\nu+\tau+1}}\, dz = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{e^{jt_0(z-p)}x^{js}}{z^{js-\nu+\tau+1}}\, dz - \delta_\nu^\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{z^{\nu-\tau-1}}{x^s e^{(z-p)t_0}}\, dz - \delta_\nu^\tau \qquad \begin{pmatrix}\delta_\nu^\nu = 1\\ \delta_\nu^\tau = 0\\ \nu \neq \tau\end{pmatrix},$$

und dies gibt, in (23) eingesetzt und umgeordnet,

$$(24)\quad \sum_{\tau=0}^{s-1} F_\tau(x;p)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{z^{s+\nu-\tau-1}}{z^s - x^s e^{(z-p)t_0}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{x^s e^{(z-p)t_0} z^\nu}{p-z}\cdot\frac{dz}{z^s - x^s e^{(z-p)t_0}}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Die letzten Integrale können mittels des Residuensatzes ausgewertet werden, und man erhält, unter

$$(25a)\qquad z_\varkappa(x) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, s-1)$$

die $s$ Lösungen der Gleichung

$$(25b)\qquad z^s - x^s e^{(z-p)t_0} = 0$$

für kleines $x$ und $z$ verstanden,

$$(26)\quad \sum_{\tau=0}^{s-1} F_\tau(x;p)\cdot\sum_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{z_\varkappa^{\nu-\tau}}{s - z_\varkappa t_0} = \sum_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{z_\varkappa^{\nu+1}}{(s-z_\varkappa t_0)(p-z_\varkappa)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Das System dieser $s$ linearen Gleichungen lautet, als Matrizenrelation geschrieben,

$$\left\{\frac{z_\varkappa^i}{s-z_\varkappa t_0}\right\}\{z_i^{-\varkappa}\}(F_i) = \left\{\frac{z_\varkappa^i}{s-z_\varkappa t_0}\right\}\left(\frac{z_i}{p-z_i}\right),$$

oder, wenn beiderseits mit der (für hinreichend kleines $x$ sicher vorhandenen) Inversen der Matrix $\left\{\frac{z_\varkappa^i}{s-z_\varkappa t_0}\right\}$ multipliziert wird,

$$\{z_i^{-\varkappa}\}(F_i) = \left(\frac{z_i}{p-z_i}\right),$$

das heißt

$$(26a)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{s-1} z_i^{-\varkappa} F_\varkappa = \frac{z_i}{p-z_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Die Auflösung von (26a) nach den $F_\varkappa$ ergibt

$$(27)\quad F_\varkappa(x;p) = (-1)^\varkappa \sum_{i=0}^{s-1}\frac{z_i^s}{p-z_i}\,\frac{S_\varkappa(z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_{s-1})}{(z_i-z_0)(z_i-z_1)\ldots(z_i-z_{s-1})}$$
$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, s-1),$$

wobei mit $S_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, s-1)$ die elementarsymmetrischen Funktionen von $s-1$ Größen bezeichnet sind. Setzt man formal, mit einer Unbestimmten $u$,

$$(27a)\qquad f(u) = \prod_{i=0}^{s-1}(u - z_i),$$

so können die $s-1$ Relationen (27) folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$(28)\quad \sum_{\varkappa=0}^{s-1} u^{s-1-\varkappa} F_\varkappa(x;p) = f(u)\sum_{i=0}^{s-1}\frac{z_i^s}{(p-z_i)(u-z_i)f'(z_i)}$$
$$= \frac{u^s f(p) - p^s f(u)}{(p-u)f(p)} = \frac{u^s}{p-u} - \frac{p^s}{p-u}\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{u-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}.$$

Diese Gleichung gibt, in (19a) eingesetzt,

$$(29)\quad \varrho(t)=\frac{s(n-1)!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(p-q)t}}{x^{n+1-s}(p-q)}\cdot\frac{p^{s-1}}{p^s-x^s}\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{q-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}\cdot\frac{dp\,dq\,dx}{q^s-x^s e^{(q-p)t_0}}$$
$$(t>0).$$

Führt man hierin wieder den Ausnützungsgrad $\eta=\frac{n\,t_0}{s\,T}$ ein, ersetzt $p, q, x$ durch $\frac{sp}{t_0}, \frac{sq}{t_0}, \frac{sx}{t_0}$ und setzt

$$(30)\qquad \frac{t}{t_0}=t^*,$$

so folgt weiter

$$(31)\quad \varrho(t)=\frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{\frac{np}{\eta}+st^*(p-q)}}{x^{n+1-s}(p-q)}\cdot\frac{p^{s-1}}{p^s-x^s}$$
$$\times\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{q-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}\cdot\frac{dp\,dq\,dx}{q^s-x^s e^{s(q-p)}}\qquad (t>0),$$

wobei unter $z_\varkappa$ $(\varkappa=0, 1, \ldots, s-1)$ nunmehr die $s$ Lösungen der Gleichung

$$(31a)\qquad z^s-x^s e^{s(z-p)}=0$$

(für $|x|\ll 1$, $|z|\ll 1$) zu verstehen sind.

## 2. Verallgemeinerung auf variable Abfertigungszeiten.

Als nächstes verallgemeinern wir die Gleichung (31) — unter der in I., § 1 zugrunde gelegten Abfertigungsvorschrift — auf den Fall variabler Abfertigungszeiten mit beliebig vorgegebener Verteilungsfunktion $f(t)$. Gemäß den Ausführungen von I., § 8 (siehe Gleichung (74)) tritt dann an Stelle von (6) der Ausdruck

$$(32)\qquad \varrho_m(t)=\int_{t'}^{t''}df(t_1)\ldots\int_{t'}^{t''}df(t_\mu)\frac{n!}{T^n}$$
$$\times\frac{1}{(2\pi i)^{\mu+2}}\int_{C_p}\int_{C_q}\ldots\int_{C_\mu}\frac{e^{p\left(T+t-\sum_1^\mu t_i\right)-tq_0+\sum_1^\mu t_i q_i}}{p^{n-\mu s+1}(q_1\ldots q_\mu)^s(q_1-q_0)\ldots(q_\mu-q_{\mu+1})(p-q_\mu)}dp\,dq_0\ldots dq_\mu.$$

Gilt nun für ein System der Variablen $t_i$

$$(33)\qquad \sum_{i=1}^{\varkappa-1}t_i\leqq t<\sum_{i=1}^{\varkappa}t_i,$$

so kann das innere Integral von (32) analog Gleichung (8) folgendermaßen

umgeformt werden:

$$(34)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{pT}}{p^{n-\mu s+1}}\,dp$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-\varkappa+1}}\int_{K_\varkappa}\cdots\int_{K_\mu}\frac{e^{(q_\varkappa-p)\left(\sum_1^{\varkappa}t_l-t\right)+\sum_{\varkappa+1}^{\mu}t_l(q_l-p)}}{q_\varkappa^{\varkappa s}(q_{\varkappa+1}\cdots q_\mu)^s(q_{\varkappa+1}-q_\varkappa)\cdots(q_s-q_{\mu-1})(p-q_\mu)}\,dq_\varkappa\ldots dq_\mu,$$

und man darf, nach Vertauschung der Reihenfolge der reellen und der komplexen Integrationen, genau so vorgehen wie im Falle konstanter Abfertigungszeit, wobei nur an Stelle von $e^{zt_0}$ die im I. Teil eingeführte Funktion

$$(35)\qquad \mathcal{J}(z)=\int_{t'}^{t''}e^{zt}\,df(t)$$

tritt. Auf diese Weise gelangt man analog (29) zu der Formel

$$(36)\qquad \varrho(t)=\frac{s\cdot(n-1)!}{T^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{pT+(q-p)t}}{x^{n+1-s}(p-q)}\cdot\frac{p^{s-1}}{p^s-x^s}$$

$$\times\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{q-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}\cdot\frac{dp\,dq\,dx}{q^s-x^s\mathcal{J}(q-p)}\qquad(t>0);$$

wobei die $z_\varkappa$ der Gleichung

$$(36a)\qquad z^s-x^s\mathcal{J}(z-p)=0$$

genügen und die Integrationskurven gemäß Fig. 2 liegen. Die Rolle der konstanten Abfertigungszeit $t_0$ fällt im allgemeinen Falle der mittleren Abfertigungszeit

$$(37)\qquad \mathcal{J}'(0)=\int_{t'}^{t''}t\,df(t)$$

zu; ersetzt man also in (36) $p, q, x$ durch $\frac{sp}{\mathcal{J}'(0)}$ usw., und setzt wieder

$$(38)\qquad \varepsilon(z)=\mathcal{J}\left(\frac{z}{\mathcal{J}'(0)}\right)=\int_{\tau'}^{\tau''}e^{z\tau}\,d\varphi(\tau),\quad\text{mit }\tau'=\frac{t'}{\mathcal{J}'(0)},\ \tau''=\frac{t''}{\mathcal{J}'(0)}$$

$$\left(\varphi(\tau)=f(\mathcal{J}'(0)\cdot\tau)\right),$$

sowie

$$(39)\qquad \frac{t}{\mathcal{J}'(0)}=t^*,\qquad \eta=\frac{n\mathcal{J}'(0)}{sT},$$

so folgt analog Gleichung (31):

$$(40)\qquad \varrho(t)=\frac{s\cdot(n-1)!\,\eta^n}{n^n}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x}\frac{e^{\frac{np}{\eta}+st^*(p-q)}}{x^{n+1-s}(p-q)}\cdot\frac{p^{s-1}}{p^s-x^s}$$

$$\times\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{q-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}\cdot\frac{dp\,dq\,dx}{q^s-x^s\varepsilon(s(q-p))}\qquad(t>0),$$

worin die $z_\varkappa$ der Gleichung

$$z^s - x^s \varepsilon(s(z-p)) = 0 \tag{40a}$$

genügen.

Um aus (40) die im I. Teile direkt abgeleitete Formel für

$$\vartheta = \int_0^\infty (1 - \varrho(t))\, dt$$

zu erhalten, hätte man zuerst $C_q$ auf die rechte Seite von $C_p$ zu verschieben, wobei (s. auch Gl. (43)) das Residuum 1 entsteht; sodann kann das Tripelintegral, in welchem jetzt $\Re(p-q) < 0$ ist, unter dem Integralzeichen nach $t$ integriert werden. Verschiebt man hierauf in dem Resultate dieser Integration $C_q$ nach $\Re(q) = -\infty$ hin, so reduziert sich $\vartheta$ auf das Residuum im Pole $q = p$, ein Doppelintegral, welches leicht in die Formel I., (87) übergeführt werden kann.

### 3. Asymptotische Entwicklungen bei konstanter Abfertigungszeit.

Nunmehr soll $\varrho(t)$ für den Fall konstanter Abfertigungszeit asymptotisch nach $n$ entwickelt werden.

Wird in (31), (31a) $x$ durch $xe^p$ ersetzt, so folgt

$$\varrho(t) = \frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_x} \frac{e^{np\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+st^*(p-q)}}{x^{n+1-s}(p-q)} \cdot \frac{p^{s-1}}{p^s e^{-ps} - x^s} \prod_{\varkappa=0}^{s-1} \frac{q - z_\varkappa}{p - z_\varkappa} \frac{dp\,dq\,dx}{q^s - x^s e^{sq}}$$

$$(t > 0),$$

wobei mit $z_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, s-1)$ die $s$ Lösungen der Gleichung

$$z^s - x^s e^{sz} = 0 \tag{41a}$$

in der Nachbarschaft von $x = 0$, $z = 0$ bezeichnet sind. Wir gehen verschieden vor, je nachdem

$$n\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + st^* \gtreqless 0 \tag{42a}$$

oder

$$n\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + st^* < 0 \tag{42b}$$

gilt. Im ersteren Falle darf $C_p$ nach $\Re(p) = -\infty$ hin verschoben werden, wodurch sich $\int_{C_p}$ auf die Residuen in den Polen $p = q$ (erster Ordnung) bzw. $p = z_0, z_1, \ldots, z_{s-1}$ (zweiter Ordnung) reduziert. Das Residuum in $p = q$ ist gleich

$$\frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{nq\left(\frac{1}{\eta}-1\right)-sq} q^{s-1}\, dq \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{K_x} \frac{1}{sx^n}\, d\frac{1}{q^s e^{-sq} - x^s} = \ldots = 1; \tag{43}$$

und die Berechnung der Residuen in den Polen zweiter Ordnung führt, wenn noch überall $x^s$ gemäß (41a) durch $z^s e^{-sz}$ ersetzt wird, auf die Formel

$$44)\quad \varrho(t) = 1 - \frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_\varrho}\int_{K_z}\frac{e^{\frac{nz}{\eta}+st^*(z-\varrho)}}{z^{n+1-s}}\prod_{\varkappa=1}^{s-1}\frac{\varrho-z_\varkappa}{z-z_\varkappa}\left[n\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+st^*+\frac{1}{\varrho-z}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2z(1-z)}-s\frac{1-z}{2z}-\sum_{\varkappa=1}^{s-1}\frac{1}{z-z_\varkappa}\right]\frac{d\varrho\,dz}{\varrho^s-z^s e^{s(\varrho-z)}}\qquad \left(n\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+st^*\geqq 0,\quad t\right.$$

Hierin sind mit $z_\varkappa = e^{\frac{2\pi i\varkappa}{s}} z + \ldots$ $(\varkappa = 1, \ldots, s-1)$ die $s-1$ Lösungen der Gleichung

$$z_\varkappa^s e^{-sz_\varkappa} = z^s e^{-sz} \tag{44a}$$

in der Nachbarschaft von $z=0$, $z_\varkappa = 0$ bezeichnet, und $K_z$ ist zunächst ein kleiner Kreis um den Nullpunkt der $z$-Ebene.

Im letzteren Falle ((42b)) verschieben wir in (41), so wie in I., § 6, $C_p$ in eine Kurve $C_p'$ der rechten Halbebene (I., Fig. 3), längs welcher

$$|pe^{-p}| = \varrho \ll 1$$

ist und lassen dann den Radius des Kreises $K_x$, der zunächst $< \varrho$ ist, über $\varrho$ hinauswachsen. Dann sind von dem Integral $\int_{K_x}$ die Residuen in den $s$ Nullstellen $e^{\frac{2\pi i\varkappa}{s}}\cdot pe^{-p}$ des Nenners $p^s e^{-ps} - x^s$ abzuziehen, und das restliche Tripelintegral ist gleich Null, wie man durch Verschiebung von $C_p'$ nach $\Re(p) = +\infty$ erkennt. Aus (41) wird daher in diesem Falle

$$(45)\qquad \varrho(t) = \frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p'}\int_{C_\varrho}\frac{e^{\frac{np}{\eta}+st^*(p-\varrho)}}{p^{n-s+1}(p-\varrho)}\prod_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{\varrho-z_\varkappa}{p-z_\varkappa}\frac{dp\,d\varrho}{\varrho^s-p^s e^{s(\varrho-p)}}$$

$$\left(n\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+st^*<0,\quad t^*>0\right),$$

worin mit $z_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, s-1)$ die $s$ Wurzeln der Gleichung

$$z^s - p^s e^{s(z-p)} = 0 \quad \text{für} \quad |pe^{-p}| \ll 1 \tag{45a}$$

in der Nähe von $z=0$ bezeichnet sind.

Wir unterscheiden jetzt die drei Fälle $\eta = \text{const} < 1$, $\eta = 1 + c\sqrt{\frac{2}{n}}$ $(c \gtrless 0)$ und $\eta = \text{const} > 1$, und es ist sinngemäß, bei der asymptotischen Entwicklung die Zeit $t$ oder $t^*$ im ersten Falle konstant zu halten, im zweiten Falle aber sie als proportional mit $\sqrt{n}$ und im dritten Falle als proportional mit $n$ vorauszusetzen.

1. $\eta = \text{const} < 1$, $t^* = \text{const}$.

In diesem Falle, der unter (42a) fällt, kann in (44) das Integral $\int_{K_z}$ gemäß Gleichung (36) des I. Teils asymptotisch entwickelt werden, und zwar gleichmäßig in bezug auf alle $q$ des Integrationsweges $C_q$, so daß aus (44) folgt

$$\varrho(t) = 1 - \frac{s(1-\eta)}{\eta} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} e^{st^*(\eta - q)} \prod_{\varkappa=1}^{s-1} \frac{q - z_\varkappa}{\eta - z_\varkappa} \frac{\eta^s \, dq}{q^s - \eta^s e^{s(q-\eta)}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\eta < 1, \; t^* > 0).$$

Die Integration ist hierin über eine rechts von $q = \eta$ gelegene Parallele zur imaginären Achse zu erstrecken, und unter $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, s-1$) sind die $s-1$ Lösungen $|z_\varkappa| < \eta$ von (44a), für $z = \eta < 1$, zu verstehen.

Setzt man in (46) $q = \eta z$, so folgt weiter:

$$\varrho(t) = 1 - s(1-\eta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re e\,(z) = 1+} e^{st^*\eta(1-z)} \prod_{\varkappa=1}^{s-1} \frac{z - z_\varkappa(\eta)}{1 - z_\varkappa(\eta)} \cdot \frac{dz}{z^s - e^{s\eta(z-1)}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \eta < 1, \quad t^* > 0$$

mit

$$z_\varkappa - e^{\frac{2\pi i \varkappa}{s}} \cdot e^{\eta(z_\varkappa - 1)} = 0, \qquad |z_\varkappa| < 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{47a}$$

2. Wir kehren zu dieser Formel in einem späteren Abschnitt zurück und betrachten jetzt den Fall

$$\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (c \gtrless 0), \tag{48}$$

in welchem wir die Zeit als proportional mit $\sqrt{n}$, also

$$st^* = \tau\sqrt{\frac{n}{2}} \qquad \left(t = \frac{t_0}{s}\tau\sqrt{\frac{n}{2}}\right), \tag{49}$$

mit konstantem $\tau$, annehmen; dann wird

$$n\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + st^* = \sqrt{2n}\left(c + \frac{\tau}{2}\right) + O(1),$$

so daß dieser Fall unter (42a) bzw. unter (42b) rangiert, je nachdem

$$c + \frac{\tau}{2} \geqq 0 \tag{50a}$$

oder

$$c + \frac{\tau}{2} < 0 \tag{50b}$$

ist.

Im ersteren Falle gilt Gleichung (44), und für das dortige Integral $\int_{K_z} .. dz$ ist jetzt der Punkt $z = 1$ Sattelpunkt. In (44) ist $K_z$ zunächst ein sehr kleiner Kreis um den Nullpunkt und $C_q$ zunächst eine Parallele

zur imaginären Achse mit

$$\Re e(z) < \Re e(q) < 1, \tag{51}$$

so daß der Integrandennenner

$$q^s - z^s e^{s(q-s)} \tag{52}$$

nirgends im Integrationsbereich verschwindet. Wird nun in (44), so wie in I., § 5, $K_z$ in eine Kurve $K_z'$ deformiert, die i. a. die Schleife der Kurve $\left|\frac{e^{z-1}}{z}\right| = 1$ umfaßt (und daher $s-1$ nach I., (41a) auf dieser Schleife liegende Verzweigungspunkte der $s-1$ Funktionen $z_\varkappa(z)$ [(44a)] überstreicht) und in der Nachbarschaft von $z=1$ gemäß I., Fig. 5 verläuft, so muß $C_q$ immer mehr nach $\Re e(q)=1$ hin ausweichen, um der Bedingung (51) zu genügen. Da aber für $z \to 1$ auch eine rechts von der Geraden $\Re e(q)=1$ liegende Nullstelle $q_0(z)$ von (52) nach $q=1$ rückt, verschieben wir $C_q$ ein wenig über diese Gerade hinaus nach rechts in die Gerade

$$C_q' \ldots \Re e(q) = 1+\delta, \quad 0 < \delta \ll 1, \tag{52a}$$

wodurch für alle $z$ eines kleinen Kurvenstückes von $K_z'$ in der Nachbarschaft von $z=1$ ein Residuum entsteht, und man hat ($\sum\int_{C_{z\nu}}$ sind die den erwähnten Verzweigungspunkten zugehörigen Verzweigungsintegrale)

$$\int_{C_q}\int_{K_z} = \int_{C_q}\int_{K_z'} + \sum\int_{C_q}\int_{C_{z\nu}} = -\int_{K_z' \approx 1} \operatorname{Res}(q=q_0)\,dz + \int_{C_q'}\int_{K_z'} + \sum\int_{C_q'}\int_{C_{z\nu}}. \tag{53}$$

Da die beiden Doppelintegrale rechts in (53) für $\tau > 0$ wegen des Faktors

$$e^{st^*(z-q)} = e^{\sqrt{\frac{n}{2}}\tau(z-q)} \qquad (\Re e(z-q) < 0) \tag{53a}$$

als $O(e^{-k^2\sqrt{n}})$ abgeschätzt werden können, folgt aus (44), (53), (49):

$$\varrho(t) = 1 + \frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{K_z' \approx 1} \frac{e^{\frac{nz}{\eta} + \tau\sqrt{\frac{n}{2}}(z-q_0)}}{z^{n+1-s}} \prod_{\varkappa=1}^{s-1} \frac{q_0 - z_\varkappa}{z - z_\varkappa} \left[ n\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) + \tau\sqrt{\frac{n}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{s-1}{z} + \frac{1}{2z(1-z)} - s\frac{1-z}{2z} - \sum_{\varkappa=1}^{s-1} \frac{1}{z-z_\varkappa} \right] \cdot \frac{dz}{s\,q_0^{s-1}(1-q_0)} + O(e^{-k^2\sqrt{n}}). \tag{54}$$

Um (54) asymptotisch zu entwickeln, hat man, so wie früher (I., (50)),

$$z = 1 + i\sqrt{\frac{2}{n}}\,\zeta \tag{55}$$

zu setzen, den Integranden formal nach $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zu entwickeln, als $\zeta$-Integrationsweg $\int_{-\infty}^{\infty}$ zu nehmen und gliedweise zu integrieren. Für die Nullstelle $q_0 \approx 1$

von (52) folgt mit (55)

$$q_0 = 1 - i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{56}$$

und aus (54) wird so mit (48), (55), (56)

$$\varrho(t) = 1 + \frac{(n-1)!\, e^n}{n^n}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{\infty} e^{-(\zeta - ic)^2 + 2i\tau\zeta}\left[c\sqrt{2n} + \tau\sqrt{\frac{n}{2}} - \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2i\zeta} - \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2i\zeta}\right]\frac{i\sqrt{\frac{2}{n}}\,d\zeta}{i\sqrt{\frac{2}{n}}\,\zeta}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$+ O\left(e^{-k^2\sqrt{n}}\right),$$

und mit der Stirlingschen Formel

$$\frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{2n\pi}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{58}$$

folgt weiter

$$\varrho(t) = 1 + \frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int_{-i\infty}^{\infty} e^{-(\zeta - ic)^2 + 2i\tau\zeta}\left(2c + \tau - \frac{1}{i\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int_{-i\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2 + 2i\zeta(c+\tau) + c^2}(-2i\zeta - \tau)\frac{d\zeta}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

und hieraus

$$\boxed{\varrho(t) = 1 - e^{-2c\tau - \tau^2} + \tau\int_{\tau}^{\infty} e^{-x^2 - 2cx}\,dx + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad c \geqq -\frac{\tau}{2}} \tag{59}$$

$$\left(\tau = \frac{st}{t_0}\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Gleichung (59) gilt auch noch für $\tau = 0$, wie aus (44) leicht zu entnehmen ist; für den Fall $c = \tau = 0$ bei konstanter Abfertigungszeit gilt im übrigen entsprechendes wie in I., Anm. 3.

Im Falle (50b) gilt Gleichung (45); um sie unter der Annahme (48), (49) nach $n$ asymptotisch zu entwickeln, hat man die Integrationskurve $C_p'$ in eine i. a. dem Gebiete $\left|\frac{e^{p-1}}{p}\right| < 1$ angehörige Kurve $C_p''$ (Fig. 6 des I. Teils) und die zunächst links von $\Re e(q) = 1$ gelegene Gerade $C_q$ nach (52a) zu verschieben; die gegenseitige Lage von $C_q'$ und $C_p''$ zeigt Fig. 3. Bei der Verschiebung von $C_p'$ in $C_p''$ werden (unendlich viele) Verzweigungspunkte der Funktionen $z_\varkappa(p)$ (45a), und beim Übergang von $C_q$ zu $C_q'$ der Pol $q = p$ überschritten, so

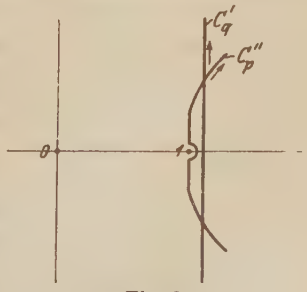


Fig. 3.

daß auch für (45) eine der Formel (53) analoge Beziehung gilt. Da wiederum (wegen des Faktors $e^{\sqrt{\frac{n}{2}}\tau(p-q)}$ mit $\Re e\,(p-q)<0$) die Summe der Doppelintegrale auf der rechten Seite dieser Gleichung als $O(e^{-k^2\sqrt{n}})$ abgeschätzt werden kann (vgl. auch den Schluß von I., § 7), folgt aus (45)

$$(60)\quad \varrho(t)=\frac{(n-1)!}{n^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p\approx 1} e^{n\left(\frac{p}{\eta}-\log\frac{p}{\eta}\right)}\left[st^*-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{p-z_k}+\frac{1}{p-1}\left(\frac{sp}{2}-\frac{s-1}{2p}\right)\right]\frac{d}{p-}$$
$$+O(e^{-k^2\sqrt{n}}),$$

wobei die Integration über ein kleines Bogenstück der Kurve $C_p''$ in der Nachbarschaft von $p=1$ zu erstrecken ist. Um (60) asymptotisch zu entwickeln, hat man analog (55)

$$(61)\qquad p=1+i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta$$

zu setzen und so wie bei der Entwicklung von (54) zu verfahren. Man hat dabei zu beachten, daß jetzt eine der in (45) auftretenden Wurzeln von (45a) — sie heiße $z_0(p)$ — für $z\to 1$ selbst gegen 1 geht; für $z_0(p)$ (die Umkehrfunktion des früher erwähnten $q_0(z)$) gilt ebenfalls

$$(62)\qquad z_0=1-i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Aus (60) folgt nun mit (61), (62), (48)

$$\varrho(t)=\frac{(n-1)!\,e^n}{n^n}\sqrt{\frac{n}{2}}\tau\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-\infty} e^{-(\zeta-i\sigma)^2}\frac{d\zeta}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

und, mit (58), nach einigen Umformungen:

$$(63)\qquad \boxed{\varrho(t)=\tau\int_0^\infty e^{-x^2+2cx}dx+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\qquad c<-\frac{\tau}{2}\qquad \left(\tau=\frac{st}{t_0}\sqrt{\frac{2}{n}},\quad \eta=1-c\right.}$$

3. $\eta=\text{const}>1$.

In diesem Falle nehmen wir bei der asymptotischen Entwicklung die Zeit als proportional mit $n$ an:

$$(64)\qquad st^*=n\tau\qquad\qquad \left(t=\frac{t_0}{s}n\tau\right).$$

Ist erstens

$$(65)\qquad \tau\leqq 1-\frac{1}{\eta},$$

so gelten (42b) und Gleichung (45). Man hat dann die Kurven $C_q$ und $C_p$ wieder gemäß Fig. 3, jedoch jetzt in die Nachbarschaft der Stelle $\eta$ (anstatt 1) zu verschieben, und erhält hierdurch wieder die Gleichung (60) (mit $\int\limits_{p\approx\eta}$ statt $\int\limits_{p\approx 1}$). Wendet man sodann in (60) (mit (64)) die Sattel-

punktsmethode (I., Gleichung (36)) an, so folgt

$$\boxed{\varrho(t)=\frac{\eta\tau}{\eta-1}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad 0\leqq\tau\leqq 1-\frac{1}{\eta}\qquad\left(\tau=\frac{1}{n}\cdot\frac{st}{t_0},\quad \eta>1\right)}. \tag{66}$$

Ist zweitens

$$\tau>1-\frac{1}{\eta}, \tag{67}$$

so gelten Gleichung (42a) und (44), und aus ihnen folgt in mehrfach erwähnter Weise durch Übergang zu den Residuen:

$$\varrho(t)=1-\frac{(n-1)!}{n^n}\sum_{i=0}^{s-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p'}e^{n\left(\frac{z_i}{\eta}-\log\frac{z_i}{\eta}+\tau(z_i-q)\right)}\prod_{\varkappa\neq i}\frac{q-z_\varkappa}{z_i-z_\varkappa} \tag{68}$$

$$\times\left[n\left(\frac{1}{\eta}-1+\tau\right)+\frac{1}{q-z_i}+\frac{s-1}{z_i}+\frac{1}{2z_i(1-z_i)}-s\frac{1-z_i}{2z_i}-\sum_{i\neq\varkappa}\frac{1}{z_i-z_\varkappa}\right]\frac{dq}{1-z_i},$$

worin $C_p'$ die in I., Fig. 3 dargestellte Kurve $\left(\text{rechts von der Kurve } \left|\frac{e^{p-1}}{p}\right|=1\right)$ ist und die $z_i$ die $s$ Lösungen von (45a) ($q$ statt $p$) bezeichnen. Aus (68) folgt weiter

$$\boxed{\varrho(t)=1-O(e^{-kn}),\quad \eta>1,\quad 1-\frac{1}{\eta}<\tau<1\qquad\left(\tau=\frac{st}{t_0 n}\right)}, \tag{69}$$

wobei $k>0$ das Maximum von

$$-\frac{z_0}{\eta}+\log\frac{z_0}{\eta}+\tau(q-z_0)+1\qquad\left(1-\frac{1}{\eta}<\tau<1\right) \tag{69a}$$

für reelles $q>1$ und $z_0$ die reelle Lösung ($\neq q$) von $ze^{-z}=qe^{-q}$ bezeichnet.

Da der ungünstigste denkbare Fall der ist, daß alle $n$ Personen erst am Ende des Zeitintervalls $T$ eintreffen, ist die größtmögliche Wartezeit gleich $t=\left(\frac{n}{s}-1\right)t_0$ bzw. $\tau=\frac{st}{t_0 n}=1-\frac{s}{n}$; daher ist jedenfalls

$$\varrho(t)=1,\quad \tau\geqq 1, \tag{70}$$

was sich auch aus (41) oder (44) leicht ablesen läßt.

## 4. Asymptotische Entwicklungen bei variabler Abfertigungszeit.

Die entsprechenden Entwicklungen der Formel (40) seien hier ohne detaillierten Beweis angeführt; die Verteilungsfunktion $f(t)$ möge den in I., § 9 eingeführten Voraussetzungen (abteilungsweise konstant, nur im äquidistanten Punkte der $t$-Achse springend) genügen. Um (40) z. B. für $\eta=\text{const}<1$ zu entwickeln, hätte man die zweidimensionale $p,x$-Integrationsmannigfaltigkeit so weit ins Unendliche zu verschieben (wobei Residuen entstehen), bis sie an den Verzweigungskurven der Funktionen

$z_\varkappa(p,x)$ (Gleichung (40a)) hängen bleibt, und hätte die zugehörigen Verzweigungs-Doppelintegrale analog wie in I., § 9 als $O(e^{-k^2 n})$ abzuschätzen. Man erhält

1. $\eta = \text{const} < 1$, $t = \text{const}$.

$$\varrho(t) = 1 - s(1-\eta) \int\limits_{\Re e(z)=1+} e^{s\eta t^*(1-z)} \prod_{\varkappa=1}^{s-1} \frac{z - z_\varkappa(\eta)}{1 - z_\varkappa(\eta)} \cdot \frac{dz}{z^s - \varepsilon(s\eta(z-1))} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{71}$$

$$(0 < \eta < 1,\ t^* > 0),$$

worin mit $z_\varkappa(\eta)$ die $s-1$ innerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln der Gleichung

$$z^s - \varepsilon(s\eta(z-1)) = 0 \qquad (0 < \eta < 1) \tag{71a}$$

bezeichnet sind.

2. $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}$ $(c \gtrless 0)$, $st^* = \tau\sqrt{\frac{n}{2}}$ [3]).

$$\varrho(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{c}{v}+\frac{\tau}{2v}}^{\infty} e^{-x^2}\left(1 + \frac{\tau}{2}\cdot\frac{c}{x^2+c^2}\right) dx - e^{c^2 - \left(c+\frac{\tau}{1+v^2}\right)^2}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{c}{v}+\frac{\tau}{2v}\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2}} e^{-x^2}\left(1 - \frac{\tau}{2}\cdot\frac{c+\frac{\tau}{1+v^2}}{x^2+\left(c+\frac{\tau}{1+v^2}\right)^2}\right) dx + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{72}$$
$$\left(v = \sqrt{s(\varepsilon''(0) - 1)}\right).$$

Wie leicht zu erkennen ist, geht (72) für $v \to 0$, d. i. für $\varepsilon(z) \to e^z$, formal in (59) bzw. (63) über, je nachdem $c + \frac{\tau}{2} > 0$ oder $< 0$ ist.

3. $\eta = \text{const} > 1$, $st^* = \tau n$.

Es gilt (bezgl. $\tau''$ siehe (38)), mit einer geeigneten Konstanten $k > 0$:

$$\varrho(t) = \frac{\eta\tau}{\eta - 1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1 - \frac{1}{\eta} \tag{73a}$$

$$\varrho(t) = 1 - O(e^{-kn}), \qquad 1 - \frac{1}{\eta} < \tau < \tau'' \tag{73b}$$

$$\varrho(t) = 1, \qquad \tau \geqq \tau''. \tag{73c}$$

---

[3]) Für das in den entsprechenden Formeln (111), (113) des I. Teils enthaltene Doppelintegral gilt:

$$\int\limits_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty} \int\limits_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty} e^{-x^2 - 2xy\frac{1-v^2}{1+v^2} - y^2}\, dx\, dy = e^{-c^2}\frac{1+v^2}{2v}\, c \int\limits_{\frac{c}{v}}^{\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^2+c^2} + \delta\cdot\pi\,\frac{1+v^2}{2v} \qquad \left(\delta = \begin{cases} 0, & c > 0 \\ 1, & c < 0 \end{cases}\right.$$

## 5. Sonderfälle der Formel (47).

Wir gehen jetzt zurück zu der bei konstanter Abfertigungszeit für $\eta = \text{const} < 1$ geltenden Gleichung (47) und setzen der kürzeren Schreibweise halber

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(t) = P(t^*) \qquad \left(t^* = \frac{t}{t_0}\right). \tag{74}$$

Hiermit folgt aus (47) insbesondere für $s = 1$ $\left(\overset{0}{\underset{\nu=1}{\Pi}} \equiv 1\right)$:

$$P(t^*) = 1 - (1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(z)=1+} e^{\eta t^*(1-z)}\frac{dz}{z - e^{\eta(z-1)}} \quad (\eta<1,\ s=1,\ t^*>0). \tag{75}$$

Dieses Integral kann in zweifacher Weise ausgewertet werden. Verschiebt man *erstens* die Integrationsgerade parallel zu sich ins Unendliche der rechten Halbebene, wo das Integral gegen Null geht, so folgt:

$$P(t^*) = 1 - (1-\eta)\left[\frac{e^{-\eta t^*(z_0-1)}}{\eta z_0 - 1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-\eta t^*(z_\nu-1)}}{\eta z_\nu - 1} + \frac{e^{-\eta t^*(\bar{z}_\nu-1)}}{\eta \bar{z}_\nu - 1}\right)\right], \tag{76}$$

$$(\eta<1,\ s=1,\quad t^*\geqq 0).$$

Hierin bezeichnet $z_0 > 1$ die größere der beiden reellen und $z_\nu$, $\bar{z}_\nu$ ($\Re(z_\nu - 1) > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$) je ein Paar komplex konjugierter, rechts von $\Re(z) = 1$ liegender Wurzeln der Gleichung

$$z - e^{\eta(z-1)} = 0. \tag{77}$$

Für diese nach wachsendem Realteil geordneten $z_\nu$ gilt asymptotisch

$$z_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\eta}\left[\log\left(2\pi\nu + \frac{\pi}{2}\right) + i\left(2\pi\nu + \frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (\nu \to \infty); \tag{77a}$$

daß außer $z = 1$, bzw. den $s - 1$ Wurzeln (47a) keine weitere Wurzel von (77) auf, bzw. *links* von der Geraden $\Re(z) = 1$ liegt, kann man leicht mit Hilfe des Rouchéschen Satzes (s. I., (43)) zeigen. Durch (76) wird so die Wahrscheinlichkeit $P(t^*)$ in ein aperiodisches Glied nebst einer unendlichen Reihe gedämpfter Schwingungen zerlegt.

Verschiebt man *zweitens* die Integrationsgerade (75) in die linke Halbebene, so wird der Pol $z = 1$, mit dem Residuum $-1$, überschritten, und man hat

$$P(t^*) = -(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(z)=-0} \frac{e^{\eta t^*(1-z)}}{z}\cdot\frac{dz}{1 - \frac{e^{\eta(z-1)}}{z}} \qquad (t^*>0). \tag{78}$$

Hier darf unter dem $\int$-Zeichen der Faktor $1 - \left(\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}\right)^{[t^*]+1}$ hinzugefügt werden, da der dadurch hinzutretende Integralteil sich (durch Verschiebung

des Integrationsweges nach $\Re e\,(z) = -\infty$) als gleich Null erweist. Es wird so

$$P(t^*) = -(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re e\,(z)=-0} \frac{e^{\eta t^*(1-z)}}{z}\cdot\frac{1-\left(\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}\right)^{[t^*]+1}}{1-\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}}\,dz$$

$$= -(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re e\,(z)=-0}\sum_{\nu=0}^{[t^*]}\frac{e^{\eta(1-z)(t^*-\nu)}}{z^{\nu+1}}\,dz,$$

und hieraus folgt, wenn die letzten Integrale als Residuen in $z=0$ berechnet werden:

$$(79)\qquad \boxed{P(t^*) = (1-\eta)\sum_{\nu=0}^{[t^*]}\frac{[\eta(\nu-t^*)]^\nu}{\nu!}e^{\eta(t^*-\nu)} \qquad (\eta<1,\ s=1,\ t^*\geqq 0)}.$$

Daß $P(t^*)$, als Wahrscheinlichkeit, mit $t^*$ monoton zunimmt, und daß $\lim\limits_{t^*\to\infty} P(t^*) = 1$ ist, läßt der Ausdruck (79) zunächst nicht erkennen; doch folgt dies leicht aus der aus (79) abzuleitenden Funktionalgleichung

$$(79\,\mathrm{a})\qquad P'(t^*) = \begin{cases}\eta P(t^*) & (0<t^*<1),\\ \eta\,(P(t^*)-P(t^*-1)) & (1<t^*)\end{cases}$$

und der Anfangsbedingung $P(0) = 1-\eta$.

Die den Gleichungen (76) und (79) für $s>1$ entsprechenden, analog abzuleitenden Formeln sind umständlich gebaut; einfache Gestalt hingegen hat die Formel für $P(0)$. Für die Berechnung von $P(0)$ aus $P(t^*)$ gilt analog Anm. 2 und Gl. (6a) $P(0) = \lim\limits_{t^*\to+0} P(t^*)$. Verschiebt man nun in (47) die Integrationsgerade nach $\Re e\,(z)<0$, wobei *nur* der Pol $z=1$, mit dem Residuum $-1$, überstrichen wird, entwickelt den Nenner $\frac{1}{z^s-e^{s\eta(z-1)}} = \frac{1}{z^s}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}}$ in eine geometrische Reihe und integriert gliedweise, so folgt, mit (74), für $t^*\to+0$:

$$(80)\qquad P(0) = s(1-\eta)\prod_{\varkappa=1}^{s-1}\frac{1}{1-z_\varkappa(\eta)},$$

worin die $z_\varkappa$ die innerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln von (47a) sind. Hieraus durch Logarithmierung

$$(81)\quad \log P(0) = \log s(1-\eta) - \sum_{\varkappa=1}^{s-1}\log(1-z_\varkappa(\eta))$$

$$= \log s(1-\eta) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1-}}\log(1-z)\,d\log(z^s-e^{s\eta(z-1)})$$

(unter $\log(1-z)$ den für $z=0$ verschwindenden Zweig des Logarithmus verstanden) und weiter, da $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1-}} \log(1-z)\, d\log(z^s(z-1)) = 0$ ist,

$$\log P(0) = \log s(1-\eta) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1-}} \log(1-z)\, d\log \frac{1-\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= \log s(1-\eta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1-}} \log \frac{1-\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}}{1-\frac{1}{z}} \cdot \frac{dz}{z-1}.$$

Dehnt man jetzt den Integrationskreis über den Einheitskreis hinaus aus, so ist das Residuum in $z=1$ (gleich $\log s(1-\eta)$) abzuziehen, und da weiter

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1+}} \log\left(1-\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z-1} = 0$$

ist, erhält man

(82) $$\boxed{\log P(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_{|z|=1+}} \log\left(1-\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}\right)\frac{dz}{z-1} \quad (\eta<1)}.$$

Da

$$\left|\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}\right| < 1, \text{ für } 1<|z|<\frac{1}{\eta}$$

ist, kann (82) durch Reihenentwicklung von log und darauffolgende gliedweise Integration ausgewertet werden:

(83) $$\boxed{\log P(0) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa}\left(e^{-\eta s\varkappa}\sum_{\mu=0}^{s\varkappa-1}\frac{(\eta s\varkappa)^\mu}{\mu!} - 1\right) \quad (\eta<1)}.$$

Für großes $s$ und konstantes $\eta$ folgt aus (82), analog I., (47), (47a), asymptotisch

(84) $$\boxed{\log P(0) = -\frac{1}{1-\eta}\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \quad (\eta<1,\ s\gg 1)}$$

oder

(84a) $$\boxed{P(0) = 1-\frac{1}{1-\eta}\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \quad (\eta<1,\ s\gg 1)}.$$

Formt man weiter das Produkt $\Pi$ in (47) ähnlich um wie eben den Ausdruck (80), so folgt

$$(85)\quad P(t^*)=1-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re e(z)=1+} e^{s\eta t^*(1-z)}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{1-x}\right)\log\left(1-\frac{e^{s\eta(x-1)}}{x^s}\right)dx\right)\frac{dz}{z-1},$$

worin $\int\limits_C \ldots dx$ über eine Gerade $\Re e(x)>\Re e(z)$ zu erstrecken ist.

Um aus (85) z. B. die asymptotische Entwicklung für $t^*=\frac{\text{const}}{\sqrt{s}}$ abzuleiten, hat man $\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\right)$ durch die Exponentialreihe zu ersetzen, deren Glieder vom dritten ab, gemäß elementaren Abschätzungen nicht mehr zu berücksichtigen sind, und erhält mittels der Sattelpunktsmethode:

$$(86)\quad \boxed{P(t^*)=1-\frac{1}{1-\eta}\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\sqrt{2s}\cdot\tau(1-\eta)-\tau^2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right)\quad(\eta<1,\ s\gg 1)},$$

wobei gesetzt ist

$$(86\,a)\qquad t^*=\tau\sqrt{\frac{2}{s}}.$$

In gleicher Weise wie die Formel (47) kann auch der ihr bei variablen Abfertigungszeiten entsprechende Ausdruck (71) behandelt werden; z. B. gilt analog (82)

$$(87)\quad \boxed{\log P(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K\,|z|=1+}\log\left(1-\frac{s(s\eta(z-1))}{z^s}\right)\frac{dz}{z-1}\qquad(\eta<1)}.$$

Auf die vielfachen Anwendungen, die die hier gegebenen Formeln zulassen, wird an anderer Stelle[4]) eingegangen werden.

---

[4]) Telegraphen- und Fernsprechtechnik 19 (1930); Elektrische Nachrichtentechnik 8 (1931).

(Eingegangen am 18. Mai 1930.)

# Außerwesentliche Singularitäten linearer Differentialgleichungen.

Von

Gerhard Hanke in Gießen.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen versteht man bekanntlich unter einem außerwesentlich singulären Punkt einen solchen, in dem zwar Koeffizienten der Differentialgleichung singulär sind, in dessen Umgebung sich aber die Integrale der Differentialgleichung regulär verhalten. Mögen so auf den ersten Anblick die außerwesentlichen Singularitäten als erschwerendes Moment erscheinen, so wird ihr Auftreten von ausschlaggebender Bedeutung, wenn es sich darum handelt, bei willkürlich vorgegebenen wesentlich singulären Punkten eine Differentialgleichung zu konstruieren, die eine willkürlich vorgegebene Monodromiegruppe zuläßt (Riemannsches Problem).

Damit ein Punkt außerwesentliche Singularität der Differentialgleichung ist, müssen also offenbar erstens die zu ihm gehörigen Exponenten voneinander verschiedene nichtnegative ganze Zahlen und zweitens die zu diesen Exponenten gehörenden Integrale logarithmenfrei sein. Die bisher bekannten Bedingungen für die Freiheit von Logarithmen[1]) besagen aber nur, daß sämtliche Koeffizienten der Teile der Integrale, die mit dem Logarithmus behaftet sind, verschwinden müssen, und es sollen nun im folgenden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben werden, die gestatten, *unmittelbar aus der Differentialgleichung* abzulesen, ob ein Punkt außerwesentliche Singularität ist oder nicht.

Den Anstoß zu den folgenden Entwicklungen gab eine Arbeit von Garnier[2]), in dessen Betrachtungen eine lineare homogene Differential-

[1]) Vgl. z. B. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905, S. 164.

[2]) R. Garnier, Le problème de Plateau, Annales de l'Ecole Normale, 3. série, 45 (1928), S. 53ff.

gleichung zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typ eine wichtige Rolle spielt. Durch eine bekannte Substitution bringt er sie auf die Form

$$(*) \qquad y'' = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} y' + \left\{ q_1(x) + \frac{\Theta(x)}{\psi(x)} \right\} y, \qquad \psi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i),$$

wobei angenommen ist, daß der Punkt $x = \lambda_\mu$ die Exponenten $0, 2$ besitzt, und gibt im weiteren[3]) als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $x = \lambda_\mu$ eine außerwesentlich singuläre Stelle ist, das Bestehen der Gleichung

$$(**) \qquad q_1(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\Theta(x)}{\psi'(x)}\right) - \left(\frac{\Theta(x)}{\psi'(x)}\right)^2 = 0 \quad \text{für} \quad x = \lambda_\mu$$

an. Bei näherem Zusehen stellt sich diese Bedingung natürlich nur als eine Umrechnung der entsprechenden, bei Horn a. a. O. gegebenen Bedingung heraus, aber sie erscheint für die Anwendung deswegen besonders praktisch, weil in sie direkt die Koeffizienten der Differentialgleichung eingehen. Es scheint daher lohnend, diese Umrechnung für eine Differentialgleichung beliebiger Ordnung zu verfolgen, vor allem da sie auch im allgemeinen Falle zu sehr eleganten Ergebnissen führt, und da der Weg, auf dem man zum Ziele kommt, nicht ganz auf der Hand liegt.

## I.

Es sei also

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{k} p_i y^{(k-i)} = 0, \qquad p_0 = 1$$

eine Differentialgleichung vom Fuchsschen Typ, d. h. es sei

$$p_\mu = \frac{F_\mu(x)}{\varphi^\mu(x)\,\psi^\mu(x)}$$

mit

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - t_i), \qquad \psi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i),$$

und die $m$ wesentlich singulären Punkte $t_\mu$ mögen die Exponenten $\alpha_{\mu 1}, \ldots, \alpha_{\mu k}$, die $n$ außerwesentlichen Singularitäten $\lambda_\mu$[4]) die Exponenten $0, 1, \ldots, k-2, k$ haben. Letztere Annahme ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, sie besagt, daß alle außerwesentlich singulären Punkte einfache sind, und man kann immer[5]) von einer beliebigen Differentialgleichung zu einer derselben

---

[3]) a. a. O., S. 75, 76.

[4]) Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, sei erwähnt, daß im Falle des Riemannschen Problems $n \geqq (m-1)\frac{k(k-1)}{2} + 1 - k$ sein muß.

[5]) Vgl. L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 1, Leipzig 1897, § 225, S. 378 ff., im besonderen den Satz auf S. 380.

Klasse übergehen, die nur einfache außerwesentlich singuläre Stellen besitzt. Ferner ist $F_\mu(x)$ höchstens vom Grade $\mu(m+n-1)$.

Durch Multiplikation mit $\psi(x)(x-\lambda_j)^{k-1}$ geht (1) über in

$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{P}_i(x)(x-\lambda_j)^{k-i} y^{(k-i)} = 0,$$

wobei

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{\psi(x)}{x-\lambda_j}, \qquad \mathfrak{P}_\mu(x) = \frac{F_\mu(x)(x-\lambda_j)^{\mu-1}}{\varphi^\mu(x)\psi^{\mu-1}(x)}$$

ist. Bilden wir nun daraus die zu $x=\lambda_j$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$\sum_{i=0}^{k} s(s-1)\dots(s-k+i+1)\mathfrak{P}_i(\lambda_j) = 0,$$

und soll diese die Wurzeln $0, 1, \dots, k-2, k$ haben, so muß zunächst offenbar

$$\mathfrak{P}_{k-\nu}(\lambda_j) = 0$$

sein für $\nu = 0, 1, \dots, k-2$. Folglich muß $F_{k-\nu}(x)$ durch $\psi(x)$ teilbar, d. h.

$$F_{k-\nu}(x) = \psi(x)\cdot F_{k-\nu,n}(x) \qquad (\nu = 0, 1, \dots, k-2) \tag{2}$$

sein, wo $F_{\mu,n}(x)$ vom Grade $\mu(m+n-1)-n$ ist. Nun üben wir auf die Differentialgleichung (1) die der Garnierschen entsprechende Substitution

$$y = \Pi\cdot\bar{y}, \qquad \Pi = \prod_{i=1}^{m}(x-t_i)^{\frac{m_i - \frac{k(k-1)}{2}}{k}} \tag{3}$$

aus, wo

$$m_i = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{i\mu}$$

gesetzt ist. Dann wird zunächst

$$y^{(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \Pi^{(\mu-i)}\bar{y}^{(i)},$$

und die Differentialgleichung (1) erscheint in der Form

$$\sum_{j=0}^{k} p_j \sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-j}{i} \Pi^{(k-j-i)}\bar{y}^{(i)} = 0$$

oder nach Umordnung der Summationen in der Form

$$\sum_{i=0}^{k} \bar{y}^{(k-i)} \sum_{j=0}^{i} p_j \binom{k-j}{k-i} \Pi^{(i-j)} = 0. \tag{4}$$

Für $\Pi^{(\mu)}$ ergibt sich leicht die Rekursionsformel

$$\Pi^{(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu-1} A_{\mu-1}^{i}\, \Pi^{(\mu-i-1)}$$

und daraus

$$\frac{\Pi^{(l)}}{\Pi} = \Delta_l = \begin{vmatrix} A_{l-1}^{0} & A_{l-1}^{1} & \dots & A_{l-1}^{l-2} & A_{l-1}^{l-1} \\ -1 & A_{l-2}^{0} & \dots & A_{l-2}^{l-3} & A_{l-2}^{l-2} \\ 0 & -1 & \dots & A_{l-3}^{l-4} & A_{l-3}^{l-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_1^0 & A_1^1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & A_0^0 \end{vmatrix}$$

mit

$$A_\mu^\nu = (-1)^\nu \binom{\mu}{\nu} \nu! \sum_{i=1}^{m} \frac{m_i \dfrac{k(k-1)}{2}}{k(x-t_i)^{\nu+1}}.$$

Berücksichtigt man nun die Partialbruchentwicklung[6])

$$p_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\dfrac{k(k-1)}{2} - m_i}{x-t_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_i},$$

so erhält man nach einfacher Rechnung aus (4) als transformierte Differentialgleichung — wir ersetzen $\bar{y}$ wieder durch $y$ —

$$y^{(k)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\, y^{(k-1)} + \sum_{i=2}^{k} y^{(k-i)} \left\{ q_{i-1}(x) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Theta_{ji}(x)}{\psi^j(x)} \right\}, \tag{5}$$

wobei

$$q_{i-1}(x) = -\binom{k}{i} \Delta_i + \binom{k-1}{i-1} \Delta_{i-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j \dfrac{k(k-1)}{2}}{x-t_j},$$

$$\Theta_{1i}(x) = \binom{k-1}{i-1} \psi'(x)\, \Delta_{i-1} - \binom{k-2}{i-2} \Delta_{i-2} \frac{F_{2,n}(x)}{\varphi^2(x)}$$

und im übrigen

$$\Theta_{ji}(x) = -\binom{k-j-1}{i-j-1} \Delta_{i-j-1} \frac{F_{j+1,n}(x)}{\varphi^{j+1}(x)}$$

gesetzt wurde. Was den Zweck der Transformation (3) anlangt, so sei erwähnt, daß sie eine gewisse Normierung bewirkt. Es besitzt nämlich jetzt für jeden wesentlich singulären Punkt $t_\mu$ die Summe der Exponenten denselben Wert und zwar $\frac{k(k-1)}{2}$, und es ist zu erwarten, daß aus diesem Grunde das Ergebnis in möglichst einfacher und einheitlicher Gestalt erscheint.

[6]) Man vgl. dazu etwa Horn, a. a. O., S. 169, 170.

## II.

Wir kommen nun zum wesentlichen Teil unserer Ausführungen. Indem wir jetzt

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{\psi(x)}{x-\lambda_\mu}, \qquad \mathfrak{P}_1(x) = -\psi'(x),$$

(6)
$$\mathfrak{P}_\nu(x) = -\left\{q_{\nu-1}(x)\,\psi(x) + \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{\Theta_{j\nu}(x)}{\psi^{j-1}(x)}\right\}(x-\lambda_\mu)^{\nu-1}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, k)$$

setzen, bringen wir (5) wieder auf die Normalform

$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{P}_i(x)\,(x-\lambda_\mu)^{k-i}\,y^{(k-i)} = 0.$$

Dann ist, natürlich infolge der Bedingungsgleichung (2),

(7) $$\mathfrak{P}_\nu(\lambda_\mu) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots, k,$$

und es ergibt sich als determinierende Fundamentalgleichung für den Punkt $x = \lambda_\mu$

(8) $$f(s) \equiv s(s-1)\ldots(s-k+2)(s-k)\,\psi'(\lambda_\mu) = 0.$$

Es handelt sich jetzt noch darum, die bereits erwähnten (siehe Fußnote [1]) Bedingungen für die Logarithmenfreiheit der Integrale einer näheren Diskussion zu unterziehen.

Bringt man sie in eine geschlossene Form, so lauten sie:

„Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sämtliche zu den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung $s_1, s_2, \ldots, s_k$ $(s_\sigma > s_{\sigma+1})$ gehörigen Integrale der Differentialgleichung keine Logarithmen enthalten, sind

(9) $$g_{s_\nu - s_\varrho}^{(\varrho-\mu)}(s_\varrho) = 0$$

für $\varrho = k, k-1, \ldots, 2; \quad \mu = 2, 3, \ldots, \varrho; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \varrho - \mu + 1.$"

Dabei ist [7])

$$g_\sigma(r) = (-1)^\sigma \cdot D_\sigma \cdot \pi_\sigma,$$

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} f_1(r) & f(r+1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(r) & f_1(r+1) & f(r+2) & 0 & \ldots & 0 \\ f_3(r) & f_2(r+1) & f_1(r+2) & f(r+3) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{\sigma-1}(r) & f_{\sigma-2}(r+1) & f_{\sigma-3}(r+2) & f_{\sigma-4}(r+3) & \ldots & f(r+\sigma-1) \\ f_\sigma(r) & f_{\sigma-1}(r+1) & f_{\sigma-2}(r+2) & f_{\sigma-3}(r+3) & \ldots & f_1(r+\sigma-1) \end{vmatrix},$$

$$f_\sigma(r) = \frac{1}{\sigma!} \sum_{i=0}^{k} r(r-1)\ldots(r-k+i+1)\,\mathfrak{P}_i^{(\sigma)}(\lambda_\mu)$$

[7]) Wegen des willkürlich bleibenden $g_0$ vgl. man Horn, a. a. O., S. 160, 161. Die dort mit $n$ und $g(r)$ bezeichneten Größen sind hier der Einfachheit halber gleich $k$ bzw. $+1$ gewählt.

und für $\sigma \leqq k$ (nur diese Fälle kommen für uns in Betracht)

$$\pi_\sigma = f(r+\sigma+1)f(r+\sigma+2)\dots f(r+k), \qquad \pi_k = 1.$$

Setzen wir in unserem Falle

$$s_1 = k = r_0$$

und im übrigen

$$s_\sigma = r_\sigma,$$

so ist

$$r_\sigma = k - \sigma \qquad (\sigma = 0, 2, 3, \dots, k),$$

und die Bedingungen (9) gehen über in

$$g_{\varrho-\nu}^{(\varrho-\mu)}(k-\varrho) = 0 \tag{11}$$

für $\varrho = k, k-1, \dots, 2; \quad \mu = 2, 3, \dots, \varrho; \quad \nu = 0, 2, 3, \dots, \varrho - \mu + 1;$

NB. für $\varrho = \mu$ ist $\nu = 0$ zu nehmen.

Man könnte zunächst glauben, vor unüberwindbaren Schwierigkeiten zu stehen; soll man doch die $(\varrho-\mu)$-te Derivierte einer $(\varrho-\nu)$-reihigen Determinante auf ihr Verschwinden hin untersuchen. Nimmt man aber die Bedingungen in geeigneter Reihenfolge vor, so kommt man tatsächlich zum Ziel.

Die Zusammengehörigkeit (wir deuten sie durch einen $\rightarrow$ an) von $\varrho, \mu, \nu$ läßt sich nämlich durch folgendes Schema charakterisieren:

$$\varrho \rightarrow \mu = \begin{array}{l} 2 \rightarrow \nu = 0, 2, 3, \dots, \varrho-2, \varrho-1 \\ 3 \rightarrow \nu = 0, 2, 3, \dots, \varrho-2 \\ \vdots \\ \varrho-1 \rightarrow \nu = 0, 2 \\ \varrho \rightarrow \nu = 0, \end{array}$$

und wir betrachten zuerst den Fall

$$\varrho - \nu = 1, \text{ d. h. } \nu = \varrho - 1.$$

Dazu gehören nach diesem Schema

$$\mu = 2$$

und

$$\varrho = k, k-1, \dots, 3$$

($\varrho = 2$ kommt nicht in Frage, da $\nu = \varrho - 1 \neq 1$ ist), d. h. dieser Fall liefert die Bedingungen (vgl. (11))

$$g_1^{(\varrho-2)}(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = k, k-1, \dots, 3)$$

oder, da nach (10) explizit

$$g_1(r) = -f_1(r)f(r+2)f(r+3)\dots f(r+k)$$

ist,

$$\{f_1(k-\varrho)f(k-\varrho+2)f(k-\varrho+3)\dots f(k-\varrho+k)\}^{(\varrho-2)} = 0.$$

Nun verschwinden für $\varrho = 3$ 1 Faktor,
für $\varrho = 4$ 2 Faktoren,
$\vdots$ $\vdots$
für $\varrho = k-1$ $k-3$ Faktoren,
für $\varrho = k$ $k-2$ Faktoren,

. h. allgemein $\varrho - 2$ Faktoren der Klammer,

ie Klammer hat also an der Stelle $\varrho$ eine $(\varrho-2)$-fache Nullstelle, und aher kann die $(\varrho-2)$-te Ableitung dann und nur dann verschwinden, wenn

$B_1$) $$f_1(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = 3, 4, \ldots, k)$$

t. Wir gehen einen Schritt weiter. Zu

$$\varrho - \nu = 2, \text{ d. h. } \nu = \varrho - 2$$

ehören

$$\mu = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

nd dazu, da wieder $\nu = \varrho - 2 \neq 1$, also $\varrho \neq 3$ und ferner $\varrho \geqq \mu$ ist, bzw.

$$\varrho = \begin{matrix} k, k-1, \ldots, 4, 2 \\ k, k-1, \ldots, 4, \end{matrix}$$

. h. (11) liefert die Bedingungen

$$g_2^{(\varrho-2)}(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = k, k-1, \ldots, 4, 2)$$

nd

$$g_2^{(\varrho-3)}(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = k, k-1, \ldots, 4).$$

Nun ist nach (10)

$$g_2(k-\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(k-\varrho) & f(k-\varrho+1) \\ f_2(k-\varrho) & f_1(k-\varrho+1) \end{vmatrix} \cdot f(k-\varrho+3)\ldots f(k-\varrho+k),$$

nd da nach (8) und ($B_1$) für $\varrho = 4, 5, \ldots, k$ alle Elemente dieser Deterinante bis auf $f_2(k-\varrho)$ verschwinden, da ferner $\varrho$ jetzt eine $(\varrho-3)$-ache Nullstelle des neben der Determinante stehenden Produktes ist, so ist

$$g_2^{(\varrho-3)}(k-\varrho) = 0$$

on selbst erfüllt, und die $(\varrho-2)$-te Ableitung verschwindet dann und ur dann, wenn

$B_2$) $$f_2(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = 4, 5, \ldots, k)$$

t. Für $\varrho = 2$ ist

$$f(k+1)\ldots f(2k-2) \neq 0,$$

nd daher fordert

$$g_2(k-2) = 0$$

die Bedingungsgleichung

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad \begin{vmatrix} f_1(k-2) & f(k-1) \\ f_2(k-2) & f_1(k-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Jetzt wäre der Fall $\varrho - \nu = 3$ vorzunehmen. Er liefert, wieder unter Benutzung der vorherigen Resultate, die Bedingungen

$$(\mathfrak{B}_3) \qquad f_3(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = 5, 6, \ldots, k)$$

und

$$(\mathfrak{B}_2) \qquad \begin{vmatrix} f_2(k-3) & f(k-1) \\ f_3(k-3) & f_1(k-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Nehmen wir nun an, wir hätten nach Behandlung des Falles $\varrho - \nu = \sigma - 1$ [8]) insgesamt die Bedingungen erhalten

$$(12) \qquad f_l(k-\varrho) = 0 \qquad (\varrho = l+2, \ldots, k;\ l = 1, 2, \ldots, \sigma - 1)$$

und

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} f_{l-1}(k-l) & f(k-1) \\ f_l(k-l) & f_1(k-1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (l = 2, 3, \ldots, \sigma - 1),$$

und betrachten wir jetzt den Fall

$$\varrho - \nu = \sigma, \quad \text{d. h.} \quad \nu = \varrho - \sigma.$$

Ihm sind nach unserem Schema

$$(14) \qquad \mu = \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \sigma+1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \varrho = \begin{matrix} k, k-1, \ldots, \sigma+2, \sigma \\ k, k-1, \ldots, \sigma+2, \sigma \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k, k-1, \ldots, \sigma+2, \sigma \\ k, k-1, \ldots, \sigma+2 \end{matrix}$$

zugeordnet; es ist ja wieder $\nu = \varrho - \sigma + 1$, d. h. $\varrho \neq \sigma + 1$, und ferner muß $\varrho \geqq \mu$ und $\varrho \geqq \sigma$ sein, da $\nu \geqq 0$ ist. Es ergeben sich daher aus (11) die Bedingungen

$$g_\sigma^{(\varrho-\mu)}(k-\varrho) = 0,$$

wobei die Zusammengehörigkeit der $\varrho$- und $\mu$-Werte aus (14) ersichtlich ist (sie entsprechen einander zeilenweise). Der explizite Ausdruck für $g_\sigma(k-\varrho)$ ist durch (10) gegeben, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß für $\varrho = \sigma + 2, \ldots, k$ alle Elemente von $D_\sigma$ außer $f_\sigma(k-\varrho)$ verschwinden; denn nach (12) ist von den Elementen der ersten Spalte

[8]) Dabei sei $\sigma \leqq k-2$; auf die in gewissem Sinne singulären Fälle $\sigma = k-1, k$ kommen wir sofort zu sprechen.

nur $f_\sigma(k-\varrho)$ von Null verschieden, und nach (8) und (12) gilt

$$f_l(k-\varrho+\tau)=0 \quad (\varrho=l+\tau+2,\ldots,k+\tau;\ l=0,1,\ldots,\sigma-1),$$
$$f_0(r)=f(r),$$

so daß gerade noch

$$f_{\sigma-\tau}(k-\varrho+\tau)=0$$

ist für $\varrho=\sigma+2,\ldots,k$. Ferner ist in

$$\pi_\sigma=f(k-\varrho+\sigma+1)\ f(k-\varrho+\sigma+2)\ldots f(k-\varrho+k)$$

$\varrho=\sigma+2$ eine 1-fache Nullstelle,

$\varrho=\sigma+3$ eine 2-fache Nullstelle,

$\vdots$

$\varrho=k$ eine $k-(\sigma+1)$-fache Nullstelle,

also $\varrho$ eine $\varrho-(\sigma+1)$-fache Nullstelle.

Folglich ist, da mithin $g_\sigma(k-\varrho)$ an der Stelle $\varrho$ von der $(\varrho-2)$-ten Ordnung verschwindet,

$$g_\sigma^{(\varrho-\mu)}(k-\varrho)=0 \qquad (\mu=3,4,\ldots,\sigma+1)$$

von selbst erfüllt und

$$g_\sigma^{(\varrho-2)}(k-\varrho)=0$$

dann und nur dann, wenn

$$(B_\sigma) \qquad f_\sigma(k-\varrho)=0 \qquad (\varrho=\sigma+2,\ldots,k)$$

ist. Für $\varrho=\sigma$ wird

$$\pi_\sigma \neq 0,$$

und $f_{\sigma-\tau-2}(k-\sigma+\tau)$, $\tau=0,1,\ldots,\sigma-2$ ist die letzte verschwindende Größe, so daß die letzten beiden Zeilen von $D_\sigma(k-\sigma)$ von Null verschiedene Elemente enthalten. $g_\sigma(k-\sigma)$ verschwindet also sicher von der $(\sigma-2)$-ten Ordnung, und daher ist zunächst

$$(15) \qquad g_\sigma^{(\sigma-\mu)}(k-\sigma)=0 \qquad (\mu=3,4,\ldots,\sigma)$$

von selbst erfüllt. Was die Bedingungsgleichung

$$(16) \qquad g_\sigma^{(\sigma-2)}(k-\sigma)=0$$

anlangt, so sei folgendes bemerkt. Entwickelt man $D_\sigma(k-\varrho)$ nach den Unterdeterminanten zweiter Ordnung der letzten beiden Zeilen, so bleiben in dieser Entwicklung offenbar nur die Glieder stehen, in denen die Determinante zweiter Ordnung als zweite Spalte

$$f\,(k-\varrho+\sigma-1)$$
$$f_1\,(k-\varrho+\sigma-1)$$

enthält; alle übrigen Glieder sind identisch Null, da in diesen die zugehörige Determinante $(\sigma-2)$-ter Ordnung in der letzten Spalte lauter Nullen besitzt. Berücksichtigt man nun (13), so verschwinden für $\varrho=\sigma$

alle verbleibenden Glieder der Entwicklung von der $(\sigma-1)$-ten Ordnung bis auf das Glied, in dem die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{\sigma-1}(k-\sigma) & f(k-1) \\ f_\sigma(k-\sigma) & f_1(k-1) \end{vmatrix}$$

als Faktor auftritt; dieses hat an der Stelle $\varrho=\sigma$ nur eine $(\sigma-2)$-fache Nullstelle. Jetzt folgt aus (16) sofort

$$(\mathfrak{B}_{\sigma-1}) \qquad \begin{vmatrix} f_{\sigma-1}(k-\sigma) & f(k-1) \\ f_\sigma(k-\sigma) & f_1(k-1) \end{vmatrix} = 0,$$

und die Bedingungsgleichungen (12) und (13) gelten auch für $l=\sigma$, d. h. die dort gemachte Annahme ist richtig.

Die Fälle $\sigma=k-1, k$ lassen sich nun mit wenigen Worten erledigen. Man prüft leicht nach, daß hier nur die letzte Spalte der in (14) angegebenen $\varrho$-Werte und die dazugehörigen $\mu$-Werte in Frage kommen, es ergeben sich also als Bedingungen die Bedingungsgleichungen (15) und (16), wobei $\sigma=k-1, k$ zu setzen ist, und auf dieselbe Weise wie eben folgt, daß (13) auch noch für $l=k-1, k$ gelten muß.

Wir haben so das Resultat erhalten, daß die Bedingungen (11) dann und nur dann erfüllt sind, wenn

$$(\mathrm{B}) \qquad f_\sigma(0)=f_\sigma(1)=\ldots=f_\sigma(k-\sigma-2)=0 \quad (\sigma=1,2,\ldots,k-2)$$

und

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{vmatrix} f_{\sigma-1}(k-\sigma) & f(k-1) \\ f_\sigma(k-\sigma) & f_1(k-1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (\sigma=2,3,\ldots,k)$$

ist, und die $\frac{k(k-1)}{2}$ Bedingungen (B) und $(\mathfrak{B})$ sind also notwendig und hinreichend dafür, daß die zu den Exponenten $0, 1, \ldots, k-2, k$ gehörigen Integrale frei von Logarithmen sind.

## III.

Nun bleibt noch die Umrechnung obiger Bedingungen in die Koeffizienten der Differentialgleichung (5).

Berücksichtigt man die Definitionsgleichung von $f_\sigma(r)$ (vgl. (10)), so lassen sich die Bedingungen (B) umschreiben in die folgenden

$$(17) \qquad \mathfrak{P}_i^{(\sigma)}(\lambda_\mu)=0 \quad (i=\sigma+2,\ldots,k;\ \sigma=1,2,\ldots,k-2),$$

und diese besagen, entsprechend geordnet, daß

$$(18) \qquad \mathfrak{P}_\nu'(\lambda_\mu)=\mathfrak{P}_\nu''(\lambda_\mu)=\ldots=\mathfrak{P}_\nu^{(\nu-2)}(\lambda_\mu)=0 \quad (\nu=3,4,\ldots,k)$$

sein muß. Faßt man aber den durch (6) gegebenen Ausdruck für $\mathfrak{P}_\nu(x)$ ins Auge, so fordern offenbar die Gleichungen (18), daß $\Theta_{j\nu}(x)$ den Faktor

$(x-\lambda_\mu)^{j-1}$ enthalten muß für $\nu = 3, 4, \ldots, k$ und $j = 1, 2, \ldots, \nu-1$. Wir wollen nun

$$\sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{\Theta_{j\nu}(x)}{\psi^{j-1}(x)} = \Theta_\nu(x)$$

setzen, dann fordern also die Bedingungen (B), daß $\Theta_\nu(x)$ im Punkte $x = \lambda_\mu$ holomorph ist.

Mit Hilfe dieser neuen Bezeichnung lassen sich schließlich die Bedingungen ($\mathfrak{B}$) in eine elegante und übersichtliche Form bringen.

Nach (6) ist jetzt

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = -\{q_{\nu-1}(x)\,\psi(x) + \Theta_\nu(x)\}(x-\lambda_\mu)^{\nu-1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, k),$$

und es wird

$$(19)\quad \mathfrak{P}_\nu^{(\sigma)}(\lambda_\mu) = -\binom{\sigma}{\nu-1}(\nu-1)!\left[\frac{d^{\sigma-\nu+1}}{dx^{\sigma-\nu+1}}\{q_{\nu-1}(x)\,\psi(x) + \Theta_\nu(x)\}\right]_{x=\lambda_\mu}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, \sigma+1;\ \sigma = 1, 2, \ldots, k-2, \ldots).$$

Ferner ergibt sich im Hinblick auf die Gleichungen (17) und (7)

$$(20)\qquad f_\sigma(r) = \frac{1}{\sigma!}\sum_{i=0}^{\sigma+1} r(r-1)\ldots(r-k+i+1)\,\mathfrak{P}_i^{(\sigma)}(\lambda_\mu)$$

für $\sigma = 0, 1, \ldots, k$, wenn wir voraussetzen, daß

$$\mathfrak{P}_{k+1}^{(k)}(\lambda_\mu) \equiv 0$$

ist, und aus (20) folgt

$$(21)\quad f_\sigma(k-\sigma) = \frac{1}{\sigma!}\sum_{i=\sigma}^{\sigma+1}(k-\sigma)(k-\sigma-1)\ldots(i-\sigma+1)\,\mathfrak{P}_i^{(\sigma)}(\lambda_\mu)$$
$$(\sigma = 0, 1, \ldots, k).$$

Da, wieder unter Berücksichtigung der Gleichungen (17) und (7),

$$f_{\sigma-1}(r) = \frac{1}{(\sigma-1)!}\sum_{i=0}^{\sigma} r(r-1)\ldots(r-k+i+1)\,\mathfrak{P}_i^{(\sigma-1)}(\lambda_\mu) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, k)$$

ist, so erhält man weiter

$$(22)\qquad f_{\sigma-1}(k-\sigma) = \frac{1}{(\sigma-1)!}(k-\sigma)!\,\mathfrak{P}_\sigma^{(\sigma-1)}(\lambda_\mu) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots k).$$

Nun liefern die Gleichungen (21) und (22) für $\sigma > 1$ mit Hilfe der Beziehung (19)

$$f_\sigma(k-\sigma) = -(k-\sigma)!\,\{q_{\sigma-1}(\lambda_\mu)\,\psi'(\lambda_\mu) + \Theta'_\sigma(\lambda_\mu) + \Theta_{\sigma+1}(\lambda_\mu)\},$$
$$\Theta_{k+1}(x) \equiv 0,$$
$$f_{\sigma-1}(k-\sigma) = -(k-\sigma)!\,\Theta_\sigma(\lambda_\mu)$$

und für $\sigma = 1$ unter Beachtung von (6) und (19)

$$f_1(k-1) = -(k-1)!\,\{\psi''(\lambda_\mu) + \Theta_2(\lambda_\mu)\},$$
$$f(k-1) = -(k-1)!\,\psi'(\lambda_\mu).$$

Führt man diese Werte in ($\mathfrak{B}$) ein, so gehen die Bedingungen ($\mathfrak{B}$) über in

$$\psi'^2(x)\left\{q_{\sigma-1}(x) + \frac{\Theta_{\sigma+1}(x)}{\psi'(x)} + \frac{d}{dx}\left\{\frac{\Theta_\sigma(x)}{\psi'(x)}\right\} - \frac{\Theta_\sigma(x)\,\Theta_2(x)}{\psi'^2(x)}\right\} = 0 \quad \text{für} \quad x = \lambda_\mu$$

bzw., da $\psi'(\lambda_\mu) \neq 0$ ist, in

$$(23)\quad q_{\sigma-1}(x) + \frac{\Theta_{\sigma+1}(x)}{\psi'(x)} + \frac{d}{dx}\left\{\frac{\Theta_\sigma(x)}{\psi'(x)}\right\} - \frac{\Theta_\sigma(x)\,\Theta_2(x)}{\psi'^2(x)} = 0 \quad \text{für} \quad x = \lambda_\mu$$
$$(\sigma = 2, 3, \ldots, k).$$

Unser Gesamtergebnis ist also folgendes:

„Damit $x = \lambda_\mu$ ein außerwesentlich singulärer Punkt unserer Differentialgleichung (1) ist, muß erstens die aus (1) durch die Transformation (3) hervorgehende Differentialgleichung die Form

$$y^{(k)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,y^{(k-1)} + \sum_{i=2}^{k} y^{(k-i)}\left\{q_{i-1}(x) + \frac{\Theta_i(x)}{\psi(x)}\right\}$$

mit

$$\frac{1}{\Theta_i(\lambda_\mu)} \neq 0$$

haben, und zweitens müssen die Koeffizienten dieser Differentialgleichung den Beziehungen (23) genügen, und diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend."

Im Falle $k = 2$ hat die transformierte Differentialgleichung (vgl. (*)) von vornherein, nachdem als Exponenten des Punktes $x = \lambda_\mu$ die Werte 0, 2 festgelegt sind, die verlangte Form, und wir erhalten aus (23)

$$q_1(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\Theta_2(x)}{\psi'(x)}\right) - \left(\frac{\Theta_2(x)}{\psi'(x)}\right)^2 = 0 \quad \text{für} \quad x = \lambda_\mu,$$

d. h. die von Garnier angegebene Bedingungsgleichung (**).

Gießen, den 1. März 1930.

(Eingegangen am 4. März 1930.)

# The problem of the least area and the problem of Plateau.

Von

Tibor Radó in Columbus, Ohio (U. S. A.).

To Constantin Carathéodory.

## Introduction.

1. The problem of the least area. Given, in the $xyz$-space, a Jordan curve $\Gamma^*$ [1]), we shall say that a system of equations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

defines a continuous surface $S$ bounded by $\Gamma^*$, if first the functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are continuous for $u^2 + v^2 \leqq 1$, and if second the above equations carry the unit circle $u^2 + v^2 = 1$ in a topological way into $\Gamma^*$. We shall denote by $\mathfrak{A}(S)$ the area, in the sense of Lebesgue (see Ch. 1, § 2, No. 9) of $S$ and by $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ the lower bound of the areas of all the continuous surfaces bounded by $\Gamma^*$.

By the *problem of the least area* we shall understand the problem of determining a continuous surface $S$, bounded by $\Gamma^*$, for which $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{a}(\Gamma^*)$.

For a general Jordan curve $\Gamma^*$, $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ may be $+\infty$; in this case, we have $\mathfrak{A}(S) = +\infty = \mathfrak{a}(\Gamma^*)$ for any continuous surface $S$ bounded by $\Gamma^*$, and the solution of the problem is trivial. So we only have an actual problem if $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ is finite.

2. Suppose that there is a continuous surface

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1,$$

solving the problem of the least area for $\Gamma^*$. If $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ satisfy the conditions of regularity usually assumed in the Calculus of Variations, then the area $\mathfrak{A}(S)$ is given by the familiar formula [2])

$$\mathfrak{A}(S) = \iint\limits_{u^2 + v^2 < 1} (EG - F^2)^{1/2} \, du \, dv,$$

[1]) A Jordan curve is the topological image of the unit circle $u^2 + v^2 = 1$.

[2]) See Ch. 1, § 2, No. 9, c.

where

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

The application of the classical methods gives then, as it is developed in any standard treatise, the result that the minimizing surface $S$ is a minimal surface, that is to say that the mean curvature of $S$ vanishes identically. So $S$ solves *the problem of Plateau* also, which requires the determination of a minimal surface bounded by the given curve $\Gamma^*$.

The assumptions concerning the regularity of the minimizing surface $S$ are however essential for the validity of this conclusion, as it has been pointed out by Lebesgue in his dissertation[3]). Lebesgue gives there the following example[4]). Let $\Gamma^*$ be the unit circle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; then the continuous surface

$$S: \quad x = u, \quad y = v, \quad z = 0, \quad u^2 + v^2 \leqq 1,$$

that is to say the unit circle $x^2 + y^2 \leqq 1$, $z = 0$, is a solution of the problem of the least area. Introduce now polar co-ordinates $\varrho$, $\varphi$ ($u = \varrho \cos\varphi$, $v = \varrho \sin\varphi$) and consider the continuous surface given by

$$S': \begin{cases} x = 2\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)\cos\varphi, \quad y = 2\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)\sin\varphi, \quad z = 0 & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 1, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} - \varrho & \text{for} \quad 0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

This $S'$ is a continuous surface bounded by $\Gamma^*$, according to the definition given in No. 1; as $S'$ consists of the unit circle $x^2 + y^2 \leqq 1$, $z = 0$ and of the straight segment $x = 0$, $y = 0$, $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ and as this *spine* $x = 0$, $y = 0$, $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ obviously does not contribute to the area, $S'$ is another solution of the problem of the least area. This $S'$ is however certainly not a minimal surface, it is certainly not an analytic surface.

Evidently, we could put on any finite number of spines, and this for any continuous surface, without altering the area; and so we see that *the problem of the least area for a Jordan curve $\Gamma^*$ has, if any, infinitely many solutions, that there are non-analytic solutions, that there are solutions which are not minimal surfaces.*

3. So the solution of the problem of the least area does not imply the solution of the problem of Plateau, and conversely, it is known that a minimal surface, bounded by a given curve, does not minimize generally the area. *The problem of Plateau and the problem of the least area are therefore not equivalent problems.*

---

[3]) H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire. Annali di Matematica, Serie III[a], 7 (1902), pp. 231—359.

[4]) Loc. cit. [3]), pp. 354—355.

4. *The main result of the present paper is now the theorem* (see Ch. 3, § 1, No. 1) *that for any Jordan curve $\Gamma^*$, which bounds at least one continuous surface with a finite area, the problem of Plateau and the problem of the least area have a common solution.*

This result, which gives the solution of one of the many problems stated by Lebesgue in his dissertation, seems to be essentially new; it has been only known in the important particular case, and even then in a very restricted form, when the given curve $\Gamma^*$ has a simply covered convex orthogonal projection upon some plane[5]). This assumption restricts essentially the general shape of $\Gamma^*$ (for instance, $\Gamma^*$ can certainly not be knotted). Our result is not restricted by any assumption concerning the shape of $\Gamma^*$; the only assumption is that there is some continuous surface with a finite area, bounded by $\Gamma^*$. Otherwise, $\Gamma^*$ may be arbitrarily knotted, it may not be rectifiable, and so on.

The assumption that $\Gamma^*$ bounds at least one continuous surface with a finite area, is fulfilled for instance by any rectifiable Jordan curve (see Ch. 3, § 1, No. 2). An example of a different type may be obtained from the well-known fact that any closed convex surface has a finite area. So if we consider any Jordan curve $\Gamma^*$, rectifiable or not, situated on such a surface, then this $\Gamma^*$ certainly bounds continuous surfaces with a finite area, for instance the two regions into which it divides the convex surface. So we have the theorem that for any Jordan curve situated on a convex surface the problem of Plateau and the problem of the least area have a common solution.

5. The problem of Plateau. As our main result is the existence of a *common* solution of the problem of Plateau and of the problem of the least area, the present paper is, in particular, a contribution to the problem of Plateau. We are going to give a brief review of this aspect of our results.

6. Several authors considered the particular case when the given Jordan curve $\Gamma^*$ has a simply covered convex projection upon some plane, upon the $xy$-plane for example[6]). In all the papers concerned with this case it is assumed that $\Gamma^*$ satisfies a further condition, namely (at least) the condition that the tangent of the acute angle between the $xy$-plane and any plane which intersects $\Gamma^*$ in at least three distinct points, is $\leqq$ a finite fixed constant $\Delta$; this condition may be called a *three-points condition with the constant* $\Delta$. Denote then by $P^*$ a variable point on $\Gamma^*$, by $P'$ the orthogonal projection of $P^*$ upon the $xy$-plane, and by $\Gamma'$

[5]) A. Haar, Über das Plateausche Problem. Math. Annalen 97 (1927), pp. 124—258.

[6]) See the references given loc. cit. [5]).

the orthogonal projection of $\Gamma^*$ upon the $xy$-plane. The $z$-co-ordinate of $P^*$ is then a continuous function $\varphi(P')$ of the point $P'$ which varies on $\Gamma'$. In the papers we are speaking about, the problem of Plateau is stated as the boundary value problem of the partial differential equation of the minimal surfaces, namely of the equation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

$\varphi(P')$ being the given boundary function. Our results will allow us to remove the three-points condition, essential for the methods used in the papers we are considering, and to prove the following general theorem, announced without proof by S. Bernstein in 1912 [7]).

*Given, on a convex Jordan curve $\Gamma'$, situated in the $xy$-plane, a continuous boundary function $\varphi(P')$ of the variable point $P'$, there exists a solution $z(x, y)$ of the partial differential equation*

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

*which is analytic in $\Gamma'$, continuous in and on $\Gamma'$, and which reduces on $\Gamma'$ to the given continuous boundary function $\varphi(P')$.*

7. The assumption that the given boundary curve $\Gamma^*$ has a simply covered convex projection upon a plane, restricts essentially the shape of $\Gamma^*$, as it has been pointed out in No. 4. The case of a given boundary curve $\Gamma^*$ of unrestricted shape has been investigated only quite recently.

If the given Jordan curve $\Gamma^*$ has a general shape, the problem of Plateau can certainly not be set as the boundary value problem of the partial differential equation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

In the general case, we have to ask for a minimal surface given in the general parametric form $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. The setting of the problem in the modern literature is the same as in the classical work of Riemann, Weierstrass and Schwarz, and may be formulated as follows.

*Given, in the $xyz$-space, a Jordan curve $\Gamma^*$, determine three functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ with the following properties.*

a) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *are harmonic for* $u^2 + v^2 < 1$,

b) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *satisfy for* $u^2 + v^2 < 1$ *the relations*

$$E = G, \quad F = 0,$$

[7]) See pp. 484—485 of his paper: Sur les équations du Calcul des Variations. Annales sc. de l'École Normale, 3. série, 29 (1912), pp. 431—485.

*where*

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

c) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *remain continuous for* $u^2 + v^2 = 1$ *and the equations*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

*carry the unit circle* $u^2 + v^2 = 1$ *in a topological way into the given Jordan curve* $\Gamma^*$.

Condition c) requires that the continuous surface

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1$$

be bounded by the given Jordan curve $\Gamma^*$. Condition b) expresses that $u, v$ are isothermic parameters. Now, we have the theorem of Weierstrass that a surface, given in isothermic parameters, is a minimal surface if and only if the three coordinates $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are harmonic functions. So condition a) secures that $S$ be a minimal surface.

8. In the above statement of the problem of Plateau, we have three unknown functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. This number may be reduced by the following classical device, due to Weierstrass. $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ being harmonic for $u^2 + v^2 < 1$, we can write

$$x(u, v) = \Re f_1(w), \quad y(u, v) = \Re f_2(w), \quad z(u, v) = \Re f_3(w),$$

where $f_1(w)$, $f_2(w)$, $f_3(w)$ are, for $|w| < 1$, analytic functions of $w = u + iv$. We have then

$$x_u - i x_v = f_1'(w), \quad y_u - i y_v = f_2'(w), \quad z_u - i z_v = f_3'(w).$$

Squaring and adding these equations, we get

$$E - G - 2iF = f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2,$$

and so we see that we have $E = G$, $F = 0$ if and only if

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0 \quad \text{for} \quad |w| < 1.$$

It is now easily shown that this relation holds true if and only if $f_1'(w)$, $f_2'(w)$, $f_3'(w)$ may be expressed in the following form

$$f_1' = i(G^2 - H^2), \quad f_2' = G^2 + H^2, \quad f_3' = 2iGH,$$

where $G$ and $H$ are single-valued analytic functions of $w$ for $|w < 1$. For $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ we get thus the expressions

$$x(u, v) = \Re \int i(G^2 - H^2)\, dw, \quad y(u, v) = \Re \int (G^2 + H^2)\, dw,$$
$$z(u, v) = \Re \int 2iGH\, dw,$$

which are known as the formulae of Weierstrass. The problem of Plateau may be then stated as follows: determine two functions $G(w)$, $H(w)$, analytic for $|w| < 1$, so that the three functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, given by the above formulae of Weierstrass, satisfy condition c) of the problem stated in the preceding No. 7 (the conditions a) and b) being satisfied automatically).

Suppose now first that the given Jordan curve $\Gamma^*$ is a simple closed polygon. The determination of $G$ and $H$ requires then (see Darboux, Théorie générale des surfaces, vol. 1, pp. 547—572) the solution of the monodromic group problem of Riemann, where the prescribed substitutions depend only upon the orientation of the sides of the given polygon, and besides, the solution of a system of transcendental equations, depending upon the lengths of the sides. Whilst the classical literature contains several particular cases, the first general solution of the problems involved has been given by R. Garnier in 1928 [8]). Using the work of Birkhoff and his own on the monodromic group problem, he solves the problem of Plateau first for polygons, and extends then the result to Jordan curves with bounded curvature by a passage to the limit by means of an investigation, important in itself, of the monodromic group problem with variable initial conditions.

9. In a series of brief communications, published in the last four years, J. Douglas announced results of a complete generality concerning the problem of Plateau [9]). As the details of the work of Mr. Douglas were not available at the time the manuscript of the present paper was finished, we restrict ourselves to a summary of his results.

Denote by $D[\xi(\theta), \eta(\theta), \zeta(\theta)]$ a certain functional introduced by Mr. Douglas, which depends upon a variable parametric representation $x = \xi(\theta)$, $y = \eta(\theta)$, $z = \zeta(\theta)$ of the given Jordan curve $\Gamma^*$. Then there exists a parametric representation $x = \xi_0(\theta)$, $y = \eta_0(\theta)$, $z = \zeta_0(\theta)$ of $\Gamma^*$ minimizing the functional $D[\xi(\theta), \eta(\theta), \zeta(\theta)]$, provided $\Gamma^*$ is rectifiable. The harmonic functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ with the boundary values $\xi_0(\theta)$, $\eta_0(\theta)$, $\zeta_0(\theta)$ define a minimal surface bounded by $\Gamma^*$. This minimal surface minimizes the area-integral. The results can be extended in various ways (several boundary curves, one-sided surfaces, $n$-dimensional space). In particular, the problem of Plateau being solved for rectifiable curves, the solution for arbitrary Jordan curves can be obtained by a passage to the limit.

---

[8]) R. Garnier, Sur le problème de Plateau. Annales sc. de l'École Normale, 3. série, **45** (1928), pp. 53—144.

[9]) See the abstracts (containing references to his previous announcements) in the Bulletin of the American Mathematical Society **36**, No. 1, pp. 49—50 and 3, pp. 189—191.

10. As to the present paper, the method is based essentially on the classical area-integral and on conformal mapping, and so it represents a continuation of classical ideas. The method differs from the classical line of attack in an important point, namely it is independent of the monodromic group problem. The idea of the method is to solve the problem of Plateau and the problem of the least area simultaneously, and to obtain this solution by a passage to the limit from the solution of a properly chosen approximate problem (see Ch. 2, § 1).

The passage to the limit implied is a slight modification of that used by the author in two previous papers [10]). In those papers, it has been first shown that if the problem of Plateau is solvable for a sequence $\Gamma_n^*$ of Jordan curves converging in the sense of Fréchet toward a Jordan curve $\Gamma^*$, and if the length of $\Gamma_n^*$ is uniformly bounded, then the problem is also solvable for the limit curve $\Gamma^*$. Applying this theorem to the results of Garnier, it followed in this way that the problem is solvable for any rectifiable Jordan curve. It has been then observed, in the second paper, that the conclusion remains valid even if the problem is solvable for the approximating curves in a certain approximate way, and this remark gave a new independent complete existence proof. The present paper is now based on the fact that the solution obtained in those previous papers possesses, as it follows from the details of the proof, the property that its area is equal to the lower bound of the areas of all polyhedrons with boundary polygons inscribed in the given curve $\Gamma^*$. It is then easy to show that the minimal surface obtained solves the problem of the least area also: and by a slight modification of the details, the result may be extended from rectifiable Jordan curves to any Jordan curve which bounds at least one continuous surface with a finite area. The modification consists of using a lemma of Courant (see Ch. 1, § 3), used by him in his work on conformal mapping, instead of the theorems on the total variations of harmonic and analytic functions used in the previous papers of the author.

As it has been mentioned, essential use is made of conformal mapping. As a matter of fact, our method is a generalization of methods used in the theory of the conformal mapping of plane regions, and in particular of theorems of Carathéodory on the conformal mappings of variable plane regions [11]).

---

[10]) Some remarks on the Problem of Plateau, Proc. Nat. Ac. of Sci., **16**, pp. 242—248, and On the problem of Plateau, Annals of Mathematics, second series, **31** (1930), pp. 457—469.

[11]) See for instance the author's paper: Sur la représentation conforme de domaines variables. Acta Szeged **1**.

## Chapter I.

## Preliminaries.

### § 1.

### On sequences of Jordan curves.

1. A Jordan curve in the $xyz$-space is the topological image of the unit circle $u^2+v^2=1$. Given two Jordan curves $\Gamma, \Gamma^*$, there are topological correspondences between them; consider such a correspondence and denote by $M$ the maximum distance of corresponding points. The lower bound of $M$, for all possible topological correspondences, is the distance, in the sense of Fréchet, of the Jordan curves $\Gamma, \Gamma^*$ and will be denoted by $d(\Gamma, \Gamma^*)$ [12].

2. A sequence $\Gamma_n$ of Jordan curves converges toward a Jordan curve $\Gamma$, if $d(\Gamma, \Gamma_n) \to 0$.

3. Let now two Jordan curves $\Gamma, \Gamma^*$ be given and consider a transformation $P^* = T(P)$ which carries every point $P$ on $\Gamma$ into a definite point $P^*$ on $\Gamma^*$. We do not suppose that $T(P)$ is a one-to-one transformation; in order to avoid trivial complications, we suppose however that there are three distinct points $A, B, C$ on $\Gamma$, such that the corresponding points $A^*, B^*, C^*$ on $\Gamma^*$ are distinct. Such a triple of points $A, B, C$ being fixed, take any two distinct points $P, Q$ on $\Gamma$. Starting from $P$ in the sense $A, B, C$ and proceeding until we reach $Q$, we describe an arc of $\Gamma$ which we denote by $\widehat{PQ}$. Consider now the corresponding points $P^*, Q^*$ on $\Gamma^*$. If these points $P^*, Q^*$ are distinct, denote by $\widehat{P^*Q^*}$ the arc on $\Gamma^*$ described by starting from $P^*$ in the sense $A^*B^*C^*$ and proceeding until we reach $Q^*$; if the points $P^*$ and $Q^*$ coincide, the symbol $\widehat{P^*Q^*}$ may denote the single point $P^* = Q^*$.

The closed arc $\widehat{PQ}$, as defined above, may be called *a small arc* if it contains at most two of the fixed points $A, B, C$.

The transformation $P^* = T(P)$ will be called a *monotonic transformation of $\Gamma$ into a set on $\Gamma^*$* if the points of any small arc $\widehat{PQ}$ of $\Gamma$ are carried into points of the arc $\widehat{P^*Q^*}$, determined on $\Gamma^*$ by the corresponding points $P^*, Q^*$ in the manner described above.

---

[12] This distance may be defined for curves with multiple points also; for our purposes it is however convenient to consider only Jordan curves.

In particular, any topological transformation of $\Gamma$ into $\Gamma^*$ is obviously monotonic.

4. Several properties of monotonic functions generalize immediately to such monotonic transformations. The reader will easily verify the following facts.

a) For any point $P$ on $\Gamma$, the monotonic transformation $P^* = T(P)$ has limits on both sides of $P$; that is to say, if a point $Q$ on $\Gamma$ approaches $P$ in the sense $ABC$, the corresponding point $Q^* = T(Q)$ on $\Gamma^*$ approaches a definit limit $P_+^*$ and if $Q$ approaches $P$ in the sense $CBA$, then $Q^*$ approaches a definit limit $P_-^*$.

b) If $P_+^*$ and $P_-^*$ are identical, then they coincide both with the point $P^* = T(P)$. In other words, if the two limits $P_+^*$ and $P_-^*$ are identical for a point $P$ of $\Gamma$, then the transformation $T(P)$ is continuous at this point $P$.

c) The points of discontinuity of $T(P)$ constitute a denumerable set; so the points of continuity of $T(P)$ are certainly everywhere dense on $\Gamma$.

d) If two distinct points $P, Q$ of $\Gamma$ are carried into the same point on $\Gamma^*$, then one of the two arcs $\overset{\frown}{PQ}$, $\overset{\frown}{QP}$ is carried into a single point of $\Gamma^*$.

5. For monotonic functions Helly found an important theorem to the effect that any bounded sequence of monotonic functions contains everywhere convergent subsequences, the limit functions being of course again monotonic. This theorem and its proof may be extended to monotonic transformations as defined above; so we get the following theorem (the details of the proof may be left to the reader):

Let there be given a Jordan curve $\Gamma$, and a sequence $\Gamma_n^*$ of Jordan curves converging (in the sense of Fréchet) toward a Jordan curve $\Gamma^*$. Take three distinct points $A, B, C$ on $\Gamma$, three distinct points $A_n^*, B_n^*, C_n^*$ on $\Gamma_n^*$, and suppose that $A_n^*, B_n^*, C_n^*$ converge toward three distinct points $A^*, B^*, C^*$ on $\Gamma^*$. Let there be given a sequence of monotonic transformations $T_n(P)$, where $T_n(P)$ carries $\Gamma$ into a set on $\Gamma_n^*$, the points $A, B, C$ being carried into $A_n^*, B_n^*, C_n^*$.

Then the sequence $T_n(P)$ contains everywhere convergent subsequences. That is to say, there is a subsequence $T_{n_k}(P)$, so that the points $P_{n_k}^* = T_{n_k}(P)$ constitute a convergent sequence for all points $P$ on $\Gamma$. If we denote the limit point of the sequence $P_{n_k}^*$ by $P^*$, then the transformation carrying $P$ into $P^*$ is a monotonic transformation of $\Gamma$ into a set on $\Gamma^*$. This transformation obviously carries the points $A, B, C$ into the points $A^*, B^*, C^*$.

## § 2.

## On surfaces and their areas[13]).

1. Given, in the $uv$-plane, a Jordan region $R$ (that is to say, the set of the points in and on a Jordan curve), and three functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ continuous in $R$, we shall say that the equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ define a continuous surface $S$ in the $xyz$-space. If necessary, we shall indicate the data determining $S$ by writing

$$S\colon\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \subset R.$$

It may be observed that a continuous surface is not necessarily a topological image of a Jordan region and that therefore it is generally not determined by the set of its points.

2. Let there be given two continuous surfaces

$$S_1\colon\ x = x_1(u, v), \quad y = y_1(u, v), \quad z = z_1(u, v), \quad (u, v) \subset R_1,$$

$$S_2\colon\ x = x_2(u, v), \quad y = y_2(u, v), \quad z = z_2(u, v), \quad (u, v) \subset R_2.$$

Consider a topological correspondence between the Jordan regions $R_1$, $R_2$. Denote by $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ a couple of corresponding points, and by $P_1$, $P_2$ the points in the $xyz$-space given by the equations

$$x = x_1(u_1, v_1), \quad y = y_1(u_1, v_1), \quad z = z_1(u_1, v_1)$$

and

$$x = x_2(u_2, v_2), \quad y = y_2(u_2, v_2), \quad z = z_2(u_2, v_2)$$

respectively. If $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ vary in $R_1$ and $R_2$, the distance $\overline{P_1 P_2}$ takes on a maximum $M$. The lower bound of this $M$ for all possible topological correspondences between $R_1$ and $R_2$ is the distance, in the sense of Fréchet, of the two continuous surfaces $S_1$ and $S_2$ and will be denoted by $d(S_1, S_2)$.

3. If and only if $d(S_1, S_2) = 0$, we shall say that the surfaces $S_1$ and $S_2$ are identical, or that the equations

$$x = x_1(u, v), \quad y = y_1(u, v), \quad z = z_1(u, v), \quad (u, v) \subset R_1,$$

and

$$x = x_2(u, v), \quad y = y_2(u, v), \quad z = z_2(u, v), \quad (u, v) \subset R_2,$$

are parametric representations of the same continuous surface.

4. We shall say that a sequence $S_n$ of continuous surfaces converges toward a continuous surface $S$, if $d(S, S_n) \to 0$.

---

[13]) See, for literature and a systematical presentation of the subject, the author's paper: Über das Flächenmaß rektifizierbarer Flächen. Math. Annalen 100, pp. 445–479.

5. Let there be given a continuous surface

$$S\colon\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \subset R,$$

and suppose that it is possible to divide $R$ into a finite number of curvilinear triangles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, so that the equations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

carry each of these triangles in a topological way into a non-degenerate rectilinear triangle in the $xyz$-space. Denote these rectilinear triangles by $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$; they are allowed to intersect each other.

The Jordan region $R$ is bounded by a Jordan curve $\Gamma$; we suppose that the equations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

carry $\Gamma$ in a topological way into a simple closed polygon $\mathfrak{P}$.

These assumptions being satisfied, we shall say that $S$ is a polyhedron. More exactly, we say that a continuous surface is a polyhedron, if among its parametric representations there is one fulfilling the above conditions. Such a representation will be called a *typical representation* of the polyhedron.

6. Let there be given a polyhedron $\Pi$, as defined in No. 5. The sum of the areas of the rectilinear triangles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, described in No. 5, is by definition the area of $\Pi$ and will be denoted by $\mathfrak{A}(\Pi)$. This area is independent of the choice of the typical representation of the polyhedron (see loc. cit.[13]), part II, § 2, No. 1).

7. From general theorems on the conformal maps of abstract Riemann surfaces[14]) it follows that any polyhedron $\Pi$ admits of a parametric representation of the following kind[15]).

a) The Jordan region $R$ coincides with the unit circle $u^2 + v^2 \leqq 1$, that is to say $\Pi$ is given by

$$\Pi\colon\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1.$$

b) The representation is typical, as defined at the end of No. 5.

---

[14]) See P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung III. Journal für die reine und angewandte Mathematik 147 (1927), pp. 67—104, and Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta Mathematica 50 (1927), in particular pp. 119 and ff. — The particular case of polyhedrons, as wanted for our purposes, will be considered explicitely by Carathéodory in a forthcoming book on conformal mapping.

[15]) If the polyhedron $\Pi$ is simple, the statement reduces to the theorem, proved already by Schwarz, that then $\Pi$ may be mapped in a one-to-one and (save of course at the edges and vertices) conformal way upon $u^2 + v^2 \leqq 1$.

c) The sides of the curvilinear triangles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, described in No. 5, are analytic arcs including end-points.

d) In the interior of each of the triangles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ the functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are analytic and satisfy the relations

$$E = G, \qquad F = 0,$$

where

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

e) Three distinct points $A$, $B$, $C$, given on the unit circle $u^2 + v^2 = 1$, are carried by the equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ into three arbitrarily given distinct points $A^*$, $B^*$, $C^*$ on the boundary polygon $\mathfrak{P}$ of $\Pi$.

Such a representation will be called an isothermic representation of $\Pi$, normalized by the condition that $A$, $B$, $C$ be carried into $A^*$, $B^*$, $C^*$.

8. Consider such an isothermic representation of $\Pi$. The area of the rectilinear triangle $\Delta_j$, image of the curvilinear triangle $\delta_j$, is obviously equal to $\iint_{\delta_j} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv$. Using the relations $E = G$, $F = 0$, we get for the total area $\mathfrak{A}(\Pi)$ of $\Pi$ the expressions

$$(1.2.1)\quad \mathfrak{A}(\Pi) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv = \iint_{u^2+v^2<1} E\, du\, dv = \iint_{u^2+v^2<1} G\, du\, dv$$
$$= \iint_{u^2+v^2<1} \frac{E+G}{2}\, du\, dv.$$

9. Given a continuous surface $S$, consider a sequence $\Pi_n$ of polyhedrons converging (in the sense of Fréchet) toward $S$. Consider the quantity $\underline{\lim}\, \mathfrak{A}(\Pi_n)$ (inferior limit of the area of $\Pi_n$). The lower bound of this quantity, for all possible sequences $\Pi_n$ converging toward $S$, is the area $\mathfrak{A}(S)$ of $S$ in the sense of Lebesgue[16]).

This area $\mathfrak{A}(S)$ possesses the following properties.

a) If $S$ is a polyhedron, its area in the sense of Lebesgue is equal to its area as defined in No. 6[17]).

b) $\mathfrak{A}(S)$ is a lower semi-continuous functional[18]); that is to say we have

$$\underline{\lim}\, \mathfrak{A}(S_n) \geqq \mathfrak{A}(S), \quad \text{if} \quad S_n \to S.$$

---

[16]) Loc. cit. [13]) this quantity $\mathfrak{A}(S)$ has been denoted by $L[S]$. The definition used there is based on polyhedrons which are allowed to have degenerate triangles and a boundary polygon with multiple points. It is however obvious that it does not make any difference for $\mathfrak{A}(S)$ if we use the more particular polyhedrons defined in No. 5.

[17]) Loc. cit. [13]), footnote [36]).

[18]) Loc. cit. [13]), part II, § 2, No. 2.

c) Suppose that $S$ is given by

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1,$$

where $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ have continuous first derivatives for $u^2 + v^2 < 1$. Then

$$\mathfrak{A}(S) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv,$$

where

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v.$$

The integral on the right-hand side is here by definition the limit of the integral over $u^2 + v^2 < \varrho^2 < 1$ for $\varrho \to 1$, and the equation is true in the sense that the two sides are either both $+\infty$, or both finite and equal.

The assertion c) is not explicitly stated in the paper cited under [13]), it is however an immediate consequence of the theorems developed there. In fact, denote by $S_\varrho$ the continuous surface

$$S_\varrho: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq \varrho^2 < 1.$$

Then[19])

$$\mathfrak{A}(S_\varrho) \leqq \mathfrak{A}(S).$$

Besides, evidently $S_\varrho \to S$ for $\varrho \to 1$ and so we have, on account of the semi-continuity of the area,

$$\varliminf_{\varrho \to 1} \mathfrak{A}(S_\varrho) \geqq \mathfrak{A}(S).$$

From these relations we get

$$\mathfrak{A}(S) = \lim_{\varrho \to 1} \mathfrak{A}(S_\varrho).$$

Now, the first derivatives of $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are continuous and therefore certainly bounded in $u^2 + v^2 \leqq \varrho^2 < 1$, and so we have[20])

$$\mathfrak{A}(S_\varrho) = \iint_{u^2+v^2<\varrho^2} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

Finally, by definition,

$$\iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv = \lim_{\varrho \to 1} \iint_{u^2+v^2<\varrho^2} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

Combining all these relations, we get

$$\mathfrak{A}(S) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

10. Let be given a Jordan curve $\Gamma^*$ in the $xyz$-space. We shall say that a continuous surface

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \subset R$$

---

[19]) Loc. cit. [13]), part II, § 2, No. 5.

[20]) Loc. cit. [13]), part II, § 2, No. 4.

is bounded by $\Gamma^*$, if the equations of the surface carry the boundary curve $\Gamma$ of $R$ in a topological way into $\Gamma^*$ (or more exactly, if $S$ admits of a parametric representation where this condition is satisfied).

Consider now all possible continuous surfaces $S$ bounded by $\Gamma^*$, and denote by $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ the lower bound of their areas.

Consider on the other hand a sequence of polyhedrons $\Pi_n$, the boundary polygons of which converge toward $\Gamma^*$, and consider the quantity $\underline{\lim}\, \mathfrak{A}(\Pi_n)$. The lower bound of this quantity is the minimum area of $\Gamma^*$ and will be denoted by $m(\Gamma^*)$.[21])

For a general Jordan curve $\Gamma^*$ these quantities $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$, $m(\Gamma^*)$ may be equal to $+\infty$, as it is easily shown by examples.

In his dissertation, Lebesgue proved that for any rectifiable Jordan curve $\Gamma^*$ the quantities $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ and $m(\Gamma^*)$ are finite and equal. We shall later on obtain incidentally the result that $\mathfrak{a}(\Gamma^*) = m(\Gamma^*)$ for any Jordan curve $\Gamma^*$. For the present, we only want to establish the relation

$$m(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{a}(\Gamma^*), \tag{1.2.2}$$

the proof of which is immediate. Indeed, consider any continuous surface $S$ bounded by $\Gamma^*$. From the definition of the area $\mathfrak{A}(S)$ it follows that there is a sequence $\Pi_n$ of polyhedrons satisfying the relations

$$\Pi_n \to S, \qquad \mathfrak{A}(\Pi_n) \to \mathfrak{A}(S).$$

Now, $\Pi_n$ is bounded by a simple closed polygon $\mathfrak{P}_n$; comparing the notions of the distance of two Jordan curves and of the distance of two continuous surfaces, it is obvious that from $\Pi_n \to S$ it follows that $\mathfrak{P}_n \to \Gamma^*$. From the definition of the minimum area $m(\Gamma^*)$ it follows therefore that

$$\mathfrak{A}(S) = \lim \mathfrak{A}(\Pi_n) \geqq m(\Gamma^*),$$

that is to say

$$\mathfrak{A}(S) \geqq m(\Gamma^*).$$

This being true for any $S$ bounded by $\Gamma^*$, $\mathfrak{A}(S)$ may be replaced by its lower bound $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$; so we get

$$\mathfrak{a}(\Gamma^*) \geqq m(\Gamma^*).$$

## § 3.

## On harmonic functions.

1. Let there be given, on the unit circle $u^2 + v^2 = 1$, an integrable function $\xi(\theta)$ of the polar angle $\theta$, periodic with period $2\pi$. Consider

[21]) This important notion has been introduced by Lebesgue, loc. cit. [3]), p. 304, No. 59.

the harmonic function $x(u, v)$, given by the Poisson integral formula

$$x(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\theta)\,\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta, \quad u = \varrho\cos\varphi, \quad v = \varrho\sin\varphi.$$

If for a certain $\theta_0$ the boundary function $\xi(\theta)$ is continuous, then $x(u, v)$ has a definit limit at this point, as is well known, and this limit is equal to $\xi(\theta_0)$. In particular, if $\xi(\theta)$ is continuous on the whole unit circle, then $x(u, v)$ remains continuous for $u^2+v^2=1$ and we have

$$x(u, v) = \xi(\theta) \quad \text{for} \quad u^2+v^2=1.$$

2. Suppose now that for a certain $\theta_0$ the boundary function $\xi(\theta)$ has a discontinuity of the following type. If $\theta$ approaches $\theta_0$ counterclockwise, $\xi(\theta)$ approaches a definit finite limit $\xi_-(\theta_0)$, and if $\theta$ approaches $\theta_0$ clockwise, $\theta(\xi)$ approaches again a definit finite limit $\xi_+(\theta_0)$, these two limits being different:

$$\xi_-(\theta_0) \neq \xi_+(\theta_0). \tag{1.3.1}$$

From this situation, several simple and important conclusions may be drawn. Professor Kellogg called the attention of the author to the theorem that from (1.3.1) it follows that the conjugate harmonic function is not bounded in the vicinity of the point $\theta_0$. This theorem could be used instead of the theorem of F. Riesz which the author referred to in a previous paper[22]) dealing with the problem of Plateau in the case of a rectifiable Jordan curve. In order to control the more general case we shall consider in the sequel, we shall want a theorem of a similar type, which is a slight modification of one of the arguments used by Courant in his work on conformal mapping[23]).

3. Lemma. If for a certain $\theta_0$ the boundary function $\xi(\theta)$ has a discontinuity of the type specified at the beginning of No. 2, then the Dirichlet integral

$$\iint_{u^2+v^2<1} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv$$

of the harmonic function

$$x(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\theta)\,\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta, \quad u = \varrho\cos\varphi, \quad v = \varrho\sin\varphi,$$

cannot be finite.

---

[22]) Loc. cit. [10]).

[23]) See Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, pp. 375–376, Berlin, Julius Springer, 1922.

The following proof is identical to that of Courant, and we develop it only for the sake of completeness. We can obviously assume that

$$\theta_0 = \pi, \quad \xi_-(\theta_0) = +2, \quad \xi_+(\theta_0) = -2. \tag{1.3.2}$$

We introduce polar co-ordinates $r, \psi$ with origin at $u = -1$, $v = 0$. So we have

$$u = -1 + r\cos\psi, \quad v = r\sin\psi. \tag{1.3.3}$$

From the specified nature of the discontinuity of $\xi(\theta)$ at $\theta_0 = \pi$ it follows, as is well known, that $x(u, v)$ approaches a definit limit if $(u, v)$ approaches the point $(-1, 0)$ along any straight line, this limit being a linear function of the angle between the straight line and the $u$-axis. So we get from (1.3.2)

$$\left.\begin{aligned} &x\left(-1 + r\cos\tfrac{\pi}{4}, r\sin\tfrac{\pi}{4}\right) \to +1 \\ &x\left(-1 + r\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right), r\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \to -1 \end{aligned}\right\} \text{ for } r \to 0. \tag{1.3.4}$$

We can therefore fix a $R > 0$ so that

$$\left.\begin{aligned} &x\left(-1 + r\cos\tfrac{\pi}{4}, r\sin\tfrac{\pi}{4}\right) > \tfrac{1}{2} \\ &x\left(-1 + r\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right), r\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) < -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ for } 0 < r < R,$$

and that consequently

$$x\left(-1 + r\cos\tfrac{\pi}{4}, r\sin\tfrac{\pi}{4}\right) - x\left(-1 + r\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right), r\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) > 1 \tag{1.3.5}$$

$$\text{for } 0 < r < R.$$

The left-hand side is here equal to

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{d}{d\psi}\left(x\left(-1 + r\cos\psi, r\sin\psi\right)\right) d\psi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(-v x_u + (1+u) x_v\right) d\psi,$$

and so we get the inequality

$$1 < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(-v x_u + (1+u) x_v\right) d\psi \quad \text{for } 0 < r < R. \tag{1.3.6}$$

Now, the inequality of Schwarz gives

$$\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(-v x_u + (1+u) x_v\right) d\psi\right)^2 \leqq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(x_u^2 + x_v^2\right) d\psi \times r^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\psi$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(x_u^2 + x_v^2\right) d\psi.$$

So we obtain by squaring (1.3.6)

$$1 < \frac{\pi}{2} r^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (x_u^2 + x_v^2)\, d\psi,$$

or

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{r} < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (x_u^2 + x_v^2)\, r\, d\psi \quad \text{for} \quad 0 < r < R. \tag{1.3.7}$$

Denote now by $G_\varepsilon$ the region

$$0 < \varepsilon < r < R, \qquad -\frac{\pi}{4} < \psi < +\frac{\pi}{4}.$$

Integrating (1.3.7) with respect to $r$ from $r = \varepsilon$ to $r = R$, we get

$$\frac{2}{\pi} \log \frac{R}{\varepsilon} < \iint_{G_\varepsilon} (x_u^2 + x_v^2)\, du\, dv. \tag{1.3.8}$$

For $\varepsilon \to 0$ the left-hand side of (1.3.8) converges toward $+\infty$, and so we see that the Dirichlet integral of $x(u, v)$ for the region

$$0 < r < R, \qquad -\frac{\pi}{4} < \psi < +\frac{\pi}{4}$$

and so, *a fortiori*, for the whole unit circle $u^2 + v^2 < 1$ is certainly not finite.

## Chapter 2.

## The problem.

### § 1.

### Statement of the exact and of the approximate problem.

1. The exact problem. Let there be given, in the $xyz$-space, a Jordan curve $\Gamma^*$ with a finite minimum area $m(\Gamma^*)$. Determine three functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ with the following properties.

a) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are harmonic for $u^2 + v^2 < 1$.

b) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ satisfy for $u^2 + v^2 < 1$ the relations $E = G$, $F = 0$, where

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

c) $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ remain continuous for $u^2 + v^2 = 1$, and the equations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

carry the unit circle $u^2+v^2=1$ in a topological way into the given Jordan curve $\Gamma^*$.

d) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy the relation

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG-F^2)^{1/2}\,du\,dv = m(\Gamma^*).\ ^{24})$$

2. We call this problem *the exact problem*, because we shall get its solution by a passage to the limit from the solution of the following *approximate problem.*

The normalized $\varepsilon$-problem. Given in the $xyz$-space a Jordan curve $\Gamma^*$ with a finite minimum area $m(\Gamma^*)$, three distinct points $A^*$, $B^*$, $C^*$ on $\Gamma^*$, and three distinct points $A, B, C$ on the unit circle $u^2+v^2=1$, and an $\varepsilon>0$. Determine three functions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ with the following properties.

a) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ are harmonic for $u^2+v^2<1$.

b) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy the relations

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (E^{1/2}-G^{1/2})^2\,du\,dv \leqq \varepsilon, \qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} |F|\,du\,dv \leqq \varepsilon,$$

where

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, \qquad F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v, \qquad G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

c) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ remain continuous for $u^2+v^2=1$ and the equations

$$x=x(u,v), \qquad y=y(u,v), \qquad z=z(u,v)$$

carry the unit circle $u^2+v^2=1$ in a topological way into a (not prescribed) Jordan curve $\Gamma_\varepsilon^*$, the distance of which from $\Gamma^*$ is $\leqq\varepsilon$; besides, if we denote by $A_\varepsilon^*, B_\varepsilon^*, C_\varepsilon^*$ the images of $A, B, C$ by means of the equations $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, the distances $A^*A_\varepsilon^*$, $B^*B_\varepsilon^*$, $C^*C_\varepsilon^*$ are all three $\leqq\varepsilon$.

d) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy the inequality

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG-F^2)^{1/2}\,du\,dv \leqq m(\Gamma^*)+\varepsilon.$$

3. In § 2, we shall prove that this normalized $\varepsilon$-problem is solvable for any $\varepsilon>0$, and in § 3 we shall infer from this the solvability of the exact problem. The geometrical aspects of this existence theorem will be discussed in Chapter 3.

---

[24]) Note that we use $m(\Gamma^*)$ and not $a(\Gamma^*)$. This device is important for the details of the proof; as to the final result, the passage to $a(\Gamma^*)$ is immediate (see Ch. 3, § 1, No. 1). — For the definition of the quantities $a(\Gamma^*)$, $m(\Gamma^*)$ see Ch. 1, § 2, No. 10.

## § 2.

## Solution of the normalized $\varepsilon$-problem.

1. We shall now prove that this problem is solvable for any position of the points $A, B, C, A^*, B^*, C^*$ and for any $\varepsilon > 0$.

2. From the definition of $m(\Gamma^*)$ it follows immediately that to any $\sigma > 0$ there corresponds an $\eta > 0$, so that we have for any polyhedron $\overline{\Pi}$

$$\mathfrak{A}(\overline{\Pi}) > m(\Gamma^*) - \sigma, \quad \text{if} \quad d(\Gamma^*, \overline{\mathfrak{P}}) < \eta, \tag{2.2.1}$$

where $d(\Gamma^*, \overline{\mathfrak{P}})$ is the distance of $\Gamma^*$ from the boundary polygon $\overline{\mathfrak{P}}$ of $\overline{\Pi}$, and $\mathfrak{A}(\overline{\Pi})$ is the area of $\overline{\Pi}$.

3. We choose a $\sigma > 0$ satisfying the obviously compatible inequalities

$$\left.\begin{matrix} [6\sigma(m(\Gamma^*)+\sigma)]^{1/2} \\ 6\sigma \end{matrix}\right\} < \varepsilon. \tag{2.2.2}$$

From the definition of the minimum area $m(\Gamma^*)$ it follows that there is a polyhedron $\tilde{\Pi}$ so that

$$\mathfrak{A}(\tilde{\Pi}) < m(\Gamma^*) + \sigma, \tag{2.2.3}$$

and the distance of $\Gamma^*$ from the boundary polygon $\tilde{\mathfrak{P}}$ of $\tilde{\Pi}$ is as small as we please. We can therefore choose $\tilde{\Pi}$ so as to have

$$d(\Gamma^*, \tilde{\mathfrak{P}}) < \frac{\eta}{2}, \quad d(\Gamma^*, \tilde{\mathfrak{P}}) < \varepsilon, \tag{2.2.4}$$

where $\eta$ is the constant defined in No. 2 and $\varepsilon$ is the given $\varepsilon$.

From $d(\Gamma^*, \tilde{\mathfrak{P}}) < \varepsilon$ it follows that we have on $\tilde{\mathfrak{P}}$ three distinct points $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, so that the distances $A^*\tilde{A}, B^*\tilde{B}, C^*\tilde{C}$ are all three $\leqq \varepsilon$, $A^*, B^*, C^*$ being the three fixed points given on $\Gamma^*$.

4. Let now

$$\tilde{\Pi}: \quad x = \tilde{x}(u, v), \quad y = \tilde{y}(u, v), \quad z = \tilde{z}(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1,$$

be an isothermic representation[25]) of the polyhedron $\tilde{\Pi}$, normalized by the conditions that the points $A, B, C$, given on $u^2 + v^2 = 1$, are carried into the points $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, defined in No. 3. Let $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ be the harmonic functions coinciding on $u^2 + v^2 = 1$ with $\tilde{x}(u, v)$, $\tilde{y}(u, v)$, $\tilde{z}(u, v)$. We are going to show that these functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ solve the normalized $\varepsilon$-problem.

Put

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$
$$\tilde{E} = \tilde{x}_u^2 + \tilde{y}_u^2 + \tilde{z}_u^2, \quad \tilde{F} = \tilde{x}_u \tilde{x}_v + \tilde{y}_u \tilde{y}_v + \tilde{z}_u \tilde{z}_v, \quad \tilde{G} = \tilde{x}_v^2 + \tilde{y}_v^2 + \tilde{z}_v^2.$$

---

[25]) See Ch. 1, § 2, No. 7.

A harmonic function with given boundary values minimizing the Dirichlet integral[26]), we have

$$(2.2.5)\qquad \begin{cases} \iint\limits_{u^2+v^2<1} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} (\tilde{x}_u^2 + \tilde{x}_v^2)\,du\,dv, \\ \iint\limits_{u^2+v^2<1} (y_u^2 + y_v^2)\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} (\tilde{y}_u^2 + \tilde{y}_v^2)\,du\,dv, \\ \iint\limits_{u^2+v^2<1} (z_u^2 + z_v^2)\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} (\tilde{z}_u^2 + \tilde{z}_v^2)\,du\,dv. \end{cases}$$

We get by addition (and division by 2)

$$(2.2.6)\qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} \frac{E+G}{2}\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \frac{\tilde{E}+\tilde{G}}{2}\,du\,dv.$$

Consider now the continuous surface

$$S:\quad x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad u^2+v^2 \leqq 1.$$

We have the obvious inequalities

$$(2.2.61)\qquad \mathfrak{A}(S) = \iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\,du\,dv\ ^{27}) \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} E^{1/2}G^{1/2}\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \frac{E+G}{2}\,du\,dv.$$

We have furthermore, by the very definition of the area $\mathfrak{A}(S)$, a polyhedron $\bar{\Pi}$ so that both the difference of $\mathfrak{A}(\bar{\Pi})$ and $\mathfrak{A}(S)$ and the distance of the boundaries $\bar{\mathfrak{P}}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$ of $\bar{\Pi}$ and $S$ are as small as we please. We can therefore choose $\bar{\Pi}$ so as to have

$$(2.2.7)\qquad \mathfrak{A}(S) > \mathfrak{A}(\bar{\Pi}) - \sigma,$$

and

$$(2.2.8)\qquad d(\bar{\mathfrak{P}}, \tilde{\mathfrak{P}}) < \frac{\eta}{2}.$$

We have then, with regard to (2.2.4) and (2.2.8)

$$d(\Gamma^*, \bar{\mathfrak{P}}) \leqq d(\Gamma^*, \tilde{\mathfrak{P}}) + d(\tilde{\mathfrak{P}}, \bar{\mathfrak{P}}) < \eta,$$

and from (2.2.1) it follows, therefore, that

$$(2.2.9)\qquad \mathfrak{A}(\bar{\Pi}) > m(\Gamma^*) - \sigma.$$

[26]) See loc. cit. [23]), p. 335, Hilfssatz II. As our functions $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ are continuous for $u^2+v^2 \leqq 1$ and, save on a finite number of analytic arcs, even analytic, the assumptions of the book we referred to are fulfilled.—The existence of the integrals appearing in (2.2.5) to (2.2.97) follows immediately from (2.2.91) by the familiar device of integrating first on $u^2+v^2 < \varrho^2 < 1$.

[27]) See Ch. 1, § 2, No. 9, c.

5. Combining (2.2.7), (2.2.9), (2.2.61), (2.2.6), (1.2.1), (2.2.3), we get

$$(2.2.91)\qquad m(\Gamma^*) - 2\sigma < \mathfrak{A}(S) = \iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\,du\,dv$$

$$\leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} E^{1/2}G^{1/2}\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \frac{E+G}{2}\,du\,dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \frac{\tilde{E}+\tilde{G}}{2}\,du\,dv$$

$$= \mathfrak{A}(\tilde{\Pi}) < m(\Gamma^*) + \sigma.$$

From these relations we infer

$$(2.2.92)\qquad 0 \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[E^{1/2}G^{1/2} - (EG - F^2)^{1/2}\right] du\,dv < 3\sigma,$$

$$(2.2.93)\qquad 0 \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[\frac{E+G}{2} - E^{1/2}G^{1/2}\right] du\,dv < 3\sigma,$$

$$(2.2.94)\qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[E^{1/2}G^{1/2} + (EG - F^2)^{1/2}\right] du\,dv < 2(m(\Gamma^*) + \sigma).$$

Using the inequality of Schwarz, we get from the identity

$$|F| = (F^2)^{1/2} = \left[E^{1/2}G^{1/2} - (EG - F^2)^{1/2}\right]^{1/2} \times \left[E^{1/2}G^{1/2} + (EG - F^2)^{1/2}\right]^{1/2}$$

the relation

$$(2.2.95)\qquad \left(\iint\limits_{u^2+v^2<1} |F|\,du\,dv\right)^2 \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[E^{1/2}G^{1/2} - (EG - F^2)^{1/2}\right] du\,dv$$

$$\times \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[E^{1/2}G^{1/2} + (EG - F^2)^{1/2}\right] du\,dv.$$

From (2.2.92), (2.2.94), (2.2.95), (2.2.2) we obtain

$$(2.2.96)\qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} |F|\,du\,dv < \varepsilon.$$

Using (2.2.93), (2.2.2), we get finally

$$(2.2.97)\qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} (E^{1/2} - G^{1/2})^2\,du\,dv = 2 \iint\limits_{u^2+v^2<1} \left[\frac{E+G}{2} - E^{1/2}G^{1/2}\right] du\,dv < \varepsilon.$$

The relations (2.2.96) and (2.2.97) show that $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy condition b) of the normalized $\varepsilon$-problem. Being harmonic by definition, these functions satisfy condition a); they coincide on $u^2+v^2=1$ with $\tilde{x}(u,v)$, $\tilde{y}(u,v)$, $\tilde{z}(u,v)$ and so they satisfy condition c), with regard to the definition of $\tilde{x}(u,v)$, $\tilde{y}(u,v)$, $\tilde{z}(u,v)$ given in No. 4; from (2.2.91) and (2.2.2) it results finally that they satisfy condition d) also.

## § 3.

## Solution of the exact problem.

1. Take three distinct points $A^*, B^*, C^*$ on the given Jordan curve $\Gamma^*$, three distinct points $A, B, C$ on the unit circle $u^2+v^2=1$, and a sequence of positive numbers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ converging toward zero.

$\Gamma^*$ having by assumption a finite minimum area $m(\Gamma^*)$, we can solve the normalized $\varepsilon$-problem, using the fixed points $A, B, C, A^*, B^*, C^*$ and choosing $\varepsilon=\varepsilon_n$. Denote the solution corresponding to $\varepsilon=\varepsilon_n$ by $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$. For the sake of clarity, we list again the properties of these functions.

a) $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ are harmonic for $u^2+v^2<1$.

b) $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ satisfy the relations

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1}(E_n^{1/2}-G_n^{1/2})^2\,du\,dv\leqq\varepsilon_n,\qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1}|F_n|\,du\,dv\leqq\varepsilon_n,$$

where

$$E_n=\left(\frac{\partial x_n}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y_n}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z_n}{\partial u}\right)^2,\qquad F_n=\frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v}+\frac{\partial y_n}{\partial u}\frac{\partial y_n}{\partial v}+\frac{\partial z_n}{\partial u}\frac{\partial z_n}{\partial v},$$

$$G_n=\left(\frac{\partial x_n}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_n}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z_n}{\partial v}\right)^2.$$

c) $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ remain continuous for $u^2+v^2=1$ and the equations

$$x=x_n(u,v),\qquad y=y_n(u,v),\qquad z=z_n(u,v)$$

carry the unit circle $u^2+v^2=1$ in a topological way into a Jordan curve $\Gamma_n^*$, the distance of which from $\Gamma^*$ is $\leqq\varepsilon_n$; besides, if we denote by $A_n^*, B_n^*, C_n^*$ the images of $A, B, C$ by means of the equations $x=x_n(u,v)$, $y=y_n(u,v)$, $z=z_n(u,v)$, the distances $A^*A_n^*$, $B^*B_n^*$, $C^*C_n^*$ are all three $\leqq\varepsilon_n$.

d) $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ satisfy the inequality

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1}(E_nG_n-F_n^2)^{1/2}\,du\,dv\leqq m(\Gamma^*)+\varepsilon_n.$$

2. Denote now, for the sake of clarity, by $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$, $\zeta_n(\theta)$ the boundary values of $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ respectively. If we denote by $T_n(P)$ the transformation which carries the point $u=\cos\theta$, $v=\sin\theta$ into the point $x=\xi_n(\theta)$, $y=\eta_n(\theta)$, $z=\zeta_n(\theta)$, it follows from condition c) that $T_n(P)$ is a topological transformation of the unit circle $u^2+v^2=1$ into the Jordan curve $\Gamma_n^*$, and therefore certainly a monotonic transformation of $u^2+v^2=1$ into a set on $\Gamma_n^*$, according to the definition given in Ch. 1, § 1, No. 3. From condition c), with regard to $\varepsilon_n\to 0$, it

follows that the sequence $T_n(P)$ satisfies the assumptions of the theorem of Ch. 1, § 1, No. 5, and so we can pick out an everywhere convergent subsequence, which we denote again by $T_n(P)$ for the sake of simplicity. The limit transformation $T(P)$ is, according to the theorem of Ch. 1, § 1, No. 5 a monotonic transformation of $u^2+v^2=1$ into a set on $\Gamma^*$, carrying the points $A, B, C$ into the points $A^*, B^*, C^*$. For the functions $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$, $\zeta_n(\theta)$, defining the transformation $T_n(P)$, this means that there is an everywhere convergent subsequence, which we denote again by $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$, $\zeta_n(\theta)$, and that the limit functions $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ have the following properties, which follow from the fact that the equations $x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ define the monotonic limit transformation $T(P)$ [28]).

a) The point $x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ is on $\Gamma^*$; in particular, the points $A, B, C$ are carried into the three distinct points $A^*, B^*, C^*$.

b) The common points of continuity of $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ are everywhere dense on the unit circle $u^2+v^2=1$.

c) For every value of $\theta$, the functions $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ have limits $\xi_+(\theta)$, $\xi_-(\theta)$, $\eta_+(\theta)$, $\eta_-(\theta)$, $\zeta_+(\theta)$, $\zeta_-(\theta)$ from either side; and if for a certain $\theta$ we have $\xi_+(\theta)=\xi_-(\theta)$, $\eta_+(\theta)=\eta_-(\theta)$, $\zeta_+(\theta)=\zeta_-(\theta)$, then $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ are continuous for this $\theta$.

d) If the equations $x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ carry two distinct points $P, Q$ of $u^2+v^2=1$ into the same point of $\Gamma^*$, then on one of the two arcs determined by $P, Q$ on $u^2+v^2=1$ all three functions $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ reduce to constants.

3. Let now $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ be the harmonic functions obtained by means of the Poisson integral formula, using $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ as boundary functions. We are going to show that these harmonic functions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ solve the exact problem.

4. The equations $x=\xi_n(\theta)$, $y=\eta_n(\theta)$, $z=\zeta_n(\theta)$ carry $u^2+v^2=1$ into a curve $\Gamma_n^*$ converging toward $\Gamma^*$. All these curves $\Gamma^*$ are therefore interior to a sufficiently large sphere, and so the sequences $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$, $\zeta_n(\theta)$ are uniformly bounded. Uniformly bounded convergent sequences being integrable term by term, it follows readily from the Poisson integral formula that $x_n(u,v)$, $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$ and their partial derivatives converge toward $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ and their partial derivatives for $u^2+v^2<1$, the convergence being uniform in any concentric circle $u^2+v^2\leqq\varrho^2<1$.

---

[28]) We use here the properties of monotonic transformations listed in Ch. 1, § 1, No. 4.

5. From this remark, we infer first that

$$E_n \to E, \quad F_n \to F, \quad G_n \to G \tag{2.3.1}$$

uniformly for $u^2+v^2 \leqq \varrho^2 < 1$. From this it follows that

$$\begin{cases} \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E_n^{1/2} - G_n^{1/2})^2 \, du\, dv \to \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E^{1/2} - G^{1/2})^2 \, du\, dv, \\ \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} |F_n| \, du\, dv \to \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} |F| \, du\, dv \quad \text{for} \quad 0 < \varrho < 1. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Now we have

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E_n^{1/2} - G_n^{1/2})^2 \, du\, dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} (E_n^{1/2} - G_n^{1/2})^2 \, du\, dv \leqq \varepsilon_n \to 0, \tag{2.3.3}$$

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} |F_n| \, du\, dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} |F_n| \, du\, dv \leqq \varepsilon_n \to 0. \tag{2.3.4}$$

From (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) it follows that

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E^{1/2} - G^{1/2})^2 \, du\, dv = 0, \quad \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} |F| \, du\, dv = 0, \text{ for } 0 < \varrho < 1.$$

From this we get, with regard to the continuity of $E, F, G$,

$$E = G, \quad F = 0 \quad \text{for} \quad u^2+v^2 < \varrho^2 < 1.$$

Here $\varrho$ is any positive number $< 1$, and so it is proved that

$$E = G, \quad F = 0 \quad \text{for} \quad u^2+v^2 < 1. \tag{2.3.5}$$

6. Using again the fact that

$$E_n \to E, \quad F_n \to F, \quad G_n \to G$$

uniformly for $u^2+v^2 \leqq \varrho^2 < 1$, we get

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E_n G_n - F_n^2)^{1/2} \, du\, dv \to \iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (EG - F^2)^{1/2} \, du\, dv \quad \text{for} \quad 0 < \varrho < 1. \tag{2.3.6}$$

Now, on account of No. 1, d),

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (E_n G_n - F_n^2)^{1/2} \, du\, dv \leqq \iint\limits_{u^2+v^2<1} (E_n G_n - F_n^2)^{1/2} \, du\, dv \leqq m(\Gamma^*) + \varepsilon_n \to m(\Gamma^*),$$

and so we obtain from (2.3.6) that

$$\iint\limits_{u^2+v^2<\varrho^2} (EG - F^2)^{1/2} \, du\, dv \leqq m(\Gamma^*) \quad \text{for} \quad 0 < \varrho < 1.$$

This being true for any $\varrho < 1$, we have also

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2} \, du\, dv \leqq m(\Gamma^*). \tag{2.3.7}$$

Now $E = G$, $F = 0$; so we obtain from (2.3.7)

$$\iint_{u^2+v^2<1} E\,du\,dv = \iint_{u^2+v^2<1} G\,du\,dv \leqq m(\Gamma^*), \tag{2.3.8}$$

and

$$\iint_{u^2+v^2<1} (E+G)\,du\,dv \leqq 2m(\Gamma^*). \tag{2.3.9}$$

7. From this last inequality we infer that $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ have finite Dirichlet integrals. Indeed, for any $\varrho < 1$ we have

$$\iint_{u^2+v^2<\varrho^2} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv \leqq \iint_{u^2+v^2<\varrho^2} (x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + z_u^2 + z_v^2)\,du\,dv$$
$$= \iint_{u^2+v^2<\varrho^2} (E+G)\,du\,dv \leqq \iint_{u^2+v^2<1} (E+G)\,du\,dv \leqq 2m(\Gamma^*).$$

For $\varrho \to 1$ it follows then that

$$\iint_{u^2+v^2<1} (x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv \leqq 2m(\Gamma^*),$$

and we obtain in the same way, of course,

$$\iint_{u^2+v^2<1} (y_u^2 + y_v^2)\,du\,dv \leqq 2m(\Gamma^*); \qquad \iint_{u^2+v^2<1} (z_u^2 + z_v^2)\,du\,dv \leqq 2m(\Gamma^*).$$

8. We are now going to prove that $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ remain continuous for $u^2 + v^2 = 1$. Consider $x(u, v)$ for instance. We have by definition

$$x(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta)\, \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)}\, d\theta, \qquad u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi.$$

The boundary function $\xi(\theta)$ has for every $\theta$ limits from either side (see No. 2, c)); if for some $\theta$ these limits were different, $x(u, v)$ could not have a finite Dirichlet integral (see Ch. 1, § 3, No. 3). We proved however that $x(u, v)$ has a finite Dirichlet integral, and so we see that the forward and backward limits of $\xi(\theta)$ are equal to each other for every $\theta$. From No. 2, c) it follows then that $\xi(\theta)$ is continuous on the whole unit circle. If we use however a continuous boundary function $\xi(\theta)$ in the Poisson integral formula, the resulting harmonic function $x(u, v)$ is certainly continuous in the closed unit circle $u^2 + v^2 \leqq 1$ and we have $x(u, v) = \xi(\theta)$ on the whole unit circle $u^2 + v^2 \leqq 1$. The same reasoning holds of course for $y(u, v)$, $z(u, v)$. So we see that $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ remain continuous for $u^2 + v^2 = 1$ and that

$$x(u, v) = \xi(\theta), \quad y(u, v) = \eta(\theta), \quad z(u, v) = \zeta(\theta) \text{ for } u^2 + v^2 = 1. \tag{2.3.91}$$

9. We see, in particular, that $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ are continuous on the whole unit circle $u^2 + v^2 = 1$. We are going to show that the equations

$x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ carry the unit circle $u^2+v^2=1$ in a topological way into the Jordan curve $\Gamma^*$. With regard to the property a) of $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$, stated in No. 2, we have only to verify that the equations $x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ carry distinct points of $u^2+v^2=1$ into distinct points of $\Gamma^*$. Suppose this were not true. Then we infer from No. 2, d), that all three functions $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ reduce to constants on a whole arc $\sigma$ of $u^2+v^2=1$. From (2.3.91) it results then that $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ are certainly analytic on $\sigma$, and so the relations $E=G$, $F=0$, proved in No. 5 for $u^2+v^2<1$, remain valid on $\sigma$ also:

$$E=G,\quad F=0 \text{ on } \sigma. \tag{2.3.92}$$

With regard to (2.3.91) we obtain, using the assumption that $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$ reduce to constants on $\sigma$,

$$\left.\begin{aligned} \xi_\theta &= -x_u\sin\theta+x_v\cos\theta=0\\ \eta_\theta &= -y_u\sin\theta+y_v\cos\theta=0\\ \zeta_\theta &= -z_u\sin\theta+z_v\cos\theta=0 \end{aligned}\right\} \text{ on } \sigma.$$

Square, add, and use (2.3.92). It follows that

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2=0 \quad \text{on} \quad \sigma.$$

From this we infer that

$$x_u=x_v=y_u=y_v=z_u=z_v=0 \quad \text{on} \quad \sigma,$$

and that consequently $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ reduce to constants identically. This conclusion is however contradicted by the fact, resulting from (2.3.91) and No. 2, a), that the equations $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ carry the points $A$, $B$, $C$ into three distinct points $A^*$, $B^*$, $C^*$.

10. So we have proved that the equations $x=\xi(\theta)$, $y=\eta(\theta)$, $z=\zeta(\theta)$ carry $u^2+v^2=1$ in a topological way into $\Gamma^*$; with regard to (2.3.91) this means that $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy condition c) of the exact problem. The relation (2.3.5) shows that $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfy condition b) of the exact problem, and as these functions are harmonic by definition, they satisfy condition a) also. It only remains to verify condition d). Consider the continuous surface

$$S:\ x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad u^2+v^2\leqq 1.$$

$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ satisfying condition c) of the exact problem, this $S$ is a continuous surface bounded by $\Gamma^*$. So its area satisfies the inequality

$$\mathfrak{A}(S)\geqq \mathfrak{a}(\Gamma^*)\ ^{29}).$$

---

[29]) See Ch. 1, § 2, No. 10.

We have furthermore

$$\mathfrak{a}(\Gamma^*) \geqq m(\Gamma^*)\ ^{30}),$$

and, on account of Ch. 1, § 2, No. 9, c),

$$\mathfrak{A}(S) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

Besides, we proved in No. 6 (see 2.3.7) that

$$\iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv \leqq m(\Gamma^*).$$

Combining these relations, we obtain

$$\mathfrak{a}(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{A}(S) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv \leqq m(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{a}(\Gamma^*),$$

and so we have the equation

$$\mathfrak{A}(S) = m(\Gamma^*),$$

showing that $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ satisfy condition d) of the exact problem.

We have thus finished the proof that $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ solve our exact problem.

## Chapter 3.

## Discussion of the result.

### § 1.

### The problem of the least area and the problem of Plateau.

1. Let there be given a Jordan curve $\Gamma^*$ in the $xyz$-space. Suppose first that the minimum area $m(\Gamma^*)$ of $\Gamma^*$ is finite; then our exact problem is solvable. Denote by $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ a solution of this problem and consider the continuous surface

$$S:\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1.$$

On account of condition c) of the exact problem, this $S$ is a continuous surface bounded by $\Gamma^*$; so its area $\mathfrak{A}(S)$ satisfies the inequality

$$\mathfrak{A}(S) \geqq \mathfrak{a}(\Gamma^*)\ ^{31}).$$

On account of condition a) of the exact problem $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ are harmonic for $u^2 + v^2 < 1$ and so certainly they have continuous first derivatives for $u^2 + v^2 < 1$. We have therefore

$$\mathfrak{A}(S) = \iint_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv\ ^{32}).$$

---

30) See Ch. 1, § 2, No. 10, (1.2.2).

31) See 29).

32) See 27).

We note further condition d) of the exact problem, namely

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv = m(\Gamma^*),$$

and the fact, established in Ch. 1, § 2, No. 10,

$$m(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{a}(\Gamma^*).$$

Combining all these relations, we obtain

$$\mathfrak{a}(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{A}(S) = \iint\limits_{u^2+v^2<1} (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv = m(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{a}(\Gamma^*).$$

From this it follows that

(3.1.1) $$\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{a}(\Gamma^*)$$

and

(3.1.2) $$\mathfrak{a}(\Gamma^*) = m(\Gamma^*).$$

(3.1.1) expresses that $S$ solves the problem of the least area[33]). As conditions a), b), c) of the exact problem express that $S$ is a minimal surface bounded by $\Gamma^*$ (see No. 7 of the Introduction), $S$ is a common solution of the problem of Plateau and of the problem of the least area.

Suppose second that $m(\Gamma^*) = +\infty$. From the relation

$$m(\Gamma^*) \leqq \mathfrak{a}(\Gamma^*)$$

it follows then that $\mathfrak{a}(\Gamma^*) = +\infty$; so we have in this case

(3.1.3) $$m(\Gamma^*) = \mathfrak{a}(\Gamma^*) = +\infty.$$

$\mathfrak{a}(\Gamma^*) = +\infty$ means that the area of any continuous surface bounded by $\Gamma^*$ is $+\infty$, and so any such surface solves the problem of the least area. It may be observed that $\Gamma^*$ certainly bounds analytic surfaces; denote, for instance, by $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ the harmonic functions with boundary values $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$, $\zeta(\theta)$, so that $x = \xi(\theta)$, $y = \eta(\theta)$, $z = \zeta(\theta)$ is a parametric representation of $\Gamma^*$; then

$$S\colon\ x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1$$

is an analytic surface bounded by $\Gamma^*$.

(3.1.2) and (3.1.3) include the theorem that

(3.1.4) $m(\Gamma^*) = \mathfrak{a}(\Gamma^*)$ for any Jordan curve $\Gamma^*$.

So in all the preceding statements, we can say $\mathfrak{a}(\Gamma^*)$ for $m(\Gamma^*)$; so we obtain the following theorem, summarizing our results.

---

[33]) See the statement in No. 1 of the Introduction.

*For any Jordan curve $\Gamma^*$ in the $xyz$-space, the problem of the least area has infinitely many solutions*[34]). *Among these solutions, there is always an analytic surface, and if $\Gamma^*$ bounds at least one continuous surface with a finite area, then there is even a minimal surface solving the problem of the least area.*

2. For the problem of Plateau itself *there follows the existence of the solution for any Jordan curve which bounds at least one continuous surface with a finite area.*

An important particular case is the case of *rectifiable* Jordan curves. If $\Gamma^*$ is rectifiable, then the straight segments $P_0^*P^*$, connecting a fixed point $P_0^*$ of $\Gamma^*$ with a variable point $P^*$ of $\Gamma^*$, constitute a cone the area of which is evidently $\leqq \frac{1}{2}LD$, where $L$ is the length and $D$ the diameter of $\Gamma^*$, and which is evidently a continuous surface bounded by $\Gamma^*$ [35]). So a rectifiable Jordan curve certainly bounds continuous surfaces with a finite area.

Another particular case is the case of a Jordan curve situated on a closed convex surface (see No. 4 of the Introduction). Such a curve is generally not rectifiable; topologically, however, this case is very particular. Indeed, such a curve is for instance certainly not knotted, whilst a rectifiable Jordan curve can be of any desired topological type.

3. In the work of Garnier, referred to in No. 8 of the Introduction, the Problem of Plateau is solved for Jordan curves with bounded curvature; in the present paper, it is solved for Jordan curves with a finite minimum area. In both cases, the methods use essentially the fact that the assumption concerning $\Gamma^*$ yields a finite constant (the bound for the curvature in the case of Garnier, the minimum area in our case) which dominates all the passages to the limit.

So the case of a general Jordan curve seems to be beyond the reach of these methods. The publication of the details of the work of Mr. Douglas, who deals with the general case, will be of a great interest.

## § 2.

## On the singularities of the solution.

1. In differential geometry, surfaces are studied in the small. Three equations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

represent a surface in the sense of differential geometry, if $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ have all necessary partial derivatives in the vicinity of a

[34]) See No. 2 of the Introduction.

[35]) See the definition in No. 1 of the Introduction.

point $(u_0, v_0)$ and if in this vicinity $EG - F^2 \neq 0$. From this assumption it follows that the vicinity of $(u_0, v_0)$ is carried in a one-to-one way into a small piece of surface in the $xyz$-space. For the sake of brevity, let us call such a piece of surface an *element*.

The assumption $EG - F^2 \neq 0$ is essential in differential geometry; this quantity appears in the denominator of the total curvature, of the mean curvature, and so on. In particular, a minimal surface being defined by the property that the mean curvature vanishes identically, this definition applies immediately only to elements, as defined above.

There are however classical investigations (of Lie, of Darboux, of Schwarz) concerned with minimal surfaces in the large. Consider an *element*, the mean curvature of which vanishes identically. Such an element is analytic, as it may be proved[36]), or simply by definition in the classical investigations. So such an element may be continued analytically, and it appears that according to the classical point of view a minimal surface is a surface which may be obtained by analytic continuation of an element with identically vanishing mean curvature. We have used in this paper the term minimal surface in this extended sense.

A minimal surface may then have singularities; an easy discussion would show that the singularities are of the same type as the singularities of the Riemann surfaces used in the theory of multiple-valued functions. A minimal surface may intersect itself, and it may have branch-points.

2. Let now $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ be a solution of our exact problem. Consider the surface

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2 + v^2 \leqq 1.$$

The given Jordan curve $\Gamma^*$ being allowed to have any complicated shape, this surface $S$ will be generally complicated also. One thing is immediate, namely that the zeros of $EG - F^2$ are isolated in $u^2 + v^2 < 1$. Indeed, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ being harmonic for $u^2 + v^2 < 1$, we can write

$$x(u, v) = \Re f_1(w), \quad y(u, v) = \Re f_2(w), \quad z(u, v) = \Re f_3(w),$$

where $f_1(w)$, $f_2(w)$, $f_3(w)$ are single-valued analytic functions of $w = u + iv$ for $|w| < 1$. We have then

$$(3.2.1) \qquad x_u - ix_v = f_1', \quad y_u - iy_v = f_2', \quad z_u - iz_v = f_3'.$$

Suppose now that for a certain $w_0 = u_0 + iv_0$ the quantity $EG - F^2$ vanishes. As $E = G$, $F = 0$, it follows then that

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 0, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 0,$$

---

[36]) See, also for literature, the author's paper: Über den analytischen Charakter der Minimalflächen, Math. Zeitschr. 24 (1926), pp. 321–327.

and that consequently $x_u = x_v = y_u = y_v = z_u = z_v = 0$ in $(u_0, v_0)$. From (3.2.1) we get then

$$f_1'(w_0) = f_2'(w_0) = f_3'(w_0) = 0.$$

That is to say, in a point where $EG - F^2$ vanishes, the functions $f_1'(w)$, $f_2'(w)$, $f_3'(w)$ vanish all three.

The zeros of a non-identically vanishing analytic function of $w$ being isolated, we see that either the zeros of $EG - F^2$ are isolated or $f_1'(w)$, $f_2'(w)$, $f_3'(w)$ vanish identically. In this latter case, $f_1(w)$, $f_2(w)$, $f_3(w)$ and of course their real parts $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ reduce to constants identically. This is however certainly not the case, because the equations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ carry $u^2 + v^2 = 1$ in a topological way into the Jordan curve $\Gamma^*$.

3. If the given Jordan curve has some particular shape, conclusions may be drawn as to the singularities of our minimal surface $S$. We shall give now a few instances; the subject ought to be however considered in a more complete way.

We shall use the following simple lemma on the zeros of harmonic functions.

Let $h(u, v)$ be a function continuous for $u^2 + v^2 \leqq 1$ and harmonic for $u^2 + v^2 < 1$. Suppose that for a certain interior point $(u_0, v_0)$

$$h(u_0, v_0) = h_u(u_0, v_0) = h_v(u_0, v_0) = 0. \tag{3.2.2}$$

Then $h(u, v)$ has at least four distinct zeros on the unit circle.

If $h(u, v) \equiv 0$, then the assertion is of course true; so suppose $h(u, v) \not\equiv 0$. Then in the vicinity of $(u_0, v_0)$ the zeros of $h(u, v)$ constitute a finite number $n$ of analytic arcs passing through $(u_0, v_0)$; from the assumption (3.2.2) it follows that $n \geqq 2$. These arcs divide the vicinity of $(u_0, v_0)$ into $2n$ sectors $\sigma_1^+, \sigma_1^-, \sigma_2^+, \sigma_2^-, \ldots, \sigma_n^+, \sigma_n^-$, the notation indicating that $h(u, v)$ is alternately positive and negative in these sectors. Consider now the open set of the points $(u, v)$ satisfying $u^2 + v^2 < 1$, $h(u, v) \neq 0$. This set consists of a denumerable set of connected open subsets; denote by $G_1^+, \ldots, G_n^-$ those of these subsets which comprise $\sigma_1^+, \ldots, \sigma_n^-$ respectively. Consider $G_1^+$ for instance. In any boundary point of $G_1^+$, which is interior to the unit circle, we have obviously $h(u, v) = 0$; as the harmonic function $h(u, v)$ is positive in $G_1^+$, it follows that there must be a boundary point of $G_1^+$ in which $h(u, v)$ is positive and that such a boundary point is situated on $u^2 + v^2 = 1$. Applying the same reasoning to $G_1^-, \ldots, G_n^+, G_n^-$, we see that we have points $P_1^+, P_1^-, \ldots, P_n^+, P_n^-$ with the properties:

a) $P_1^+, P_1^-, \ldots, P_n^+, P_n^-$ are boundary points of $G_1^+, G_1^-, \ldots, G_n^+, G_n^-$ respectively.

b) These points are on $u^2 + v^2 = 1$.

c) We have $h(u, v) > 0$ in $P_1^+, \ldots, P_n^+$ and $h(u, v) < 0$ in $P_1^-, \ldots, P_n^-$.

Now, from obvious topological reasons these points follow each other in the same order as the corresponding sectors around $(u_0, v_0)$. So we see that $h(u, v)$ changes sign on $u^2 + v^2 = 1$ at least $2n$ times and therefore there are at least $2n \geqq 4$ zeros of $h(u, v)$ on $u^2 + v^2 = 1$.

4. Consider now our minimal surface $S$. Suppose that for a certain point $(u_0, v_0)$, interior to the unit circle, we have $EG - F^2 = 0$. From $E = G$, $F = 0$ it follows then

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 0, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 0,$$

and consequently

$$x_u = x_v = y_u = y_v = z_u = z_v = 0 \text{ in } (u_0, v_0).$$

Put

$$x_0 = x(u_0, v_0), \qquad y_0 = y(u_0, v_0), \qquad z_0 = z(u_0, v_0),$$

and denote by $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ three real constants. Consider the harmonic function

$$h(u, v) = \alpha(x(u, v) - x_0) + \beta(y(u, v) - y_0) + \gamma(z(u, v) - z_0).$$

Obviously $h(u_0, v_0) = h_u(u_0, v_0) = h_v(u_0, v_0) = 0$ and therefore the lemma of No. 3 shows that there are at least four distinct zeros of $h(u, v)$ on $u^2 + v^2 = 1$. That is to say:

*If $EG - F^2$ vanishes in a point $(u_0, v_0)$ interior to the unit circle, then any plane through the corresponding point $(x_0, y_0, z_0)$ of our minimal surface $S$ intersects the boundary curve $\Gamma^*$ in at least four distinct points.*

5. This result includes several interesting particular cases; we consider the following one. Suppose that there is in the $xyz$-space a straight line $g$, such that any plane through $g$ intersects the given Jordan curve in at most two distinct points. Then our minimal surface $S$ has no branch-points.

Indeed, through any point $(x_0, y_0, z_0)$ of the space there passes in this case a plane which certainly does not intersect $\Gamma^*$ in four distinct points, namely the plane connecting $(x_0, y_0, z_0)$ with $g$ (if $(x_0, y_0, z_0)$ is on $g$, then there are even infinitely many such planes). The result of No. 4 shows therefore that there can be no branch-point at all.

The preceding criterion gives the theorem: *if the given Jordan curve $\Gamma^*$ has upon some plane $p$ a simply covered star-shaped (central or parallel) projection, then our minimal surface $S$ has no branch-points.*

We say that a Jordan curve $\Gamma'$, situated in a plane $p$, is *star-shaped*, if there is a point $P_0$ in $p$, interior to $\Gamma'$, so that any straight line in $p$, which passes through $P_0$, intersects $\Gamma'$ in not more than, and then of course in exactly two distinct points. The straight line $g$, connecting this point $P_0$ with the center of projection (which is a finite point in the case of the central projection and a direction in the case of the parallel projection) has then obviously the property required in the above criterion.

*Convex curves* are evidently star-shaped; this remark leads to an important particular case of the preceding theorem.

## § 3.

## On the partial differential equation $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$.

1. *Let there be given, in the $xy$-plane, a convex Jordan curve $\Gamma'$, and a continuous boundary function $\varphi(P')$ of the point $P'$ varying on $\Gamma'$. Then there exists a solution $z(x,y)$ of the partial differential equation*

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

*which is continuous in and on $\Gamma'$, analytic in $\Gamma'$, and which reduces on $\Gamma'$ to the given continuous boundary function $\varphi(P')$.*

This theorem has been stated, without proof, by S. Bernstein in 1912. All the investigations concerned with this theorem suppose essentially that $\varphi(P')$ satisfies (at least) the three-points condition described in No. 6 of the Introduction. We shall now show that our results lead easily to the above general theorem.

2. Consider, in the $xyz$-space, the Jordan curve $\Gamma^*$ defined by $z=\varphi(P')$. Denote by $M$ the maximum of $|\varphi(P')|$ and consider in the $xyz$-space the point-set

$$|z|<M, \quad (x,y) \text{ in } \Gamma'.$$

The curve $\Gamma'$ being convex, this point-set is convex also; its boundary is a closed convex surface, and the Jordan curve $\Gamma^*$ is evidently situated on this convex surface. So (see No. 4 of the Introduction) $\Gamma^*$ bounds continuous surfaces with a finite area, and therefore our exact problem is solvable for $\Gamma^*$.

Denote by $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ the solution of our exact problem for $\Gamma^*$. As $\Gamma'$ is the simply covered orthogonal projection of $\Gamma^*$ upon the $xy$-plane, it follows from condition c) of the exact problem that the two equations

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v) \tag{3.3.1}$$

carry $u^2+v^2=1$ in a topological way into $\Gamma'$. This curve $\Gamma'$ being convex, and $x(u,v)$, $y(u,v)$ being harmonic, it follows then[37]) that the equations (3.3.1) carry the interior of the unit circle in a topological way into the interior of $\Gamma'$, and that the Jacobian $x_u y_v - x_v y_u$ is $\neq 0$ in $u^2+v^2<1$. So we can solve the equations $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ with respect to $u, v$, and we obtain this way, on account of well-known theorems on implicit functions, $u$ and $v$ as single-valued continuous functions of $x$ and $y$ in the closed region bounded by $\Gamma'$, and analytic in the interior of $\Gamma'$. Substituting into $z(u,v)$, we see that the minimal surface $S$, solution of our exact problem, may be representedas a whole by $z=z(x,y)$, where $z(x,y)$ is single-valued and continuous in and on $\Gamma'$, and analytic in $\Gamma'$. The surface $S$ being a minimal surface bounded by $\Gamma^*$, this $z(x,y)$ evidently solves the boundary value problem.

The Rice Institute, Houston, Texas, April 1930.

---

[37]) See T. Radó, Aufgabe 41, and H. Kneser, Lösung der Aufgabe 41, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **35** (1926).

(Eingegangen am 17. Mai 1930.)

---

## Druckfehlerverzeichnis

zu der Arbeit von F. Pollaczek: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie, I. (Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 64–100.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| S. 67, Gl. (7) | lies | $1 \leqq s' \leqq s$ | statt | $1 \leqq s \leqq s'$, |
| S. 69, Gl. (15b) | „ | $(T-x_m)^{n-m}$ | „ | $(T-x_m)^{m-n}$, |
| S. 73, Z. 5 | „ | $e^{(q-p)t_0}$ | „ | $e^{(p-q)t_0}$, |
| S. 74, Gl. (33) | „ | $\int_{K_p}\int_{K_q}\dots$ | „ | $\int_{K_p}\int_{K_p}\dots$, |
| S. 77, Z. 2 v. u. | „ | $\log(1-z^{-s}e^{s\eta(z-1)})$ | „ | $\log(1-z^{s}e^{s\eta(z-1)})$, |
| S. 86, Gl. (81) | „ | $\int_{t'}^{t''}$ | „ | $\int_{t'}^{t_0''}$, |
| S. 86, Z. 1 v. u. | „ | $\mu_0=\frac{n-s}{s}$ | „ | $\mu_0=\frac{\mu-s}{s}$, |
| S. 89, Z. 11 | „ | $C_p'$ | „ | $C_p$, |

S. 96, Z. 13 v. u. im Exponenten: $\frac{q}{\eta}-\log\frac{q}{\eta}$ statt $\frac{q}{n}-\log\frac{q}{n}$.